



Püf Noktalarıyla

MUKAVEMET

Ders Notları

(Son güncelleme 21.12.2018)

Prof. Dr. Mehmet Zor

KAYNAKLAR

1- Ders Referans Kitabı :

Mechanics of Materials,

Yazarları: Ferdinand P.Beer, E.Russell Johnston, John T.Dewolf, David F.Mazurek

2- Yardımcı Kaynak:

a - Mukavemet I O.Sayman, S.Aksoy, S.Erim, H.Akbulut, (DEU yayınları)

b - Mukavemet Problemleri (Mustafa Savcı, Alaaddin Arpacı)

3- Öğretim Üyesinin Web Sayfası: <http://kisi.deu.edu.tr/mehmet.zor/>

a - Ders Notları – pdf

b- Sınav soruları –cevapları,

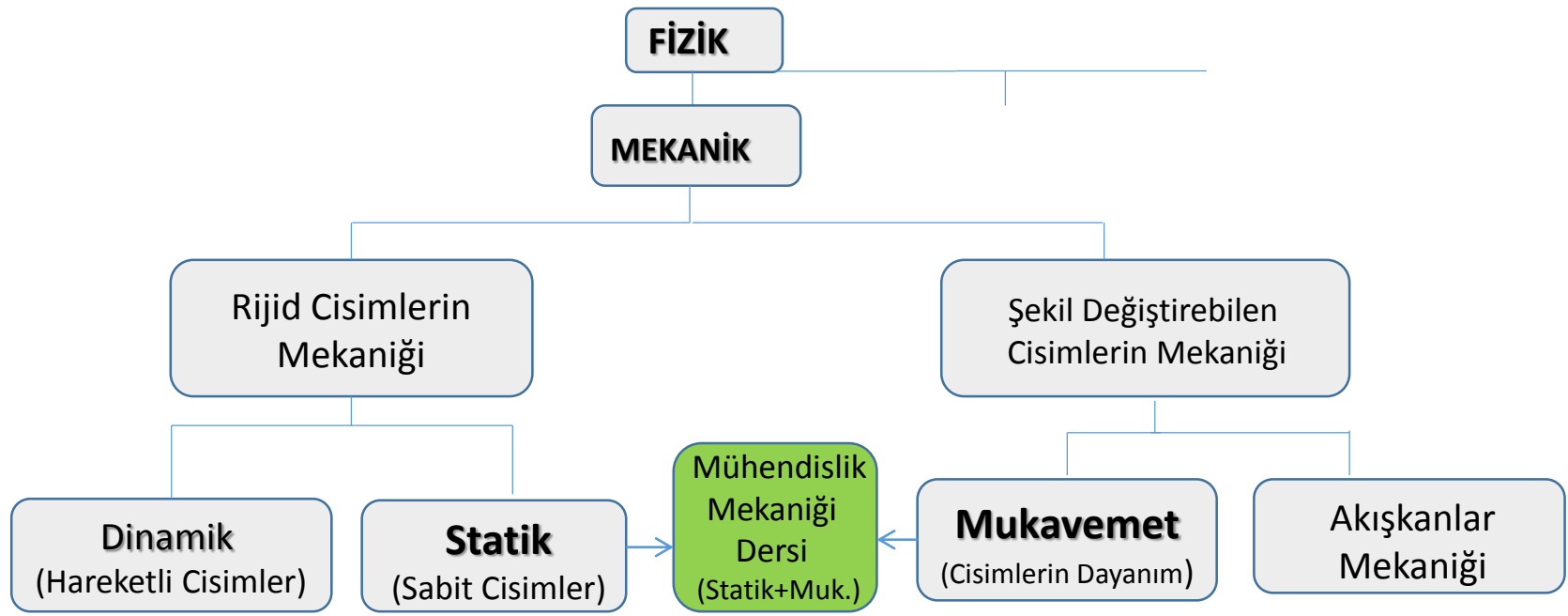
c- Ders Kitabı (pdf) ve diğer kaynaklar

İletişim : e-posta: mehmet.zor@deu.edu.tr

1.1 Mukavemet Dersinde İşlenecek Konular

1. a-Giriş, b-Gerilme Kavramı, c-Bağlantı Elemanları
2. Şekil Değiştirme, a-Genel Bilgiler, b-Eksenel Yüklemede Toplam Uzama, c-Eksenel Yüklemede Hiperstatik Problemler
3. Burulma:
4. Eğilme
5. Düşey Yüklü Kirişlerin Eğilmesinde Kayma Gerilmesi (ders kapsamı dışında)
6. Düzlemde Gerilme Dönüşümleri ve Mohr Çemberi
7. Bileşik Yükleme
8. Akma ve Kırılma Kriterleri

Püf Noktası (P.N)-1.1 : Mukavemette hesaplama yöntemleri (Formülleri) yükleme şekline ve bazen geometriye göre değişir.



Mekanik: Fizik biliminin, cisimlerin dış yükler altındaki davranışlarını inceleyen dalıdır.

Rijit Cisim: Kuvvet etkisi ile şeklinde bir değişiklik olmayan teorik cisimdir. Gerçekte **katı** haldeki tüm cisimlerde dış kuvvetler etkisiyle az-çok şekil değişikliği olur. Ancak statik ve dinamik bilimlerinde, gerçek katı cisimler de rijit kabul edilir.

Dinamik: Hareket halindeki katı cisimlerin davranışlarını inceler.

Statik: Dış yüklere maruz kalmasına rağmen durağan halde dengede olan cisimlerin davranışlarını inceler. (Örneğin oturduğunuz sıra, masa vb.) Statikte genel amaç cisme etki eden dış kuvvetlerin belirlenmesidir.

Mukavemet: Dış yüklerin etkisine maruz, genelde statik (durağan) halde olan, şekil değiştirebilen katı cisimlerin ve sistemlerin davranışlarını inceler. Dış yükler statikteki denklemlerden hesaplandıktan sonra, bu dış yüklere sistemin dayanıp dayanamayacağını veya dayanması için boyutlarının veya malzemesinin ne olması gerektiği sorularına cevap aranır. Mühendislik açısından bu çok önemli sorulara cevabı ise Mukavemet bilimi verir.

1.2 Mukavemet Dersi size ne kazandıracak ?



Bu dersi alan ve başarılı olan öğrenciler;

Denge halindeki katı sistemlerde dış yükleri statikten hesapladıktan sonra,

- I. Sistemin (malzemelerin) bu yüklere dayanıp dayanamayacağını hesaplarla kontrol edebilecekler,
- II. Veya bu yüklere sistemin dayanabilmesi için sistemi oluşturan parçaların her birisinin boyutlarının minimum alması gereken değeri tayin edebilecekler,
- III. Veya sistemin bu yüklere dayanabilmesi için malzeme seçimi yapabileceklerdir.

Bu bilgi ve beceriler ise öğrencilere mühendislik açısından çok önemli kazanımlar sağlayacaktır. Yeni sistemleri, üretmeden önce dayanım açısından optimum (en uygun) seviyede tasarlayabilecek bir bilgi birikimine ulaşabileceklerdir.

1.3 BU DERS GERÇEK HAYATTA NE İŞE YARAYACAK? – Örnek 1



- Çalıştığınız işletme şekildeki gibi bir hamak imal etmek istemektedir. Ar-ge mühendisi olarak sizden hamakta kullanılacak iplerin emniyetli çapını (d) belirlemenizi istemiştir.

Şunu unutmayın: ip kuvvetleri bilinmeden emniyetli çap (d) hesaplanamaz.

İlk adım iplere düşen kuvvetleri (T_1 , T_2) bulmaktır.

2.Adım ise ipin emniyetli çapını (d) hesaplamaktır.



O halde;

Statik'ten

Mukavemet'ten

1.3 BU DERS GERÇEK HAYATTA NE İŞE YARAYACAK? – Örnek 2



Merdivenin ayaklarında oluşan tepki kuvvetlerini statik denge denklemlerinden hesaplarız.

- Bu merdivenin bu adamı
- taşıyıp taşıyamayacağını,
- Veya taşıyabilmesi için gerekli boyutların minimum değerlerini,
- Veya belli boyutlarda malzeme cinsinin ne olması gerektiğini mukavemet dersindeki konulardan hesaplarız.

1.4 Tasarım Kriterleri:

Tasarlanan ısı veya mekanik sistemler üretilmeden önce, tasarım aşamasında mutlaka boyutlandırılması gerekir.

Bu boyutlandırma yapılırken mutlaka şu 3 şart göz önünde bulundurulmalı ve optimum (en uygun) çözüm elde edilmelidir.

1- Sistem ekonomik olmalıdır.

2- Güvenli Olmalıdır. (Mukavemet Hesapları bu kriter üzerine yapılmaktadır.)

3- İşlevini yerine getirebilmelidir.

Optimum çözüm: Boyutların büyümesi sistemin güvenliğini arttırır ancak ekonomiklik olma şartını azaltır. Boyutların büyümesi işlevselliğin yitirilmesine de sebep olabilir.

Ayrıca daha dayanıklı malzeme seçmek boyutların küçük kalmasını sağlayabilir ancak bu tip malzemeler daha pahalı olduğundan yine ekonomik olma şartı sağlanmayabilir.

Bu sebeplerle, bir mühendisten, tüm faktörleri göz önüne alarak bu 3 kriteri en iyi şekilde sağlayacak çözümü geliştirmesi (ki buna optimum çözüm denir), beklenir.

1.5 Kullanacağımız Birimler

Uzunluk	milimetre (m)
Kuvvet	Newton (N)
Gerilme	MegaPascal (N/mm'2)

Unutmayın :

- Mukavemet dersinde tüm problemlerde daima Newton (N) ve milimetre (mm) kullanacağız.
- Bu durumda ortaya çıkacak gerilme :N/mm² olacaktır ki buna MPa (Megapascal) denir.

$1 \text{ N/mm}^2 = 1 \text{ MPa}$

1.6

GERİLME KAVRAMI



1.6.1 Gerilmenin Anlamı:

Gerilme genel anlamda «birim alana düşen iç kuvvet» olarak tanımlanabilir.

Gerilme kavramının anlaşılması, mukavemet konularının kavranmasında çok önemli bir temel teşkil eder.

Gerilme kavramını anlayabilmek için, öncelikle ayırma prensibinin ve iç kuvvet kavramının anlaşılması gereklidir.

Gerilme kavramını önce kendimizden anlamaya çalışacağız.



1.6.2 İnsanda stres - Cisimlerde Gerilme

Gerilme kavramını önce kendimizden anlamaya çalışalım.

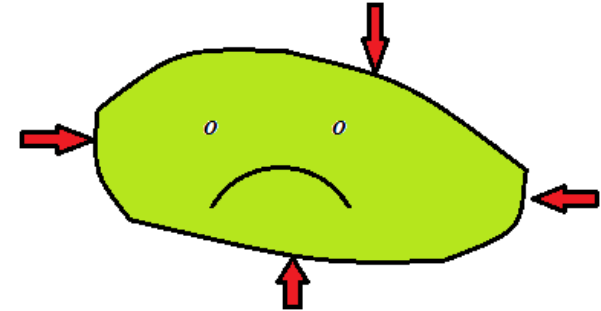
Gerilmenin İngilizcesi stress dir. Stres kelimesi ise şu an Türkçe olarak, bir olayın veya fiilin bizde oluşturduğu endişe ve tedirginlik anlamında kullanılmaktadır.

İnsandaki stres, dışarıdaki olayların baskısıyla oluşur. Yani stres dış yüklerin (olayların, baskıların) bizde oluşturduğu etkidir. Yoksa stres dış bir yük (baskı) değildir. Stres uygulanmaz, oluşur.

İşte benzer şekilde katı cisimler için dışarıdan uygulanan fiziksel yükler, cismin içinde stres (gerilme) oluşmasına sebep olur.

Bizdeki stres belli bir sınırı aşarsa, şok, baygınlık gibi hasarlara sebep olur. Bu sınır ise kişiden kişiye değişir. İradesine sahip, sabırlı kişilerin stres sınırı yüksektir.

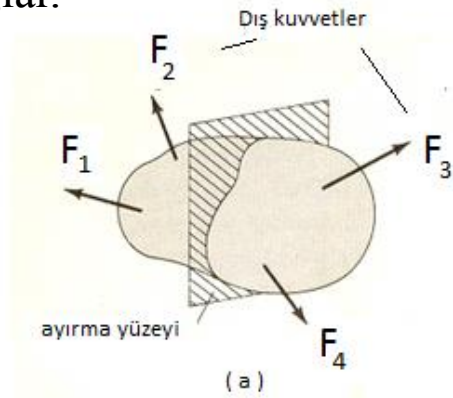
Dış yükler sonucu üzerinde stress oluşan katı cisimlerde de belli bir sınırdan sonra çatlama, kopma, akma (kalıcı deformasyon) gibi hasarlar oluşabilir. Bu ise katı cismin malzeme cinsinin dayanımıyla ve mekanik davranışlarıyla çok yakından ilgilidir. Aynı geometride fakat farklı malzemeden imal edilen iki cismin aynı dış yüke gösterdikleri cevaplar farklı olacaktır. Bir ipi çekerek koparsak bile, aynı kalınlıkta çelik bir teli koparamayız.



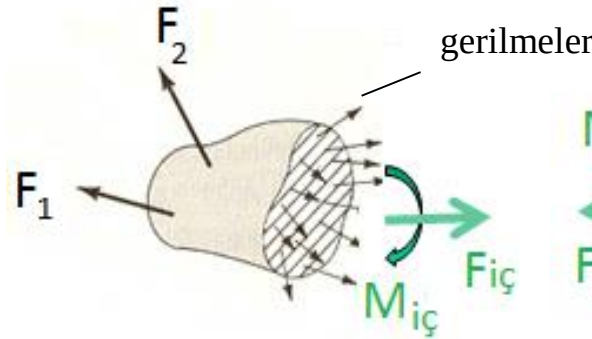
1.6.3. Ayırma Prensibi:

Dış kuvvetlerin etkisine maruz bir sistem dengede ise hayali bazda da ayırdığımız her bir parçası da ayrı ayrı dengededir. Buna ayırma prensibi denir.

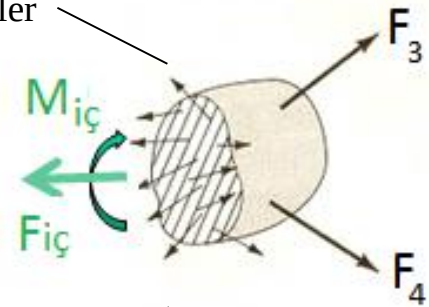
Hayali olarak ayırdığımız her bir parçasına, dış kuvvetlerden başka, ayırma kısmından iç kuvvetler ve iç momentler de etki ettirilir. Herbir parçada iç ve dış kuvvetler statik denge sağlar.



$$\sum \vec{F} = \sum \vec{M} = 0$$



$$\bullet \sum \vec{F} = \sum \vec{M} = 0$$



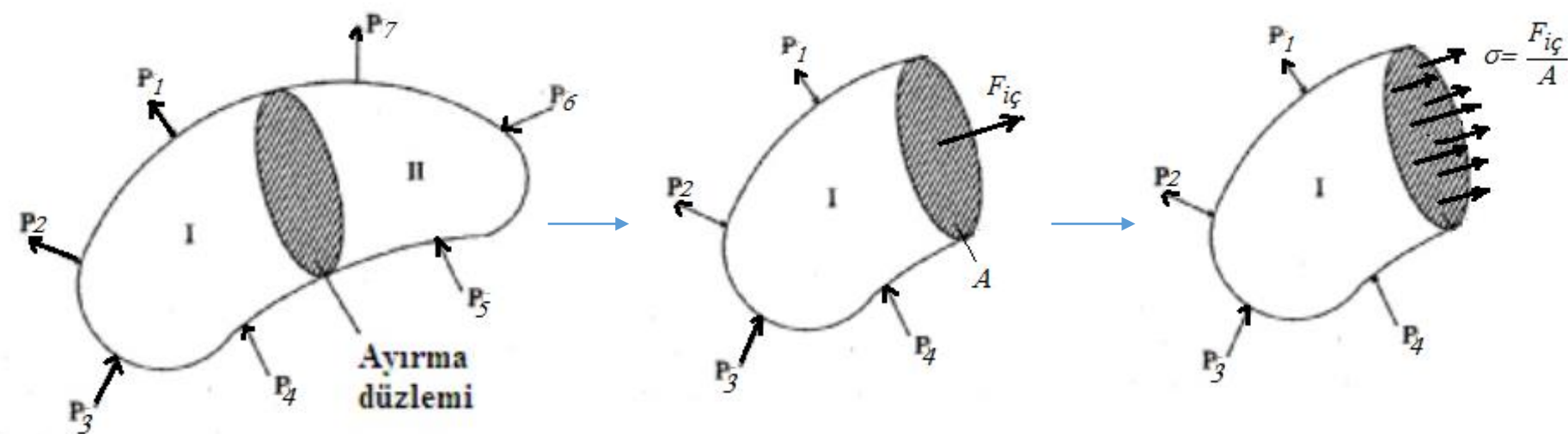
$$\bullet \sum \vec{F} = \sum \vec{M} = 0$$

•İç kuvvet ve iç momentler: Ayırma yüzeyinde ortaya çıkan tepkilerdir. Sistemin o kısımda dış kuvvetlere karşı cevabıdır.

•Gerilme : İç kuvvet ve moment tepkilerinden kaynaklanan birim alana düşen kuvvet olarak tanımlanabilir.

1.6.3. Ayırma Prensibi-Devam:

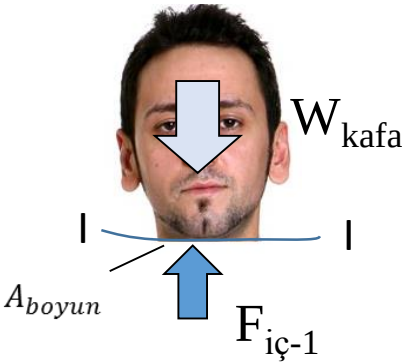
İç Momentin oluşmadığını ($M_{i\zeta}=0$) ve kesitte sadece iç kuvvet ($F_{i\zeta}$) olduğunu düşünürsek, gerilme birim alana düşen iç kuvvet olarak tanımlanabilir.



İç kuvvet ise ayrılan parçanın statik dengesinde bulunur.

1.6.3. Ayırma Prensibi - Örnek

Ayakta bekleyen bir kişinin vücut ağırlığı sebebiyle farklı bölgelerinde oluşan gerilmeleri inceleyiniz. Bölgeler için hayali olarak kesimler yapıldığına, her bir kesimde sadece iç kuvvet oluştuğuna dikkat ediniz.



$$F_{iç-1} = W_{kafa}$$

$$\text{Gerilme : } \sigma_{boyun} = \frac{F_{iç-1}}{A_{boyun}}$$

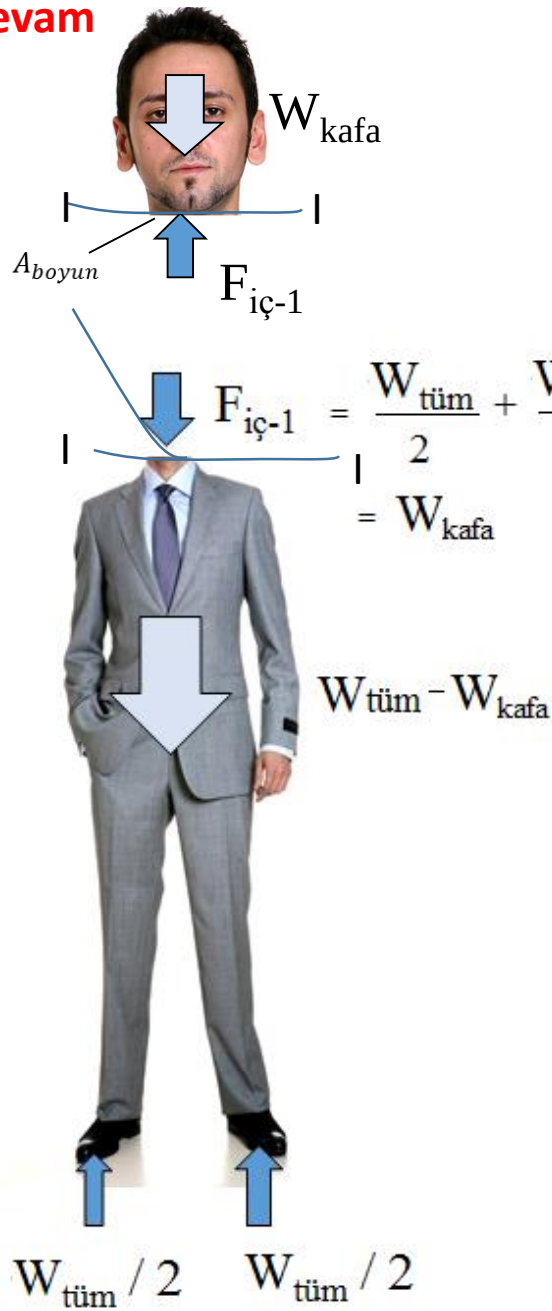


$$F_{iç-2} = W_{gövde+kafa}$$

$$\sigma_{gövde} = \frac{F_{iç-2}}{A_{gövde}}$$

1.6.3. Ayırma Prensibi - Örnek -devam

Kesimin alt veya üst kısmını incelemek sonucu değıştirmez. Her ikisi de aynı sonucu verecektir. Sonuçta iç kuvvet ve gerilme aynı çıkar. Yandaki şekilde I-I kesiminin alt ve üst kısmı için ayrı ayrı çizim yapılmıştır. Dikkatlice inceleyiniz.



$$F_{iç-1} = W_{kafa}$$

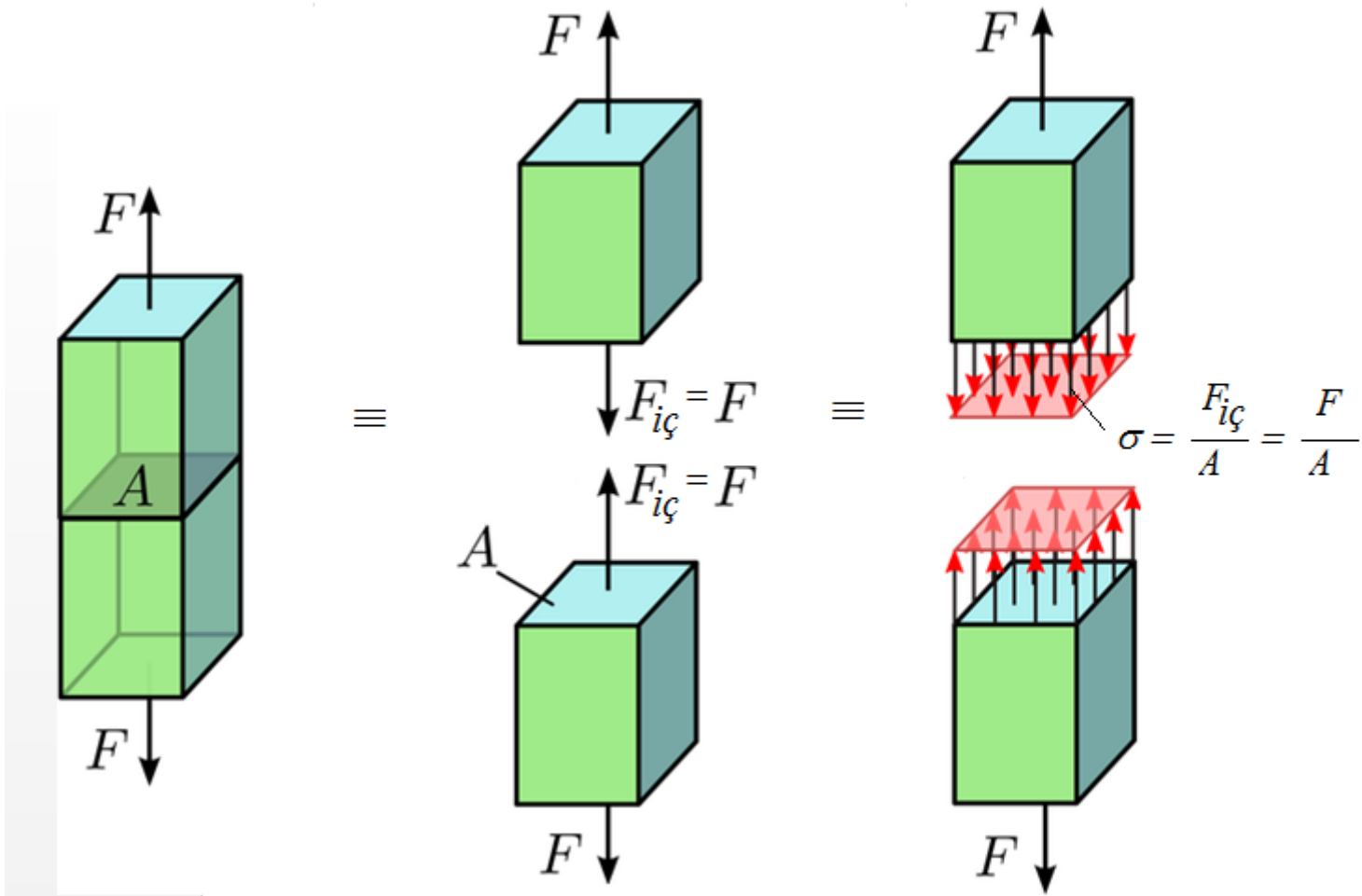
$$\text{Gerilme : } \sigma_{boyun} = \frac{F_{iç-1}}{A_{boyun}}$$

$$F_{iç-1} = \frac{W_{tüm}}{2} + \frac{W_{tüm}}{2} - (W_{tüm} - W_{kafa}) = W_{kafa}$$

$$\text{Gerilme : } \sigma_{boyun} = \frac{F_{iç-1}}{A_{boyun}}$$

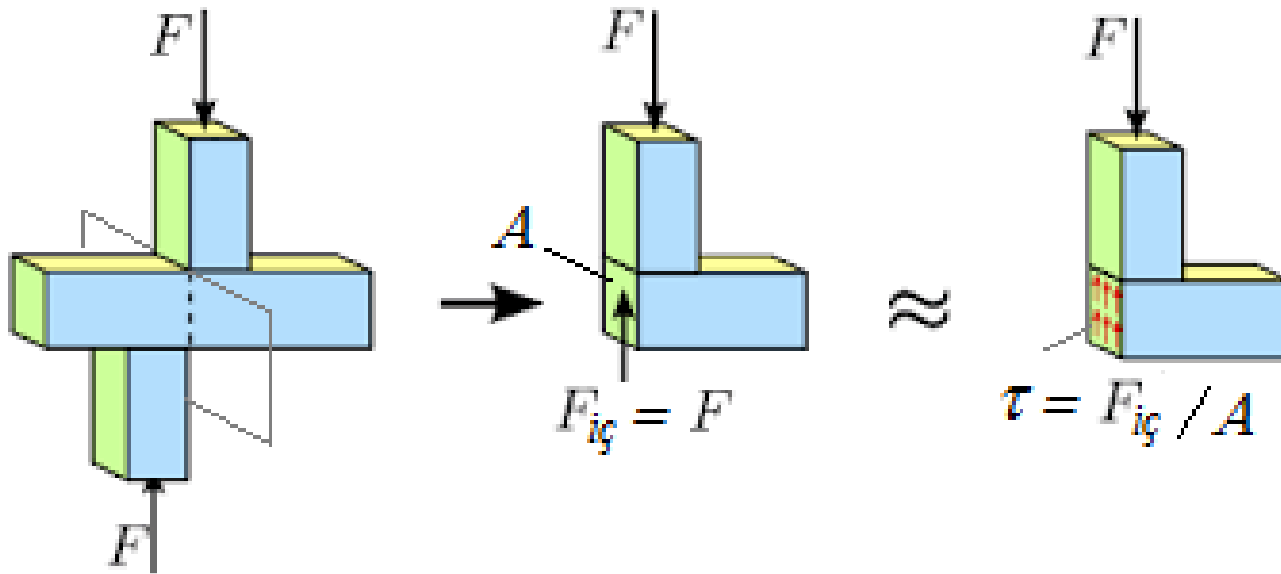
1.6.4 Gerilme Çeşitleri

1.6.4.1 Normal Gerilme: Gerilme düzlem normaline paralel ise; başka bir ifade ile düzleme dik ise buna normal gerilme denir. σ ile gösterilir.



1.6.4 Gerilme Çeşitleri-Devam

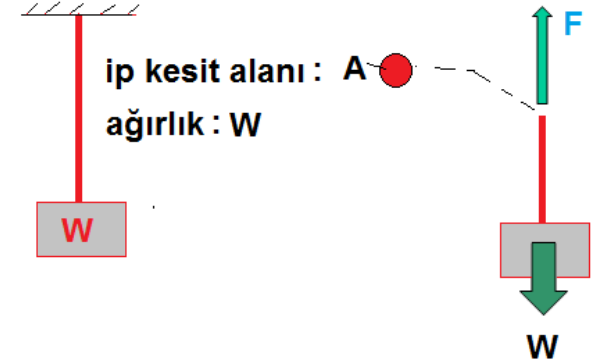
1.6.4.2 Kayma (kesme) Gerilmesi: Gerilme düzlem normaline dik ise; başka bir ifade ile düzleme paralel ise buna kayma gerilmesi veya kesme gerilmesi denir. τ ile gösterilir.



1.6.5 Hasar Gerilmesi

- Şekildeki ipe asılan yükü göz önüne alalım. İpteki kuvvet statik dengeden $F = W$ dir.

A (mm ²)	(İp Malzemesi - 1, gevrek malzeme) F _{kopma} (N)	(İp Malzemesi - 2, gevrek malzeme) F _{kopma} (N)
10	100	50
20	200	100
30	300	150
40	400	200
$\frac{F_{kopma}}{A}$	10 $= \sigma_{kopma-1}$	5 $= \sigma_{kopma-2}$



Tabloda kopma anındaki kuvvet gösterilmiştir. Görüldüğü gibi ipin boyutu (kesit alanı A) ve malzemesi değiştikçe kopma kuvveti değişmektedir.

Soru: Bu tabloya göre değişmeyen bir değer var mıdır?

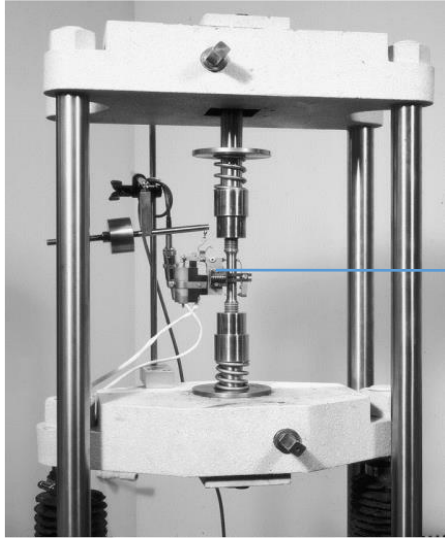
Cevap: Herbir gevrek (kırılgan) malzeme için $\frac{F_{kopma}}{A}$ oranı değişmemektedir.

Bu orana şimdilik malzemenin hasar gerilmesi diyebiliriz. ($\sigma_{hasar} = \frac{F_{kopma}}{A}$)

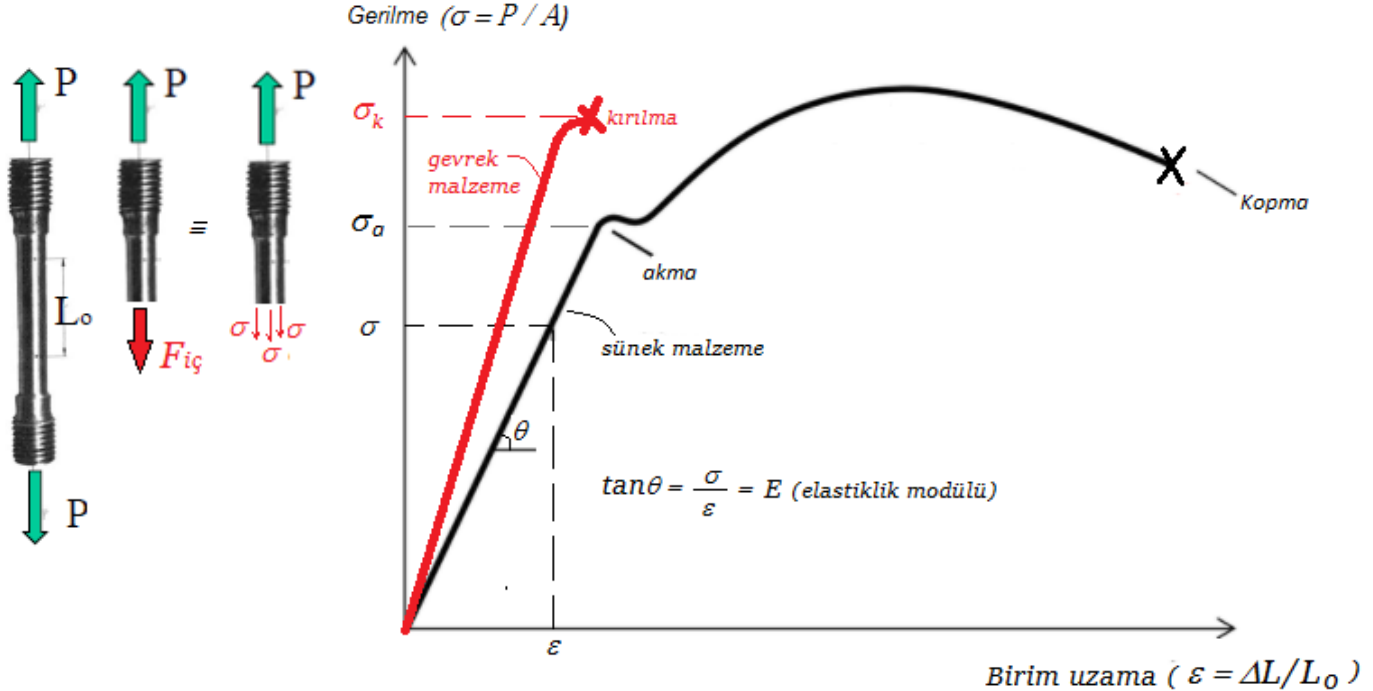
Hasar gerilmesi malzemenin bir özelliği olup, malzeme boyutlarından bağımsızdır. (yoğunluk gibi)

1.6.5 Hasar Gerilmesi-Devam

Malzemenin bir özelliği olan hasar gerilmesi çekme deneyi ile bulunur.



Çekme Test Cihazı



Sünek malzemeler için kalıcı deformasyonun (plastik bölgenin) başladığı an hasar anı olarak değerlendirilmelidir. Zira kalıcı deformasyona maruz kalan bir eleman işlevselliğini yitirecektir. Bu sebeple hasar gerilmesi akma gerilmesi olarak değerlendirilmelidir. $\sigma_{hasar} = \sigma_{akma} = \sigma_a = \frac{F_{akma}}{A}$

Gevrek malzemelerde ise kalıcı şekil değiştirme ihmal edilecek kadar azdır. Hasar gerilmesi kopma veya kırılma anındaki gerilmedir. $\sigma_{hasar} = \sigma_{kırılma} = \sigma_k$

Not: Sünek malzemelerin çeki ve basıdaki akma mukavemetleri (gerilmeleri) aynıdır. Gevrek malzemelerde ise bası mukavemeti çeki mukavemetinden daha fazladır. (3-4 katı olabilir.)

1.6.5 Hasar Gerilmesi-Devam

1.6.5.1Hasar Şartı

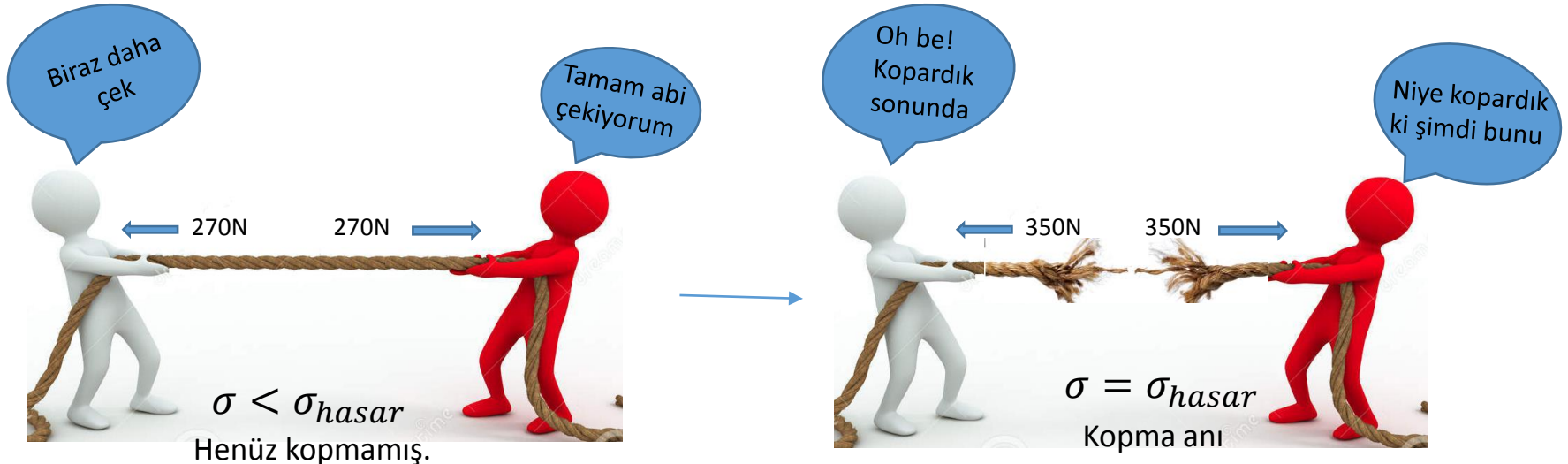
Çeki yüklemesine maruz bir malzeme de bir gerilme oluşur. Kuvvet arttırıldığında bu gerilme artar. Kuvvet iyice arttırılırsa gerilme hasar gerilmesine ulaşır ve malzeme de hasar oluşur. O halde genel anlamda hasar şartı;

$$\sigma \geq \sigma_{hasar}$$

Sünek malzemeler için bu şart: $\sigma \geq \sigma_{akma}$ **şekline dönüşür.**

Gevrek malzemeler için ise $\sigma \geq \sigma_{kırılma}$

Mukavemet kontrolü için, incelenen durumdaki gerilme (σ) hesaplanır, σ_{hasar} ile karşılaştırılır.



1.6.5 Hasar Gerilmesi-Devam

1.6.5.2 Hasar Şartı- Kesme (Kayma) Durumu için

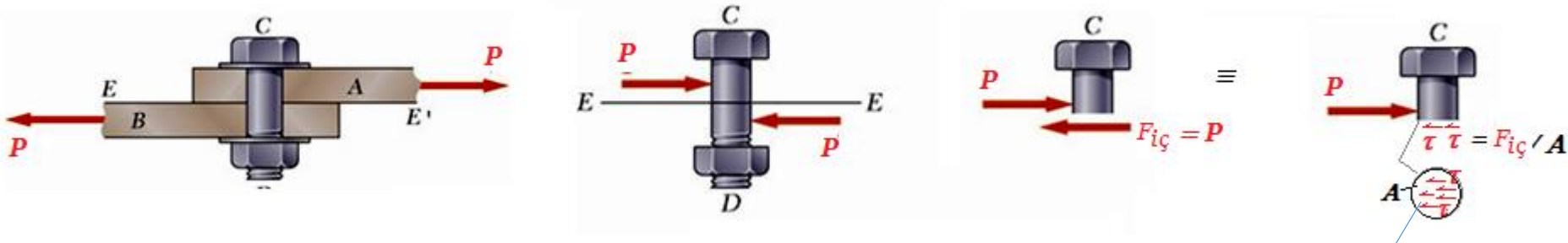
Malzemelerin çeki veya bası dayanımları ile kesme dayanımı farklıdır. Bu sebeple, kesme gerilmesinin söz konusu olduğu yüklemelerde kesme dayanımı (τ_{hasar}) göz önüne alınmalıdır. Kesme gerilmesi sebebiyle hasar şartı;

$$\tau \geq \tau_{hasar}$$

Sünek malzemeler için genel olarak $\tau_{hasar} = \tau_{akma} = \frac{\sigma_{akma}}{2}$

Gevrek malzemeler için $\tau_{hasar} = \tau_{kırılma}$

Bir örnek : iki levhayı bağlayan çelik cıvata (sünek) için τ hesabı ve hasar kontrolü:



$\tau \geq \tau_{akma}$ ise akma oluşur

1.6.5 Hasar Gerilmesi - Devam

1.6.5.3 Bir uygulama:

- Bir ilan panosuna iğneyi rahatça batırabilir ve delebiliriz. Fakat aynı kuvvetle bir tahta kalemle niçin aynı panoyu delemeyiz?
- Cevap: İğnenin batan uç alanı ($A_{iğne}$) çok küçük olduğundan küçük bir kuvvetle büyük gerilme oluşturup pano malzemesinin kopma gerilmesine ulaşırız ve panoyu deleriz.

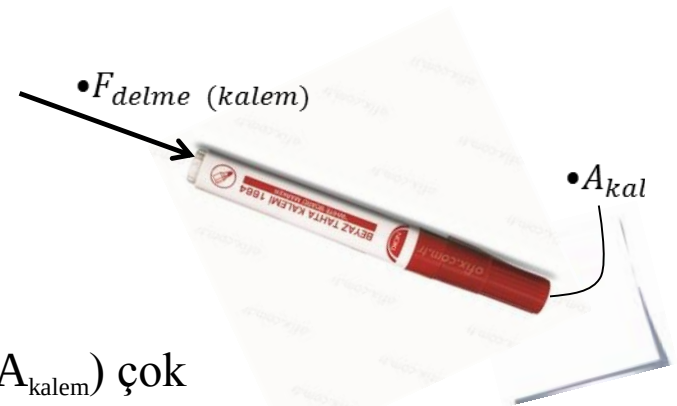
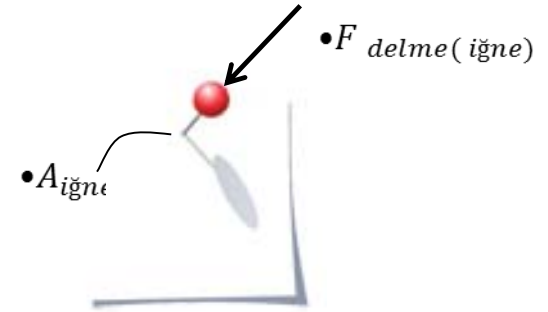
$$\sigma_{kopma-pano} = \frac{F_{delme(iğne)}}{A_{iğne}}$$

Oysa tahta kaleminin batırmaya çalıştığımız uç alanı (A_{kalem}) çok daha büyüktür. Bu nedenle panonun kopma gerilmesine ulaşabilmek için çok büyük kuvvet gerekir. Bu sebeple kalemle panoyu delmek çok daha zordur.

$$\sigma_{kopma-pano} = \frac{F_{delme(kalem)}}{A_{kalem}}$$

$A_{iğne} \ll A_{kalem}$ olduğundan

$F_{delme(iğne)} \ll F_{delme(kalem)}$



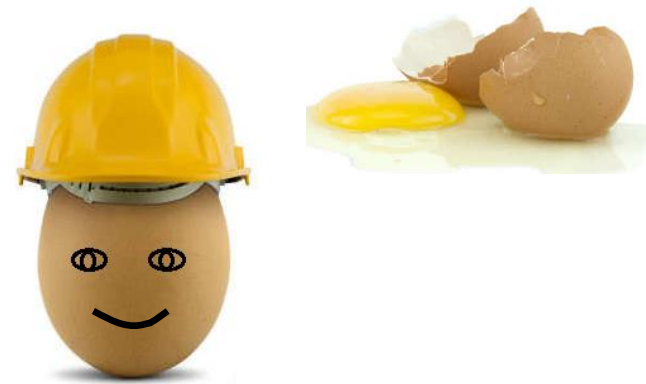
1.6.6 Emniyet katsayısı ve emniyet gerilmesi

(Factor of safety and allowable stress)

- Bir mekanizmanın, yapının veya makinanın belli bir emniyet katsayısına sahip olması istenir.
- Yani sistem taşıyabileceği yükün 2 veya 3 katı yük taşıyabilecek şekilde tasarlanabilir.
- Özellikle can güvenliğinin önemli olduğu asansör gibi mekanizmalarda bu katsayının daha fazla olması istenir.
- İşte bu durumda mukavemet hesaplamaları hasar (akma veya kırılma) gerilmesine göre değil de emniyet gerilmesine göre yapılır.
- Yapıda oluşacak maksimum gerilme emniyet gerilmesini aşmayacak şekilde boyutlar hesaplanır veya malzeme seçimi yapılır.

$$\text{Emniyet katsayısı : } n = \frac{\text{hasar gerilmesi}}{\text{emniyet gerilmesi}} = \frac{\sigma_{\text{hasar}}}{\sigma_{\text{emniyet}}}$$

$$\text{Emniyet şartı : } \sigma < \sigma_{\text{emniyet}} \text{ veya } \tau < \tau_{\text{emniyet}}$$



Emniyet Katsayısı Kullanma Sebepleri:

- Malzeme özelliklerindeki belirsizlikler ve değişkenlikler
- Yüklemelelerdeki belirsizlikler ve değişkenlikler
- Analizlerdeki hatalar (yanılmalar) ve belirsizlikler
- Tekrarlı yükleme durumları
- Hasar tipleri
- Malzeme üzerindeki bozucu etkiler ve onarım gereklilikleri
- Can ve mal güvenliği/emniyeti
- Makinenin fonksiyonelliği

1.7 Mukavemet Hesaplamalarında Genel Yol Haritası

1-) Denge halindeki bir cisim veya sistemde önce statik hesaplamalarla bilinmeyen kuvvetler bulunur.

2-) Cisimdeki maksimum gerilme hesaplanır. *(Hesaplama şekli ve formülleri yükleme şekline göre ve bazen geometriye göre değişir.)*

3-) Maksimum gerilme sünek malzemenin akma, gevrek malzeme ise kopma (kırılma) gerilmesine eşitlenir. Bu eşitlikten,

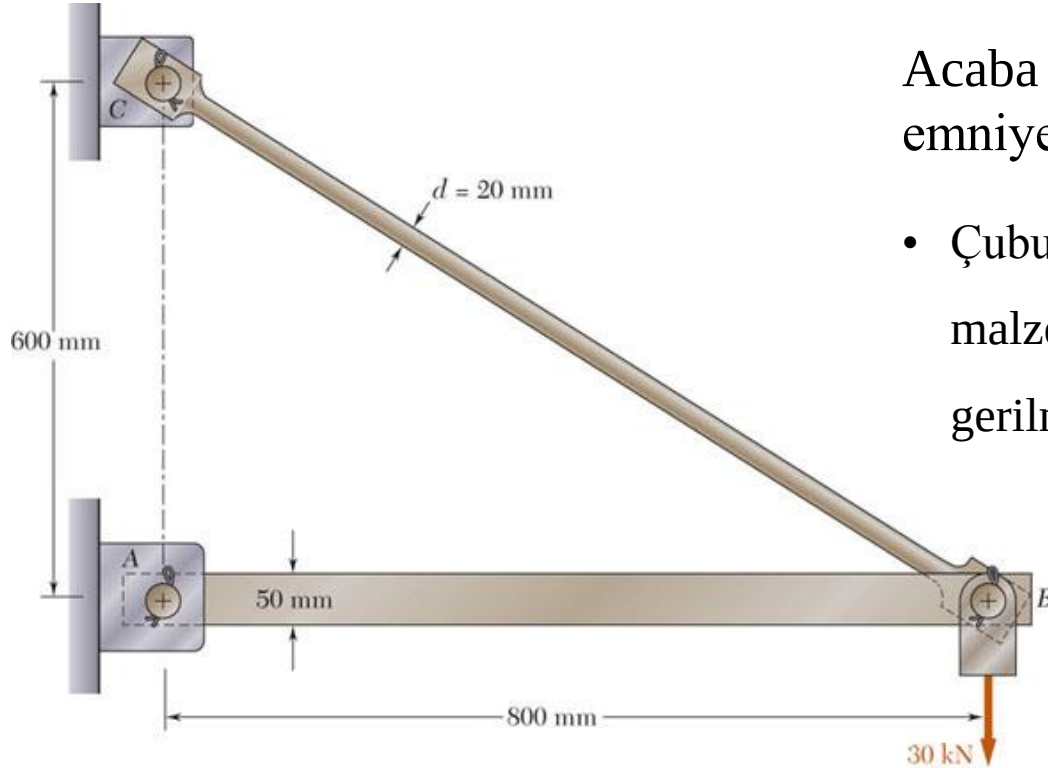
a-) minimum boyut hesabı (kuvvet + malzeme belli ise) veya

b-) malzeme seçimi (kuvvet + boyutlar belli ise) veya

c-) Mukavemet (Dayanım) kontrolü (kuvvet + boyutlar + malzeme cinsi belli ise) yapılır.

Bu genel yol haritasıdır. Bazı problemlerde, cisme uygulanabilecek maksimum kuvvet sorulabilir. Veya gerilmelerin yanısıra şekil değiştirmeler hesaplanabilir. Emniyet katsayısı verilebilir. İleride görülecek örnek problemlerle bunlar zihninizde daha belirginleşecektir.

Örnek 1.1



Şekildeki yapıyı göz önüne alalım:

Acaba bu çubuklar, 30kN luk kuvveti emniyet sınırları içinde taşıyabilir mi?

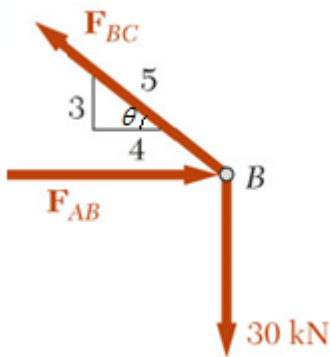
- Çubuklar aynı cins çelikten olup, malzemenin emniyet açısından izin verilebilir gerilme (emniyet gerilmesi):

$$\sigma_{\text{emniyet}} = 165 \text{ MPa}$$

- BC çubuğu $d=20\text{mm}$ çapında dairesel kesite, AB çubuğu ise $50\text{mm} \times 50\text{mm}$ lik kare kesite sahiptir.
- Hesaplamalarda pim deliklerini ihmal ediniz.

Çözüm:

1.Adım : Statik hesapları



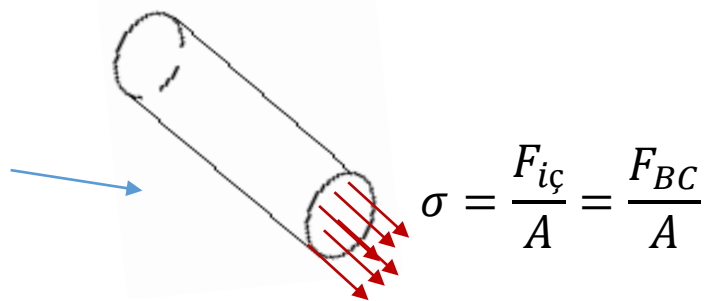
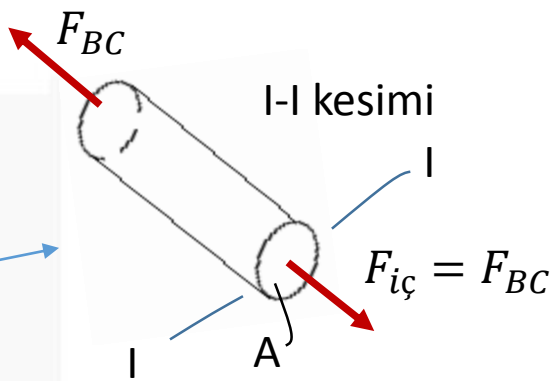
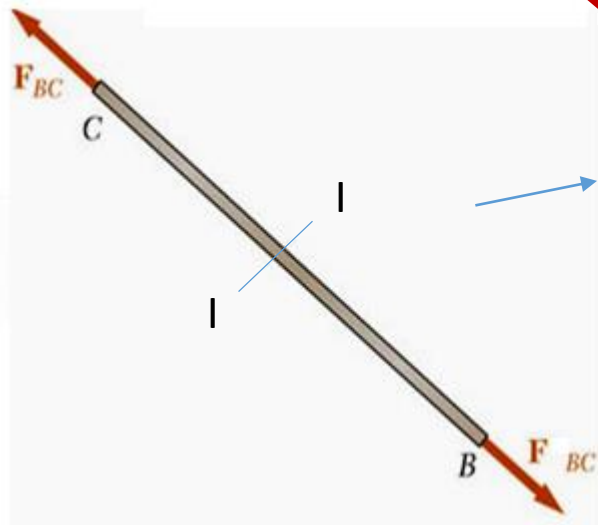
Bu sistemi bir kafes sistem olarak düşünebiliriz. B düğüm noktasının dengesinden çubuk kuvvetlerini bulabiliriz.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow F_{AB} - F_{BC} \cdot \left(\frac{4}{5} \right) = 0 \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow -30 + F_{BC} \cdot \left(\frac{3}{5} \right) = 0 \end{aligned}$$

$\cos\theta$ $\sin\theta$

$F_{AB} = 40\text{kN}$
 $F_{BC} = 50\text{kN}$

2.Adım: Gerilme Hesabı



$$\sigma = \frac{F_{BC}}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{\frac{\pi \cdot 20^4}{4} \text{ mm}^2} = 159 \text{ MPa}$$

$\sigma_{emniyet} = 165 \text{ MPa}$ **idi.**

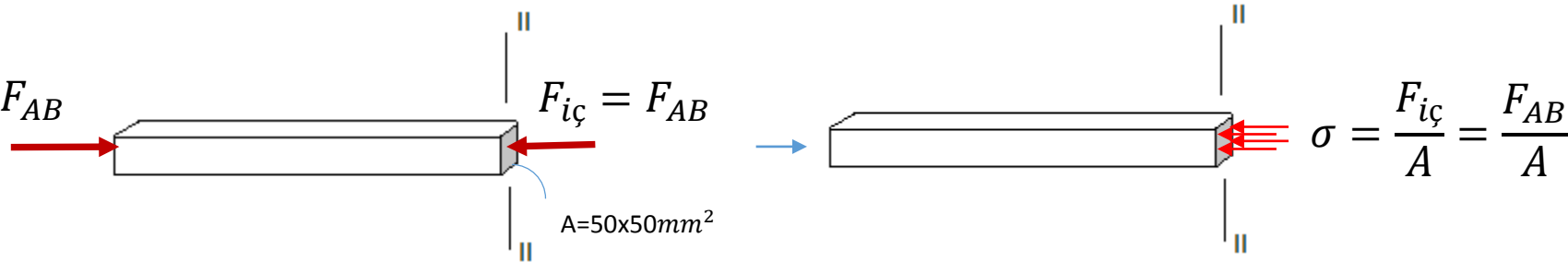
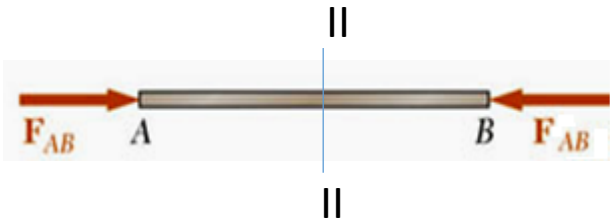
3-c) Mukavemet Kontrolü

$\sigma < \sigma_{emniyet}$
Bu çubuk emniyetlidir.

Çözüm - devam:

AB çubuğu için

2-Gerilme Hesabı



$$\sigma = \frac{F_{AB}}{A} = \frac{40 \times 10^3 \text{ N}}{50 \times 50 \text{ mm}^2} = 16 \text{ MPa}$$

$\sigma_{emniyet} = 165 \text{ MPa}$ idi.

3-c) Mukavemet Kontrolü

$$\sigma < \sigma_{emniyet}$$

$$16 < 165$$

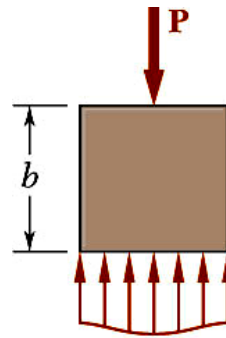
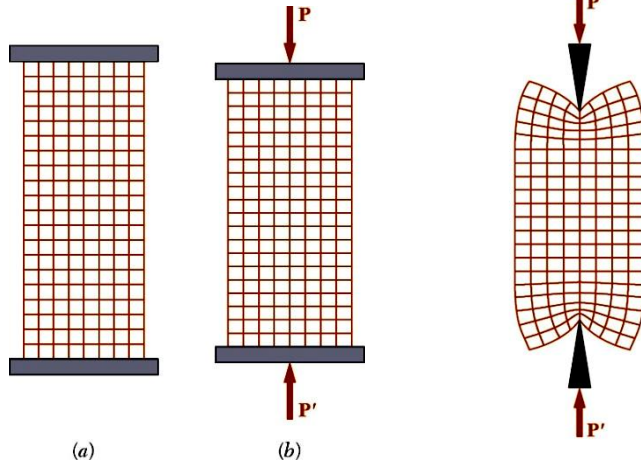
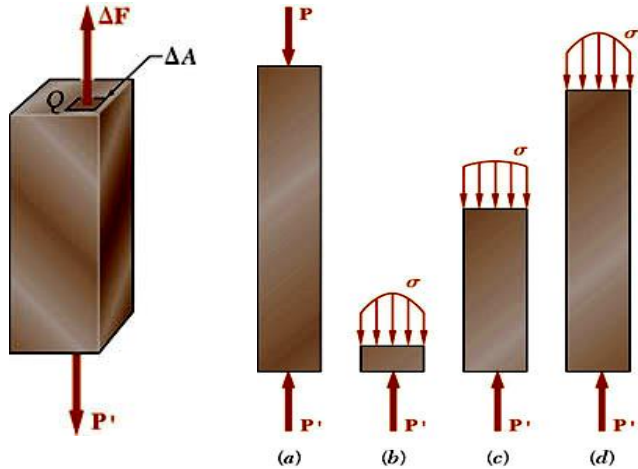
Bu çubuk da emniyetlidir.

1.8. Bilgi: Saint-Venant Prensibi

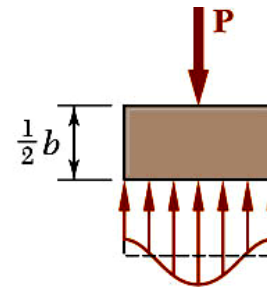
Bir kesite etkiyen bileşke iç kuvvet yüzeye dik ise ortalama normal gerilme;

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \text{şeklinde ifade edilir.}$$

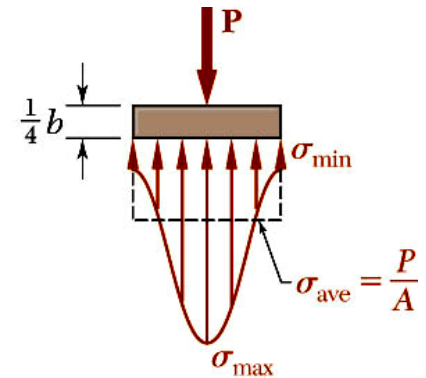
- Ancak tekil yükten (P kuvvetinden) belli bir uzaklıktan sonra kesitin tüm noktalarındaki gerilme değerleri birbirine yaklaşır. Yüke yaklaştıkça kesitte noktadan noktaya gerilmeler arasındaki fark büyür.



$$\begin{aligned} \sigma_{\min} &= 0.973\sigma_{\text{ave}} \\ \sigma_{\max} &= 1.027\sigma_{\text{ave}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sigma_{\min} &= 0.668\sigma_{\text{ave}} \\ \sigma_{\max} &= 1.387\sigma_{\text{ave}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sigma_{\min} &= 0.198\sigma_{\text{ave}} \\ \sigma_{\max} &= 2.575\sigma_{\text{ave}} \end{aligned}$$

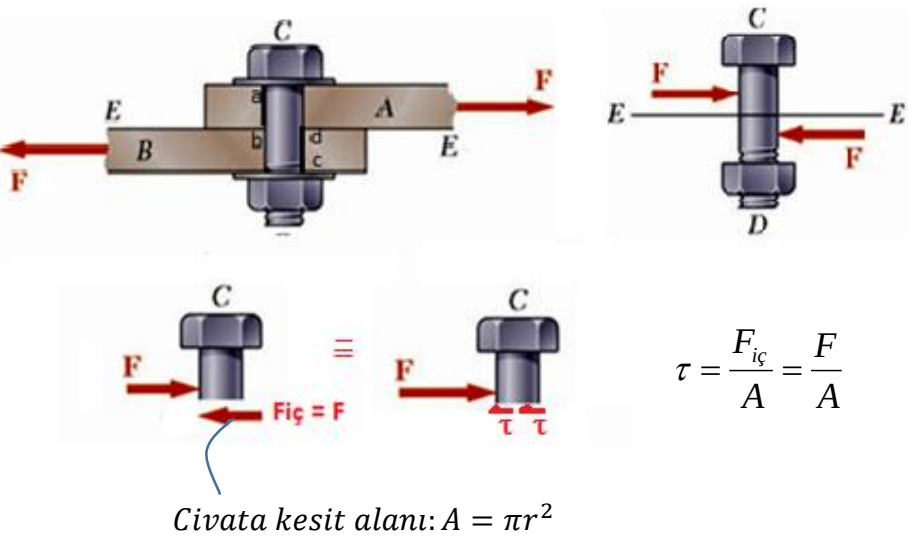
Sonuç olarak tekil bir kuvvetten dolayı meydana gelen gerilmeler uygulama noktasından yeterince uzak kesitlerde uniform hale gelir. Bununla birlikte ileride çözeceğimiz problemlerde bu ilkenin çözümlere etkisi ihmal edilecektir. Bilgi amaçlı bu prensibe burada değinilmiştir.

1.9 Bağlantı Elemanlarında (Pimlerde, Cıvatalarda, Perçinlerde vb.) ortaya çıkan gerilmeler:

1.9.1 Kesme (Kayma) Gerilmeleri

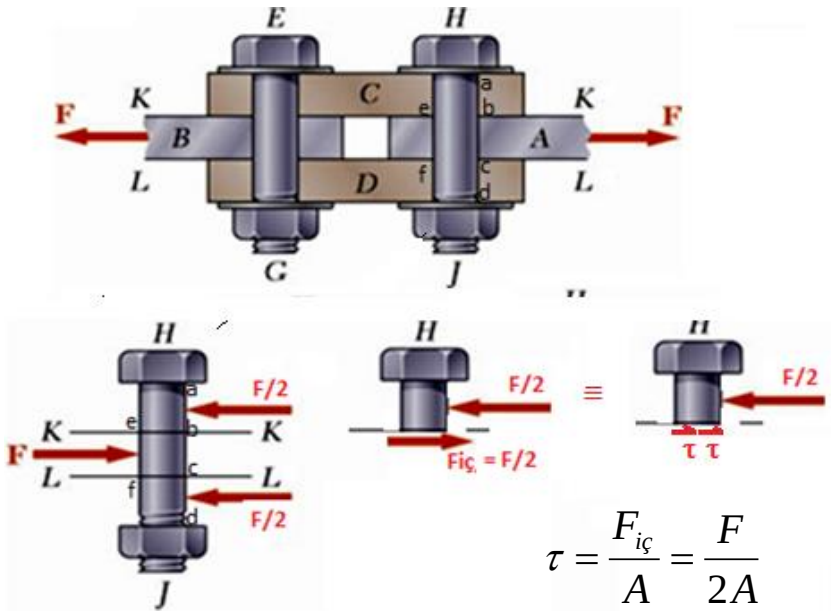
Levhaları veya çubukları birbirlerine bağlayan pim, cıvata, perçin gibi bağlantı elemanlarındaki gerilmeler, kayma (kesme) gerilmeleridir. Şiddetleri bağlantı yüzeyi sayısına göre hesaplanır.

Tek Kesme Yüzeyi (Single Shear)



Üstteki levhada sağa doğru olan F kuvvetini a-b çizgisinin bulunduğu yarı silindirik yüzeydeki tepki dengeler. Altta F kuvvetini ise c-d çizgisinin olduğu yarı silindirik yüzey dengeleyecektir.

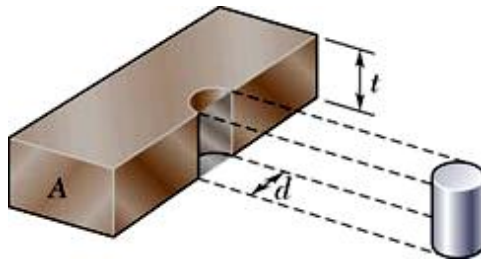
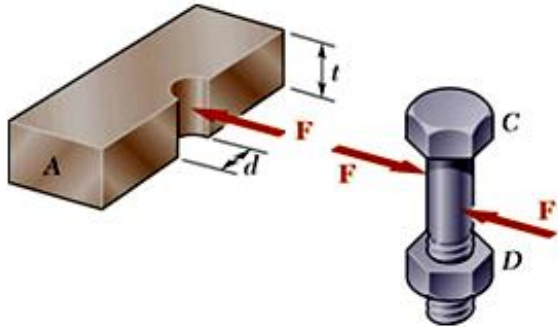
Çift Kesme Yüzeyi (Double Shear)



A levhasına gelen F kuvveti sağdaki cıvatanın e-f kısmından (yarı silindirik alan) ve cıvatayı aynı yönde çeker. e-f kısmından cıvataya gelen F kuvveti üst levhanın a-b kısmından, alt levhanın c-d kısmından dengelenecektir.

1.9.2 Yatak Gerilmeleri (Bearing Stresses)

Tek kesme için

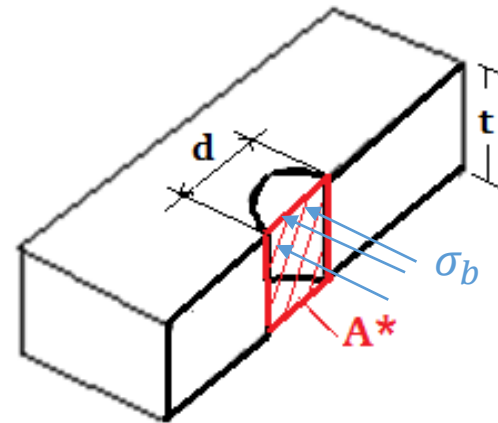


- Cıvata, pim, perçin gibi bağlantı elemanlarının geçtiği deliklerin iç yarı silindirik yüzeylerinde bir tepki kuvveti oluşur. (Bir önceki sayfada a-b veya d-c veya e-f kısımlarına gelen kuvvetler)
- Ancak bu kuvvet yüzeye homojen dağılmaz. Orta kısımlarda daha fazladır, yanlara doğru ise azalır.
- Bu kuvvetten dolayı deliğin yarı silindirik iç yüzeyinde normal gerilme oluşur. Bu normal gerilmenin ortalama değeri kuvvetin, izdüşüm alanına ($t \times d$) bölünmesi ile elde edilir.

t : levha veya çubuk kalınlığı, d : pim çapı

- *Bu ortalama gerilmeye yatak gerilmesi denir.*

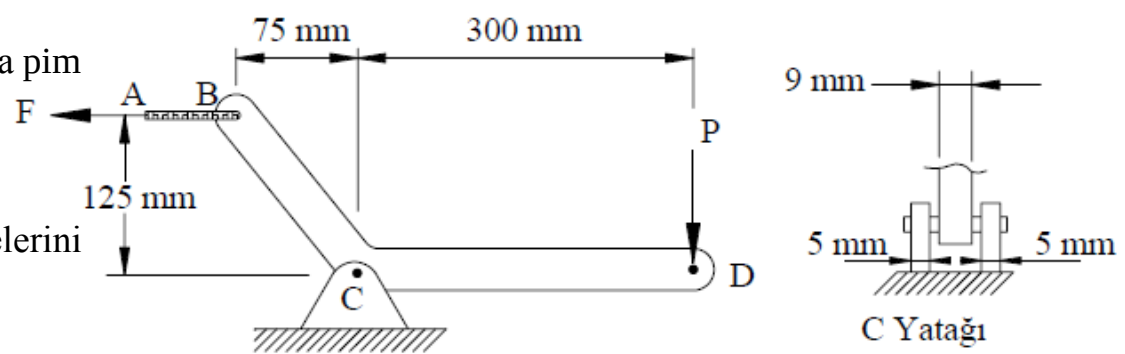
$$\sigma_{\text{yatak}} = \sigma_b = \frac{F}{A^*} = \frac{F}{t d}$$



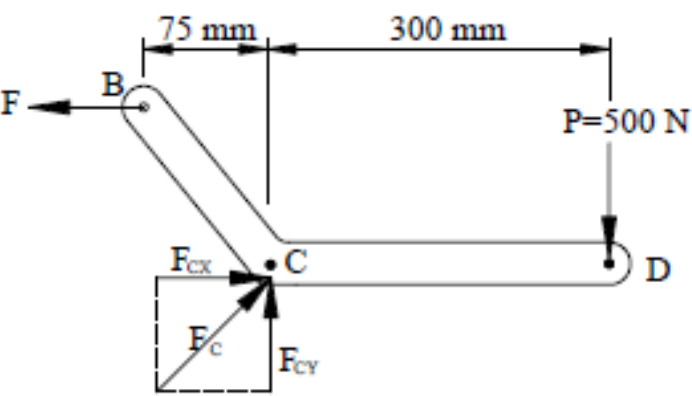
Örnek 1.2

Şekildeki pedalın C bağlantısında 6mm çapında pim kullanılmıştır. $P= 500N$ olduğuna göre;

- a) C Pimindeki ortalama kayma gerilmesini,
- b) C piminin geçtiği deliklerdeki yatak gerilmelerini hesaplayınız.



Çözüm: Statik Dengeden



$$\sum M_C = 0 \rightarrow -P.300 + F.125 = 0$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{Cx} - F = 0 \rightarrow F_{Cx} = F = 1200N$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{Cy} - P = 0 \rightarrow F_{Cy} = P = 500N$$

$$F = \frac{P.300}{125} = \frac{500.300}{125} \rightarrow F = 1200N$$

$$F = \sqrt{(F_{Cx})^2 + (F_{Cy})^2} = \sqrt{(1200)^2 + (500)^2} = 1300N \rightarrow F_C = 1300N$$

a-) c pimi çift kesmeye maruzdur. Çünkü 2 tane delikten geçirilip 2 yatakla dengelenmiştir.

I-I kesimi

$$\tau_c = \frac{F_{iç}}{A} = \frac{F_c}{2A} = \frac{F_c}{2 \cdot \frac{\pi \cdot d_c^2}{4}} = \frac{1300}{2 \cdot \frac{\pi \cdot 6^2}{4}} \rightarrow \tau_c = 22.99 MPa$$

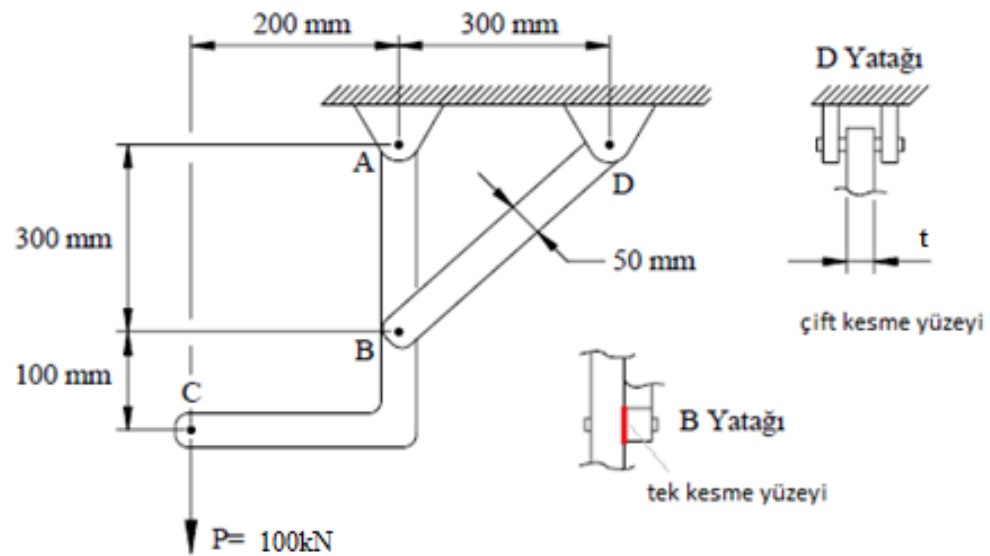
b-) c piminin geçtiği yataklardan soldakini incelersek yeterli olur.

$$\sigma_{yatak} = \sigma_b = \frac{F_c / 2}{A^*} = \frac{F_c}{2 \cdot t \cdot d_c} = \frac{1300}{2 \cdot 5 \cdot 6} \rightarrow \sigma_b = 21.67 MPa$$

Örnek 1.3. Şekildeki çerçeve sisteminin, P=100kN luk kuvveti emniyet sınırları içinde taşıyabilmesi için

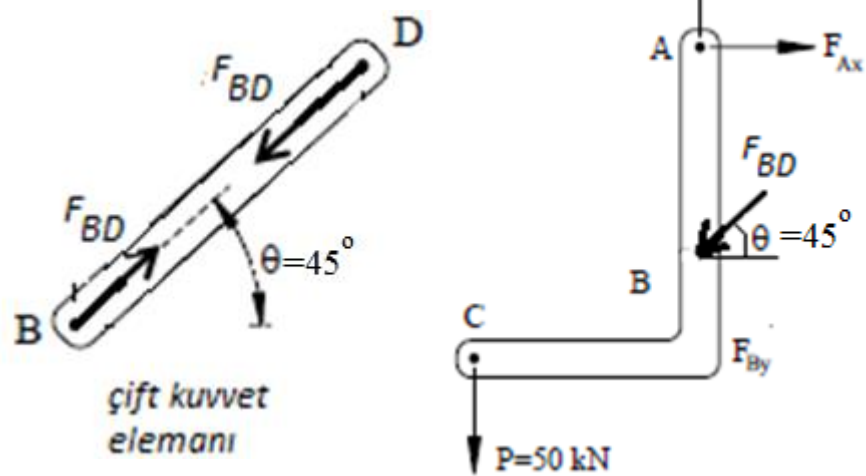
a-) B ve D pimlerinin minimum çap değerlerini bulunuz. (Pimlerin çapını tam sayıya öteleyiniz.)

b-) BD çubuğunun minimum kalınlığını hesaplayınız. Emniyet katsayısı n=2 alınız. Pimlerin akma gerilmesi $\tau_{ak} = 200\text{MPa}$, BD çubuğunun akma gerilmesi $\sigma_{ak} = 400\text{MPa}$



Çözüm:

Statik hesapları:

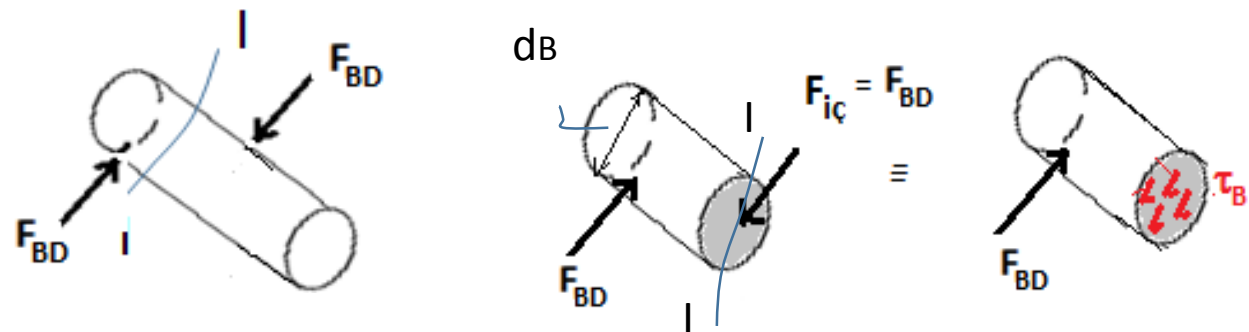


$$M_A = 0 \rightarrow F_{BD} \cdot \cos 45 \cdot 300 - 100 \cdot 200 = 0$$

$$\rightarrow F_{BD} = 94.28\text{ kN}$$

a-) Pimlerin emniyet gerilmesi : $\tau_{em} = \frac{\tau_{ak}}{2} = \frac{200}{2} = 100\text{MPa}$

B piminin emniyetli çap değeri. B pimi tek kesmeye maruzdur.



$$\tau_B = \frac{F_{iç}}{A_B} = \frac{F_{BD}}{A_B} = \frac{94.28 \times 10^3}{\frac{\pi d_B^2}{4}} = \frac{120 \times 10^3}{d_B^2}$$

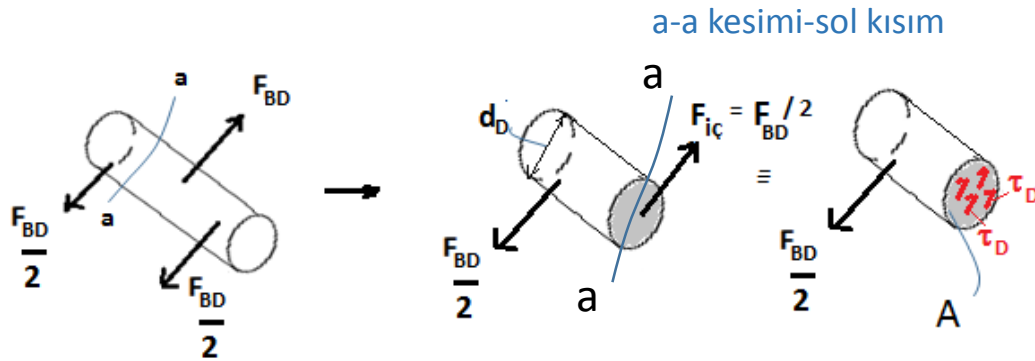
Emniyet şartı : $\tau_B \leq \tau_{em} \rightarrow \frac{120 \times 10^3}{d_B^2} \leq 100 \rightarrow d_B^2 \geq 1200 \rightarrow d_B \geq 34.64\text{mm}$

$$d_{B-\text{minimum}} = d_{B-\text{emniyet}} = 34.64\text{mm}$$

Bu değere en yakın minimum tam sayı 35mm olduğundan $d_B = 35\text{ mm}$ alınır.

Piyasada 34.64 mm lik pim bulamayız ancak 35 mm lik bulabiliriz. Pimi kendimiz üretseydik 34.64 mm lik üretebilirdik. Ancak bu kadar küçük bir fark için imalat masrafına girmeye değmez.

D Piminin emniyeti: D pimi çift kesmeye maruzdur.



$$\tau_D = \frac{F_{iç}}{A_D} = \frac{F_{BD}/2}{A_D} = \frac{(94.28 \times 10^3)/2}{\frac{\pi d_D^2}{4}} = \frac{60 \times 10^3}{d_D^2}$$

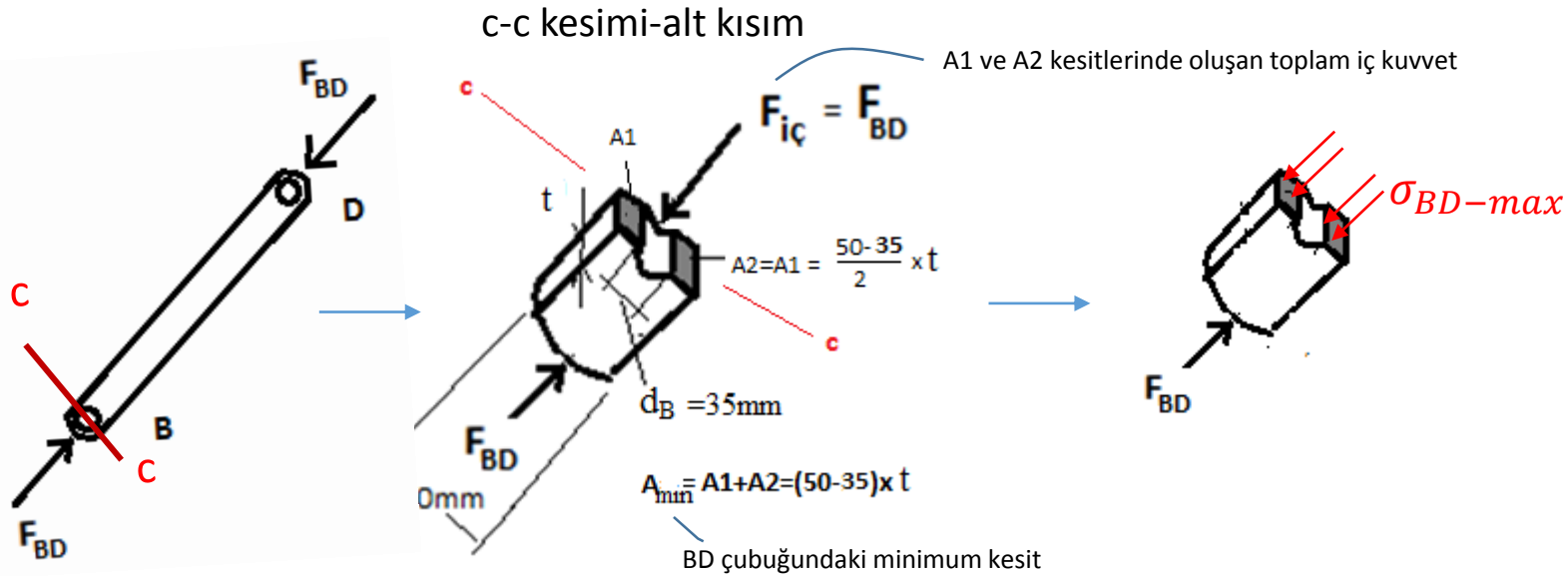
$$\text{Emniyet şartı : } \tau_D \leq \tau_{em} \rightarrow \frac{60 \times 10^3}{d_D^2} \leq 100 \rightarrow d_D^2 \geq 600 \rightarrow d_D \geq 24.5 \text{ mm}$$

$$d_{D-\text{minimum}} = d_{D-\text{emniyet}} = 24.5 \text{ mm}$$

Bu değere en yakın minimum tam sayı 25mm olduğundan $d_D = 25 \text{ mm}$ alınır.

b-) BD çubuğunun emniyeti $\sigma_{em} = \frac{\sigma_{ak}}{2} = \frac{400}{2} = 200\text{MPa}$

BD çubuğunun en dar kesiti daha büyük çaplı B piminin geçtiği deliktir. Maksimum gerilme bu minimum kesitte ortaya çıkar. D pimi daha küçük çaplı olduğu için o kısımdaki kesit daha büyük olur.



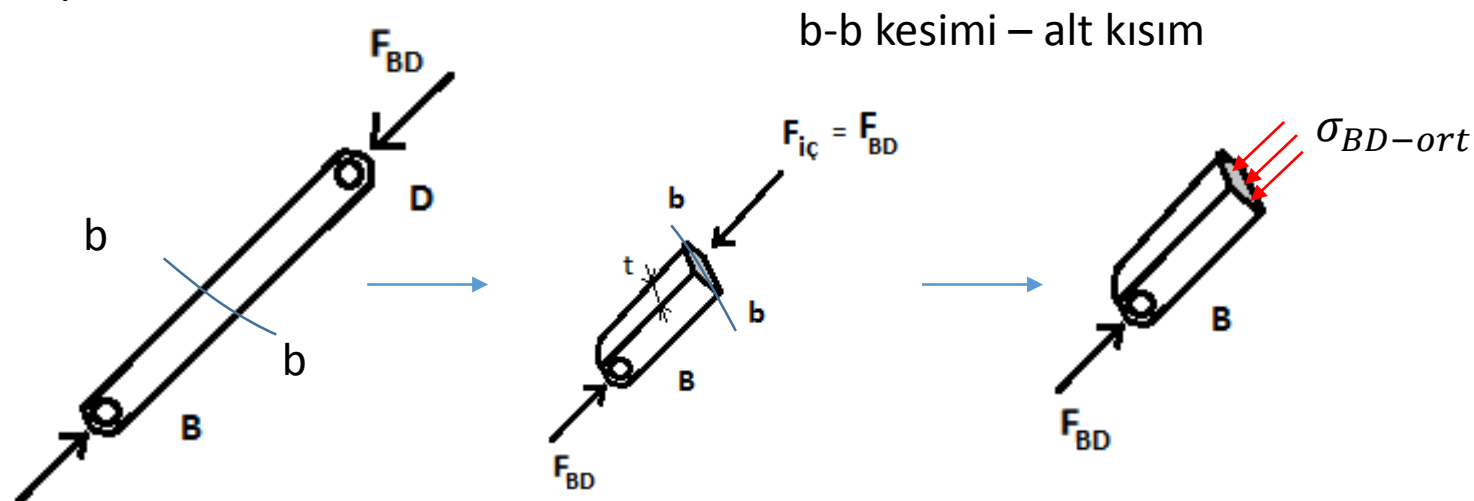
$$\sigma_{BD-max} = \frac{F_{iç}}{A_{min.}} = \frac{94.28 \times 10^3}{(50 - 35) \times t} = \frac{62385,3}{t}$$

Emniyet şartı : $\sigma_{BD-max} \leq \sigma_{em} \rightarrow \frac{6285,3}{t} \leq 200 \rightarrow t \geq 31,42\text{mm}$

$t_{minimum} = t_{emniyet} = 31,42\text{mm}$

Çubuğu kendimiz imal edeceğimiz için tam sayıya yuvarlamaya illa gerek yoktur.

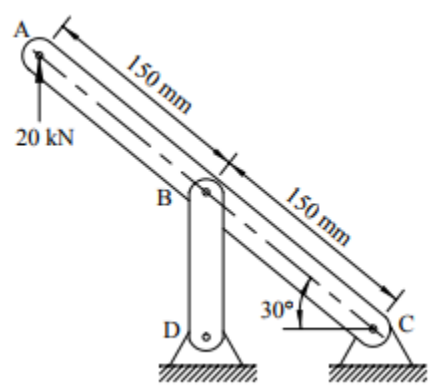
Pim deliklerini ihmal etseydik: BD çubuğunun dolu orta kesitinden bir kesim (b-b kesimi) almalıydık. Bu durumda ;



$$\sigma_{BD-ort} = \frac{F_{iç}}{A_{ort}} = \frac{F_{BD}}{A_{ort}} = \frac{94.28 \times 10^3}{50xt} = \frac{1885,6}{t}$$

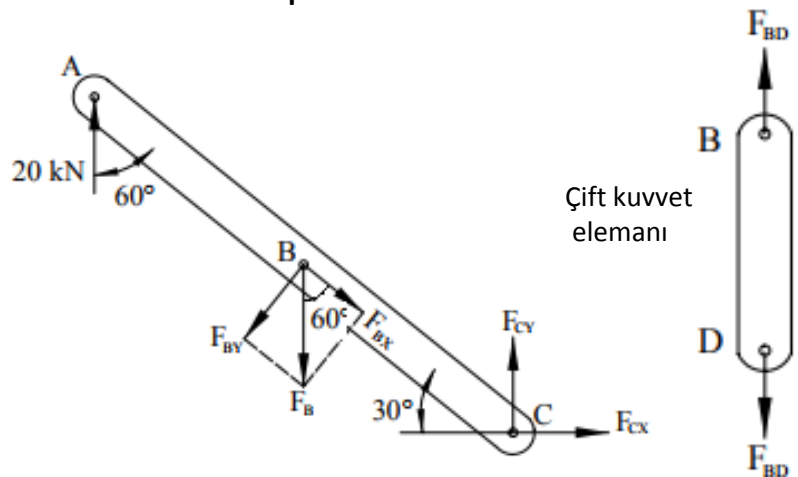
Emniyet şartı : $\sigma_{BD-ort} \leq \sigma_{em} \rightarrow \frac{1885,6}{t} \leq 200 \rightarrow t \geq 9,42mm$

Görüldüğü gibi pim deliklerini ihmal ettiğimizde kalınlığı yaklaşık 3 katı daha düşük değerde buluyoruz. Emniyet katsayısı $n=2$ alındığı için $t=9.42$ mm alırsak çok önemli bir hesap hatası yapmış oluruz ve muhtemelen çubuk yüke dayanamayacaktır.



Örnek 1.4 BD bağlantısında 40 mm genişliğinde ve 12 mm kalınlığında çelik çubuk kullanılmıştır. Her bir pimın çapı 10 mm olup pimler tek taraflı kesmeye maruzdur. Tüm pim ve çubuklar aynı malzemeden imal edilmiş olup akma mukavemetleri $\sigma_{ak} = 300\text{MPa}$, $\tau_{ak} = 150\text{ MPa}$ olarak bilinmektedir.. Buna göre; BD çubuğundaki, pimlerideki ve D yatağındaki maksimum gerilmeleri kullanarak bu elemanların mukavemet kontrollerini yapınız.

Statik hesapları:



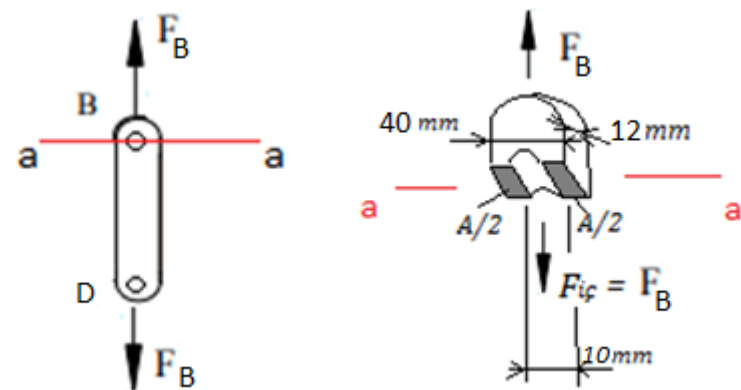
$\sum M_C = 0 \rightarrow -F_{BY} \cdot 150 + 20 \cdot (300 \cdot \sin 60) = 0$

$F_{BY} = \frac{20 \cdot 300 \cdot \sin 60}{150} = 34,64\text{ kN}$

$\tan 30 = \frac{F_{BX}}{F_{BY}} \rightarrow F_{BX} = F_{BY} \cdot \tan 30 = 34,64 \cdot \tan 30 = 19,99\text{ kN}$

$F_B = \sqrt{(F_{BX})^2 + (F_{BY})^2} = \sqrt{(19,99)^2 + (34,64)^2} = 40\text{ kN} \rightarrow F_B = 40\text{ kN}$

BD çubuğu:



$$(\sigma_{maks.})_{BD} = \frac{F_B}{A} = \frac{40000}{(40-10).12} = 111,11 MPa \quad \rightarrow (\sigma_{maks.})_{BD} = 111,11 MPa$$

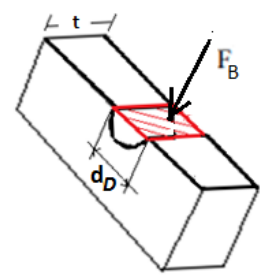
111.11 < 300 $\rightarrow$ BD çubuğu bu yüke dayanır.

D veya B pimi :

$$\tau_D = \frac{F_B}{\pi r^2} = \frac{40000}{\pi .5^2} = 509,28 MPa \quad \rightarrow \tau_D = 509,28 MPa$$

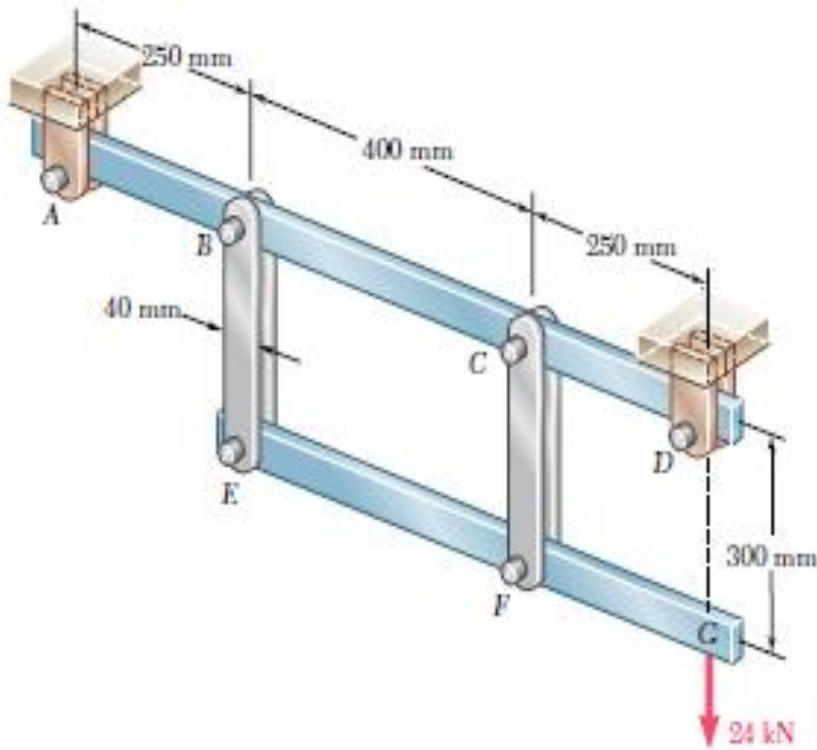
509.28 > 150 $\rightarrow$ B ve D pimleri bu yüke dayanamaz.

D yatağı:



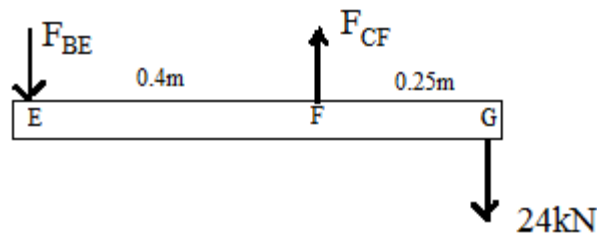
$$(\sigma_{yatak})_D = \frac{F_B}{d.t} = \frac{40000}{10.12} = 333,33 MPa \quad \rightarrow (\sigma_{yatak})_D = 333,33 MPa$$

333.33 > 300 $\rightarrow$ D yatağı da bu yüke dayanamaz.



Örnek (Soru) 1.5*: Şekildeki çerçeve sisteme G noktasından 24kN luk düşey bir yük uygulanmıştır. BE ve CF çift taraflı olarak yatay AD çubuğuna 20mm çapında çelik pimlerle bağlıdır. A ve D uçlarında ise dönmeye izin veren ötelenmeye izin vermeyen bağlantılar kullanılmıştır. Akma mukavemeti 200MPa olan BE ve CF çubukları 40mm genişliğinde ve aynı t kalınlığındadır. Emniyet faktörünü 2 alarak bu çubukların emniyetli kalınlık değerini tespit ediniz.

Çözüm: $t_{em} = 9.75mm$

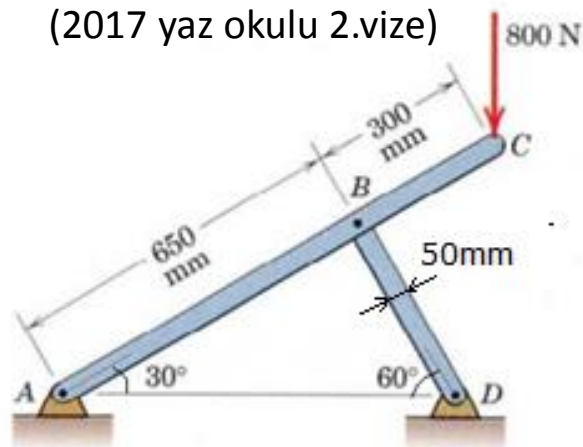


$$\sum M_E = 0 \rightarrow 0.4 \times F_{CF} - 0.65 \times 24 = 0 \rightarrow F_{CF} = 39kN$$

$F_{BE} = 39 - 24 = 15$ kN olduğu için CF çubuğu incelenir. Çünkü boyutlarda olmasına rağmen üzerine düşen kuvvet daha fazladır. BE çubuğun t_{em} değeri daha düşük çıkar.

$$\sigma_{em} = \frac{F_{CF}}{2(40 - 20)t} = \frac{39 \times 10^3}{40t} = \frac{200}{2} \rightarrow t_{em} = 9.75mm$$

Örnek (Soru) 1.6* :
(2017 yaz okulu 2.vize)



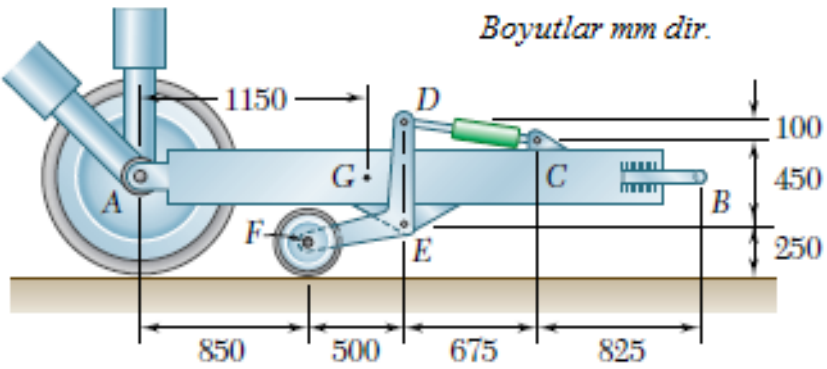
Şekildeki sistemin 800 N luk düşey yükü emniyet sınırları içerisinde taşıyabilmesi isteniyor. Emniyet katsayısını 2 olarak,

a-) **Çelik** malzemeden imal edilmiş, A ve B pimlerinin emniyetli çap değerlerini belirleyiniz. (A pimi tek, B pimi çift kesme yüzeyine sahiptir.)

b-) Bu durumda, 50mm genişliğe, 8mm kalınlığa sahip **Alüminyum** BD çubuğunun emniyet kontrolünü yapınız.

Malzeme	Çeki / Bası için Akma Mukavemeti	Kesmedeki Akma Mukavemeti
Çelik	400MPa	200MPa
Alüminyum	140MPa	70MPa

Cevaplar: a-) $d_{A-em} = 1.805\text{mm}$, $d_{B-em} = 3.59\text{ mm}$, b-) $\sigma_{BD-max} = 2.72\text{MPa}$ emniyetli

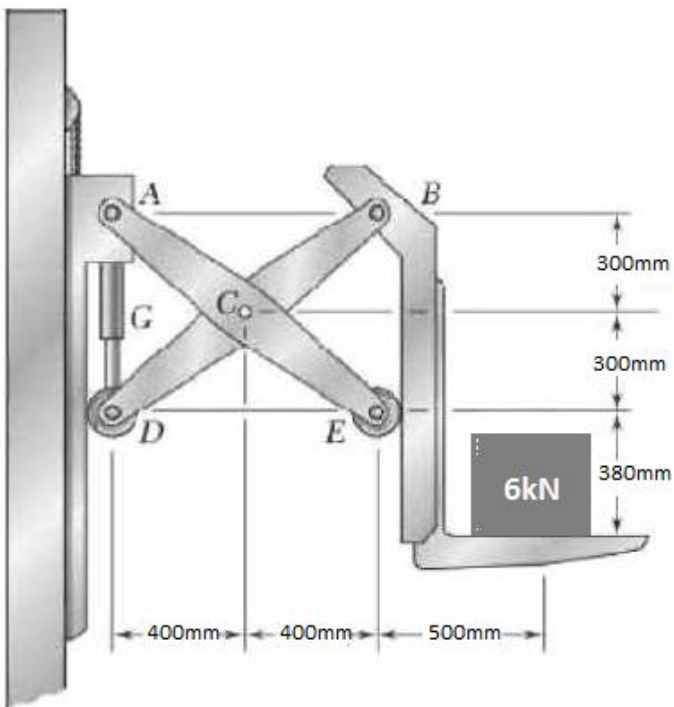


Örnek (Soru) 1.7*

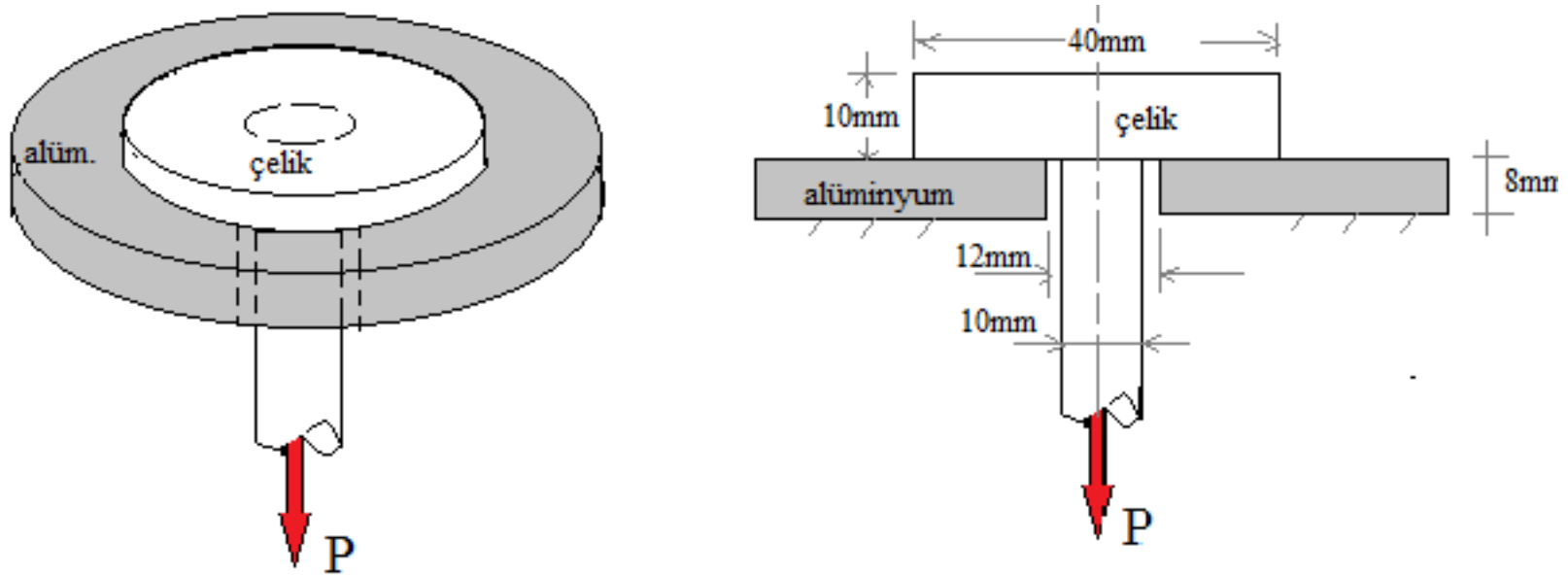
Şekildeki yatay AGCB uçak çekme çubuğunun ağırlık merkezi G noktasında olup, kütlesi 200kg dır. Bu Çubuğun ağırlığı CD hidrolik silindiri ve F tekerleği ile dengelenmiştir. F tekerleği sadece yere temas etmekte olup, yatay çekme çubuğu ile arasında yeterince bir boşluk mevcuttur. A, E ve D noktalarında pimlerle bağlantı sağlanmıştır. Bu durumda 25mm çapındaki CD hidrolik silindirinde ortaya çıkan normal gerilme değerini hesaplayınız. Cevap: -4.97MPa

Örnek (Soru) 1.8*

Şekildeki taşıyıcı sisteme 6kN luk bir kutu yüklenmiştir. Sistem gösterilen konumda dengede tutulmaktadır. L şeklindeki taşıyıcı bütün bir parçadır. E tekerleği sürtünmesizdir. B pimi tek kesmeye maruzdur. Buna göre B piminin emniyetli çap değerini hesaplayınız. (B piminin malzemesinin kesme mukavemeti 138 MPa dır. emniyet katsayısı $n=2$) Cevap: 12mm



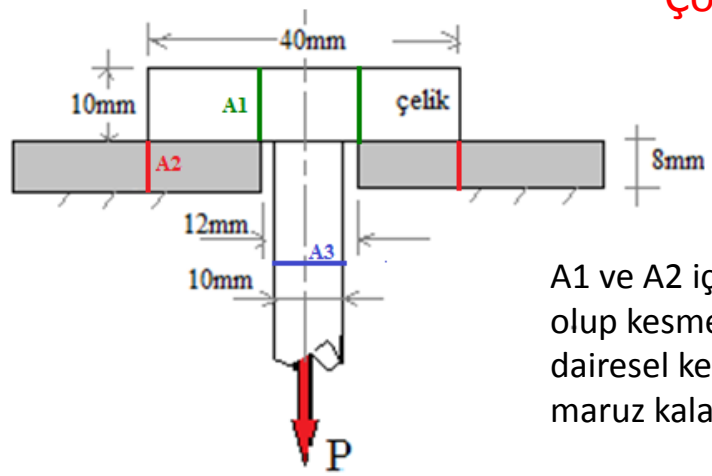
Örnek 1.9 :



Dairesel kesitli kademeli bir çelik çubuk, sabit bir alüminyum diskte açılan delikten geçirilmiştir. Sisteme uygulanabilecek maksimum P yükünün şiddetini hesaplayınız. Çelik elemanın alt kısmı 10mm çapındadır.

	<u>Çelik</u>	<u>Alüminyum</u>
σ_{em} (MPa)	360	140
τ_{ak} (MPa)	180	70

Çözüm 1.9 :



A1 ve A2 iç silindirik yüzeyler olup kesmeye maruz kalırlar. A3 dairesel kesiti ise çekmeye maruz kalacaktır.

Çeliğin üst kısmının emniyeti için uygulanabilecek maksimum P:

$$P = \tau_{em-\text{çelik}} \cdot A_1 = 180 \times (\pi \times 12 \times 10) = 67858.4N \cong 67.86kN$$

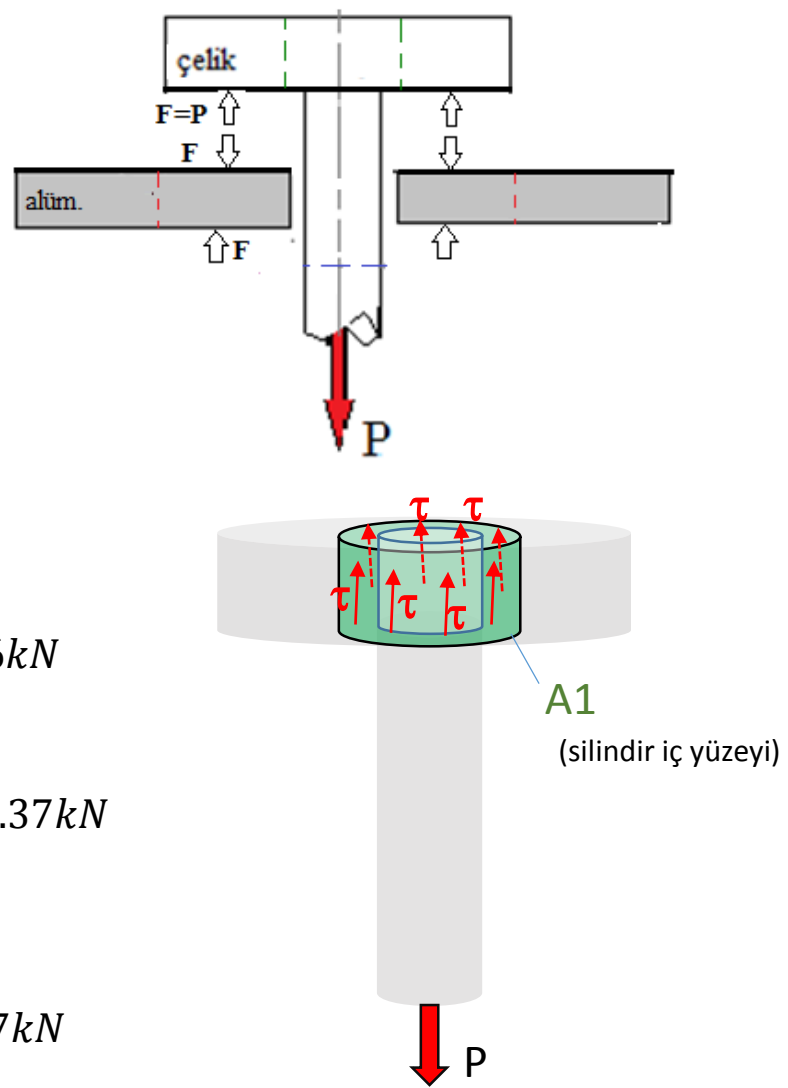
Alüminyum diskin emniyeti için uygulanabilecek maksimum P

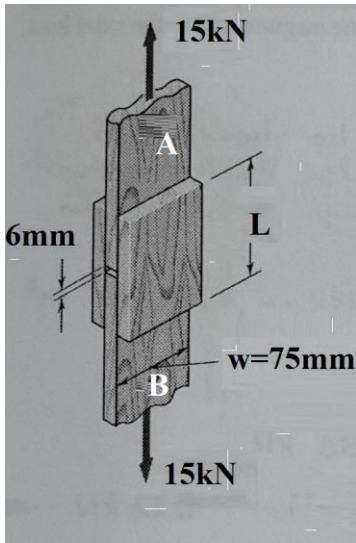
$$P = \tau_{em-\text{alüm.}} \cdot A_2 = 70 \times (\pi \times 40 \times 8) = 70371.67N \cong 70.37kN$$

Çeliğin alt kısmı emniyeti için uygulanabilecek maksimum P

$$P = \sigma_{em-\text{çelik}} \cdot A_3 = 360 \times \left(\frac{\pi \times 10^2}{4} \right) = 26703.53N \cong 26.7kN$$

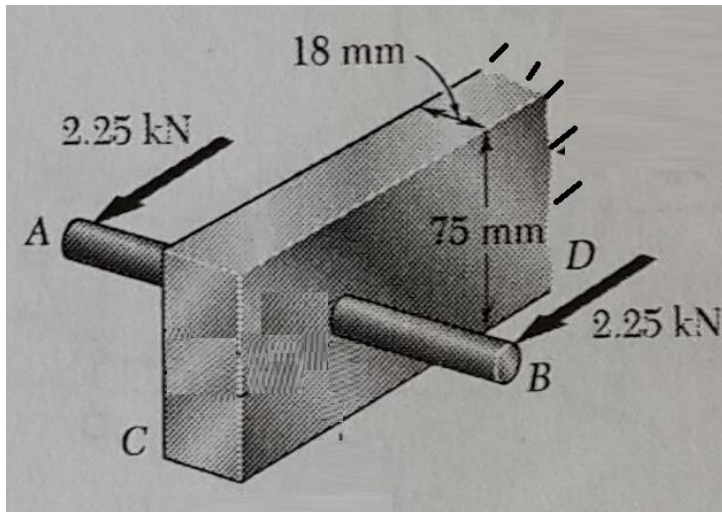
Bu durumda tüm sistemin emniyeti için uygulanabilecek maksimum P yükü: $\longrightarrow P_{emn.} = 26.7kN$





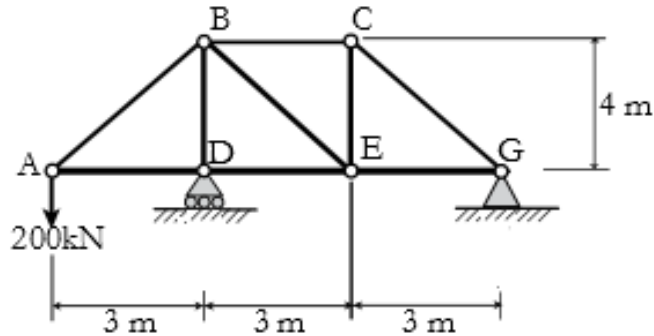
Örnek (Soru) 1.10* :

A ve B tahta levhaları aralarında 6mm lik boşluk kalacak şekilde 75xL boyutlarında tahta iki levhaya yapıştırılarak şekildeki gibi birleştirilmiştir. Levhalara 15kN luk çekme yükleri uygulanmıştır. Yapıştırıcı malzemesi maksimum 4 MPa kayma gerilmesine dayabilir. Buna göre, emniyet katsayısı $n = 2$ alarak, Levhaların birbirlerinden ayrılmaması için L boyunun sınır değerini hesaplayınız. Cevap: $L_{\min}=106\text{mm}$



Örnek (Soru) 1.11*: D kısmından sabitlenmiş olan CD tahtasındaki deliğe, 12mm çapında çaplı AB çelik çubuğu sıkıca geçirilmiştir. A ve B uçlarından uygulanan 2.25kN luk yatay kuvvetler a-) Tahtadaki maksimum normal gerilmeyi, b-) Delikteki dayanma gerilmesini hesaplayınız.

Cevap: a-) 3.97MPa, b-) 20.8 MPa



Örnek Soru 1.12 (Final 2016): Şekildeki kafes sistemde dairesel kesitli çelik çubuklar kullanılacaktır. Buna göre BE, CE çubuklarının minimum çap değerini hesaplayınız.

Kullanılacak çelik için akma gerilmesi = 400 MPa

Cevaplar : BE çubuğunun minimum çapı = 19.94mm

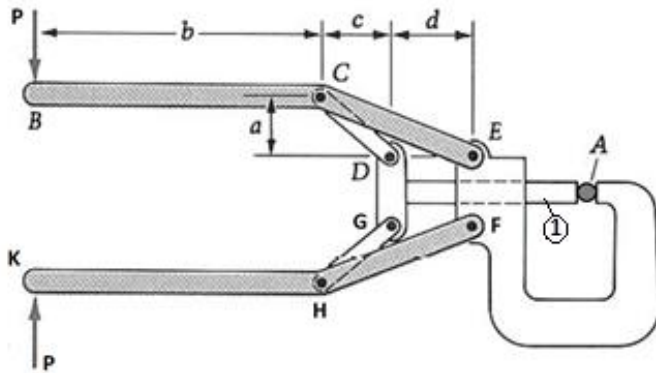
CE çubuğunun minimum çapı = 17.84mm

Örnek Soru 1.13 (Final 2016) Şekildeki sıkıştırma aletine $P = 50 \text{ N}$ luk bir el kuvveti uygulanacaktır. Buna göre emniyet sınırları içinde kalacak şekilde,

a-) kare kesitli CD kolunun emniyetli kesit uzunluğunu,

b-) Dairesel kesitli 1 nolu kolun emniyetli φ değerini,

c-) tek kesme yüzeyine maruz E piminin emniyetli çap değerini hesaplayınız.

**Verilenler:**

- $a=3\text{cm}$, $b=10\text{cm}$, $c=4\text{cm}$, $d=5\text{cm}$.
- emniyet katsayısı $n= 2$
- 1 nolu JA kolu, DG elemanına J noktasından kaynaklanmıştır.
- EF arasında açılan delik, 1 nolu kolun yatay doğrultulda hareketine izin vermektedir.
- CD ve JA kolu ve pimler aynı malzemeden imal edilecektir. Bu malzemenin akma mukavemeti: 300 MPa dır.
- Not: Kaymadaki akma mukavemeti, çeki akma gerilmesinin yarısıdır.

Cevaplar a-) 1.45 mm, b-) 2.07mm, c-) 4.88mm

2

ŞEKİL DEĞİŞTİRME

- a-Genel Bilgiler
- b- Eksenel Yüklemede Toplam Uzama Hesabı
- c- Hooke Bağlantıları
- d-Termal gerilmeler ve şekil değiştirmeler
- e-Diğer yükleme cinslerinde şekil değiştirmeler
- f-Eksenel yüklemede Hiperstatik Problemler

2.1 Şekil Değiştirme Hesaplarının Önemi

- Dış yüklerin etkisine maruz cisimlerde gerilmeler oluşur demiştik.
- Bunun yanı sıra bu cisimlerde dış yüklerin etkisi ile şekil değiştirmelerde oluşur.
- Şekil değiştirme deyince cismin ötelenmesi değil, kuvvet etkisi ile şeklindeki esnemeler veya çarpılmalar anlaşılmalıdır.
- Şekil değiştirmelerle gerilmeler arasında elastik bölgede doğrudan bağıntılar vardır. Bunlara Hooke bağıntıları denir. Bu bağıntılarla gerilmelerden şekil değiştirmeler hesaplanabilir. Veya şekil değiştirmeler hesaplanmışsa bu bağıntılarla gerilmeler elde edilebilir.,
- Şekil değiştirme mukavemetinde gerilmeden sonraki en önemli karşılaştırma kriteridir denebilir.
- Nasıl ki biz cismin gerilmesinin akma sınırını aşmasını istemeyiz, aynı şekilde cismin şeklindeki de belli bir sınırı aşması istenmez.
- Örneğin bir asma köprüde gerilmelerin akma sınırını aşmaması veya kopmaması yeterli olmaz, bunun yanı sıra köprünün çökme miktarının da belli bir sınırı aşmaması gerekir.



2.2 Şekil Değiştirme Hesaplama Yöntemleri Neye Göre Değişir?

- Gerilme hesabında olduğu gibi şekil değiştirme hesapları da yükleme cinsine bağlı olarak değişir. Özellikle;
 - ✓ Eksenel Yüklemede,
 - ✓ Burulmada,
 - ✓ Eğilmede,
- Şekil değiştirme hesaplama yöntemleri farklıdır. (Gerilme hesapları da farklıdır.)
- Şekil değiştirme hesaplama şekilleri statikçe belirsiz (hiperstatik) problemlerin çözümünde de bize yardımcı olmaktadır.
- Bu 2. konu kapsamında eksenel yüklemedeki şekil değiştirme ve hiperstatik problemler gösterilecektir.
- Burulmadaki şekil değiştirme ve hiperstatik problemler 3. konu olan Burulma konusunda ele alınacaktır.
- 4. ve 5. Konu olan eğilme yüklemesinde sadece gerilme hesapları anlatılacaktır. Şekil değiştirme konusu anlatılmayacaktır. Bu daha ileri seviye bir konu olup Mukavemet II dersinde anlatılmaktadır.
- Ayrıca burkulma, dinamik yükleme, eğik eğilme gibi farklı yükleme cinsleri de var olup herbirisinde hem şekil değiştirme hem gerilme hesaplama yöntemleri farklılık gösterir. Ancak bu konulara bu ders kapsamında girilmeyecektir.

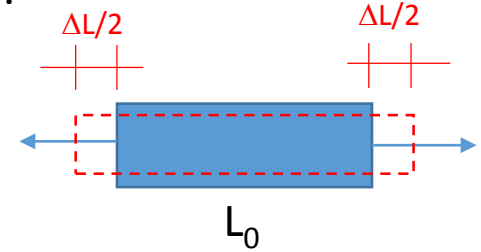
2.3 Birim Uzama (ε) Kavramı

- Şekil değiştirmede en önemli kavram birim uzama ismini verdiğimiz büyüklüktür.

ε ile gösterilen birim uzama, gerinme olarak isimlendirilir, İngilizcesi ise «strain» dir.

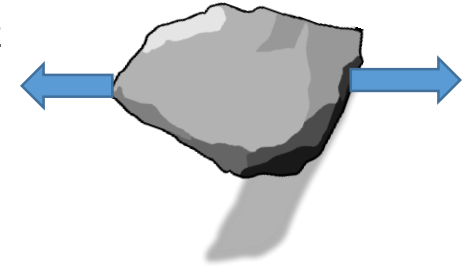
- En basit tanımıyla, bir cismin birim boyundaki uzama miktarıdır.

- Örneğin çekmeye maruz L_0 boyundaki bir çubukta toplam uzama ΔL ise Birim uzama $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$



- Birim uzama hangi doğrultuda ise ε un indisi ona göre değişir. (ε_x , ε_y veya ε_z olabilir).
- Bununla birlikte farklı yükleme durumlarında her bir noktadaki gerilme değiştiği gibi birim uzama da değişebilir. Aynı noktada aynı anda, farklı eksenlerde gerilmeler ve birim uzamalar oluşabilir.
- Birim uzama hesabından toplam uzama veya gerilme hesabına geçilebilir.
- Elastik bölgede bir noktadaki gerilmelerle-birim uzamalar arasında doğrudan bağıntılar vardır. Bunlara Hooke bağıntıları denir. Konu içinde yeri geldiğinde anlatılacaktır.
- Birim uzamalar deneysel olarak elde edilebilir. Bu sayede Hooke bağıntılarından o noktada gerilmeler elastik sınırlar içinde hesaplanabilmektedir.

2.4 Tek Eksenli Yükleme: Bir cisim sadece tek bir doğrultuda (x, y veya z eksenlerinden birisinde) yüklenmiş ise bu yükleme tek eksenli yükleme deriz.



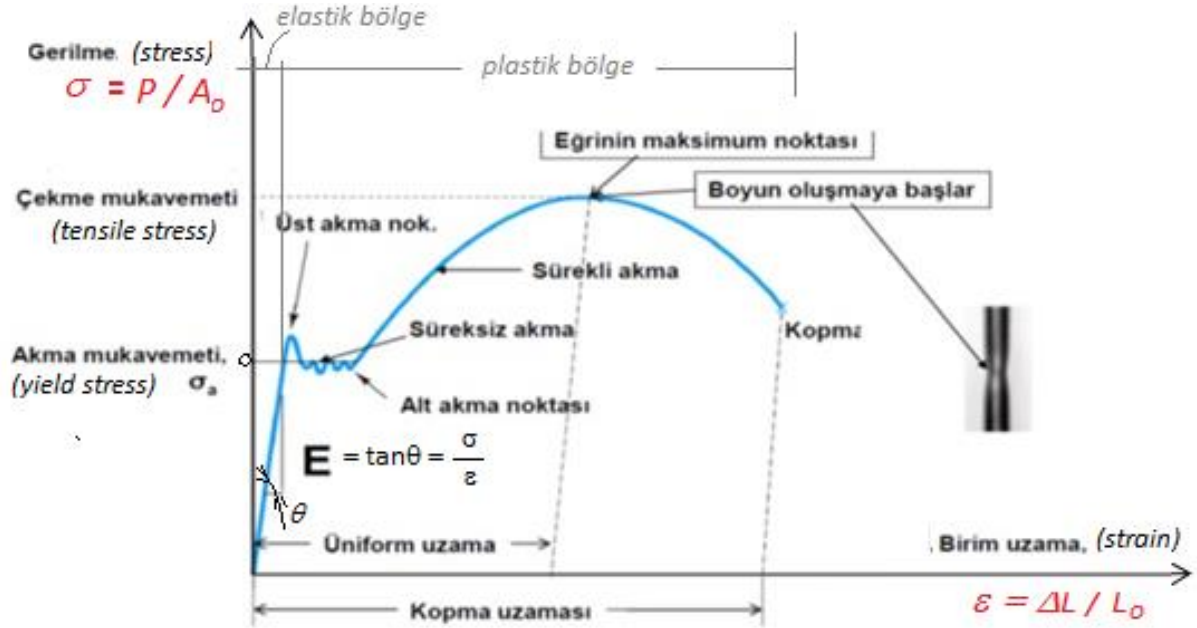
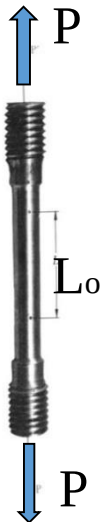
2.5 Eksenel Yükleme ve Toplam Uzama Hesabı:

- Çubuk şeklinde olan elemanların sadece uzunluğu (ekseni) doğrultusunda yüklenmesine eksenel yükleme denir. Eksenel yükleme bir eksen doğrultusunda olduğu için aynı zamanda tek eksenli yüklemedir.
- Bu yükleme çekme veya basma şeklinde olur.
- Çubuğun kesit alanı değişken olabilir. Bu tip çubuklara kademeli çubuklar denir.
- Şimdi amacımız, eksenel yüklemeye maruz çubuk şeklindeki elemanlarda toplam uzama veya kısalma miktarını hesaplamaktır.



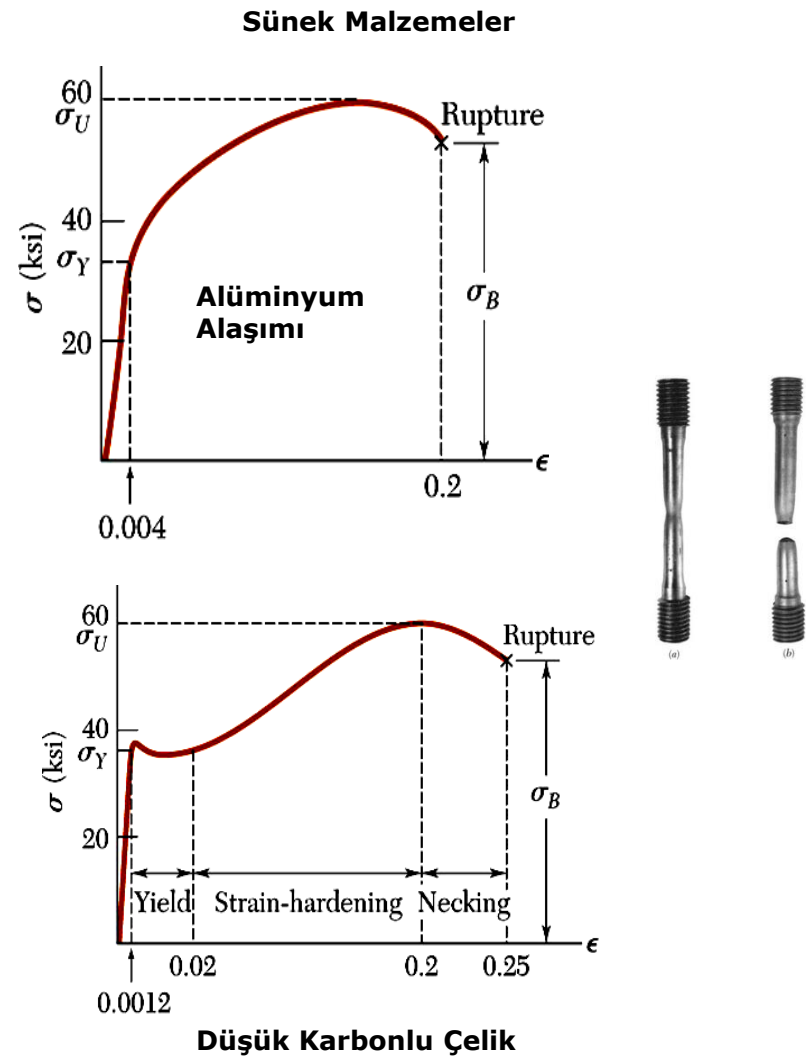
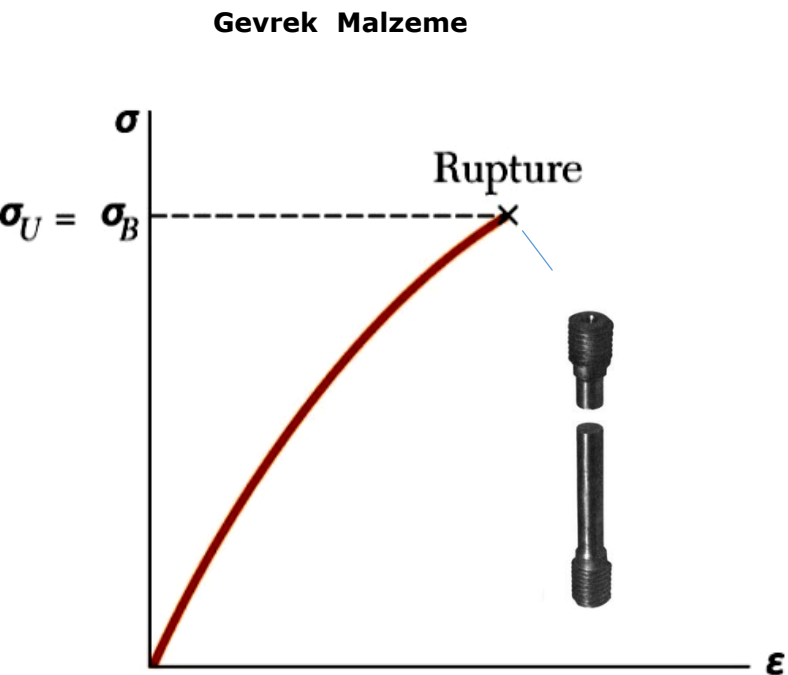
2.5.1 Çekme testi ve gerilme-birim uzama diyagramı: Çekme testi bir eksenel yüklemedir. Malzemelerin mekanik davranışlarını en iyi karakterize eden bir testtir.

Sünek bir malzeme için çekme testi diyagramını hatırlayalım:



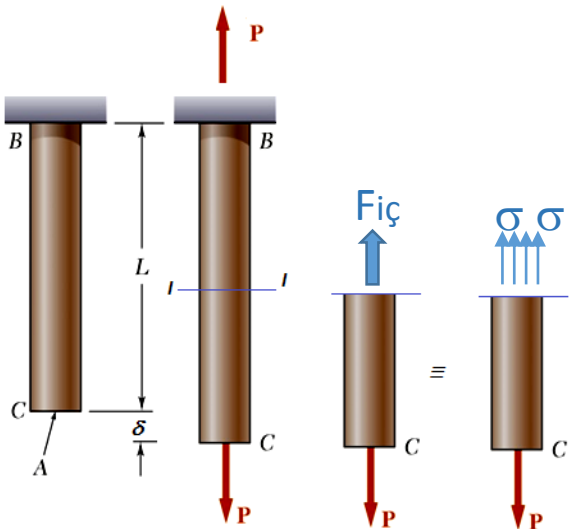
- Elastik bölge bir doğru ile tanımlanabilir. Bu doğrunun eğimine ($\tan\theta$) Elastiklik modülü (E) denir.
- Bu durumda elastik bölge için $\sigma = E \cdot \varepsilon$ bağıntısı geçerlidir. Bu bağıntıya tek eksenli yüklemde Hooke kanunu denir.

2.5.1.1 Farklı malzemeler için çekme testi diyagramları:



2.5.2. Eksenel yüklemede Elastik toplam Uzama (δ) hesabı:

Eksenel çeki yüküne maruz A sabit kesitine sahip homojen ve izotropik bir çubuk düşünelim. P çekme kuvveti etkisi ile bu çubuk elastik bölgede toplam ne kadar uzar ($\delta=?$)



Tek eksenli yüklemdeki Hooke Bağıntısından:

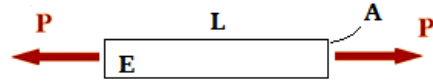
$$\sigma = E \varepsilon \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

Birim şekil değişirme (ε) tanımından:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \rightarrow \delta = \varepsilon \cdot L$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{PL}{AE}$$

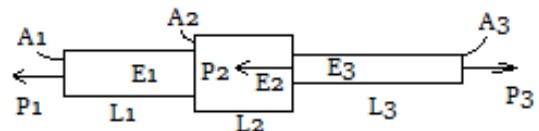
Eksenel yüklemeye maruz, sabit kesitli bir çubukta, elastik toplam uzama miktarı. Bu formülün uygulanabilmesi için L uzunluğu boyunca kuvvet (P), Alan(A) ve malzeme (E) değişmemelidir.



2.5.2.1 Kademeli çubuklar için toplam uzama

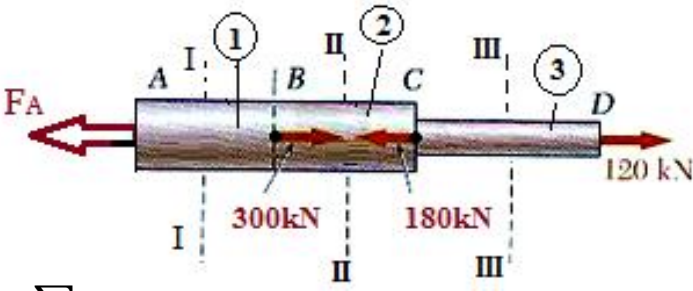
L boyunca, A, E veya P değişirse, buna kademeli çubuk denir. Çubuk bölgelere ayrılır. Herbir bölge için uzama miktarları ayrı ayrı bulunur ve toplanır. Burada en önemli nokta bölgedeki iç kuvveti belirlemektir. Bu iç kuvvet ise formüldeki P kuvvetine karşılık gelir. Bu örneklerle daha iyi anlaşılacaktır.

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$



Örnek 2.1.

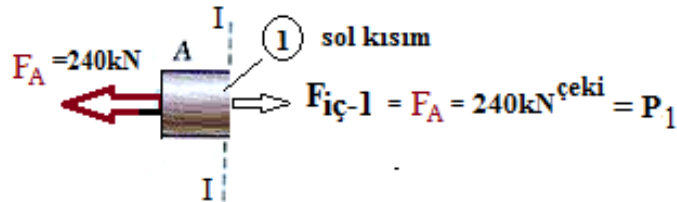
Verilen yükleme durumu için şekildeki kademeli çelik çubuğun deformasyonunu (toplam uzama miktarını) bulunuz. Elastiklik Modülü : $E=200\text{GPa}$



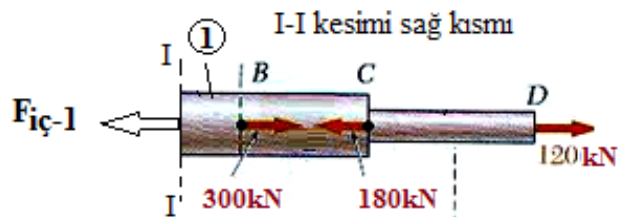
$$\sum F_x = 0 \rightarrow 300 + 120 - 180 - F_A = 0 \rightarrow F_A = 240\text{kN}$$

Herbir bölgeden kesim yaparak iç kuvvetleri buluruz. Bu iç kuvvetler formüldeki P_i kuvvetine eşittir.

1.Bölge



veya 1nci bölge için I-I kesiminin sağ kısmını alırsak yine aynı sonucu buluruz.



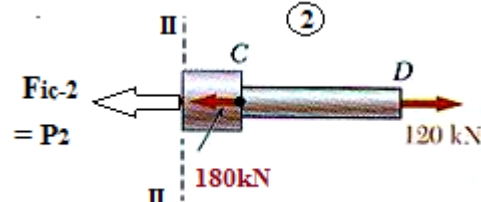
$$\sum F_x = 0 \rightarrow 300 + 120 - 180 - F_{İç-1} = 0$$

$$\rightarrow F_{İç-1} = 240\text{kN}$$

Bölgelerin kesit alanları: $A_1 = A_2 = 580\text{ mm}^2$, $A_3 = 194\text{ mm}^2$

Bölgelerin uzunlukları : $L_1 = L_2 = 300\text{ mm}$, $L_3 = 400\text{ mm}$

2.Bölge (II-II kesimi sağ kısım)

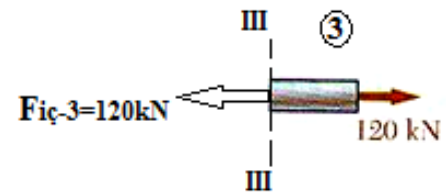


$$\sum F_x = 0 \rightarrow 120 - 180 - F_{İç-2} = 0$$

$$\rightarrow F_{İç-2} = -60\text{kN}$$

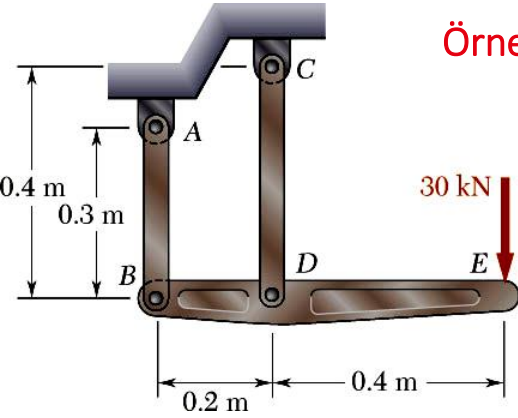
3.Bölge

(III-III kesimi sağ kısım)



$$\text{Toplam uzama : } \delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E} \left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3} \right)$$

$$= \frac{1}{200 \times 10^3} \left[\frac{(240 \times 10^3) 300}{580} + \frac{(-60 \times 10^3) 300}{580} + \frac{(120 \times 10^3) 400}{194} \right] = 1.7\text{ mm.}$$



Örnek 2.2.

BDE rijit çubuğu AB ve CD elemanları ile sabit bir yüzeye bağlanmıştır.

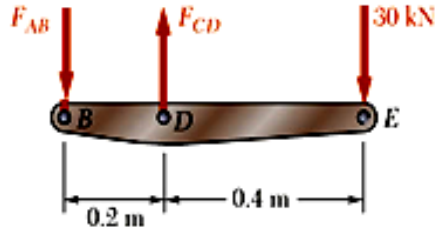
Alüminyum olan ($E = 70 \text{ GPa}$) AB elemanının kesit alanı 500 mm^2 'dir.

Çelik ($E = 200 \text{ GPa}$) CD elemanının kesit alanı ise 600 mm^2 'dir. 30-kN'luk kuvvete karşılık; B, D ve E noktalarının yer değiştirmesini bulunuz.

Cözüm:

AB ve CD çubukları çift kuvvet elemanlarıdır.

BDE için Serbest Cisim Diyagramı



$$\sum M_B = 0$$

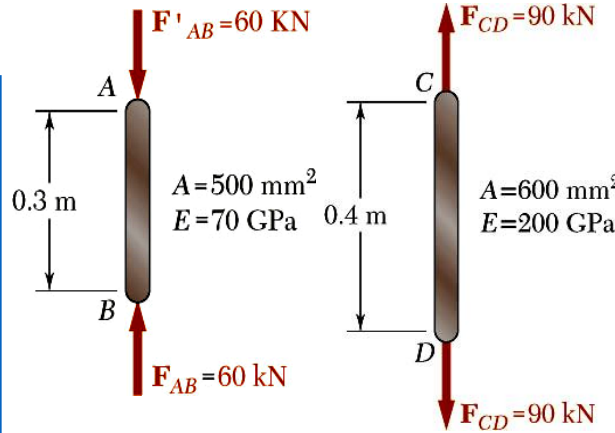
$$0 = -(30 \text{ kN} \times 0.6 \text{ m}) + F_{CD} \times 0.2 \text{ m}$$

$$F_{CD} = +90 \text{ kN}$$

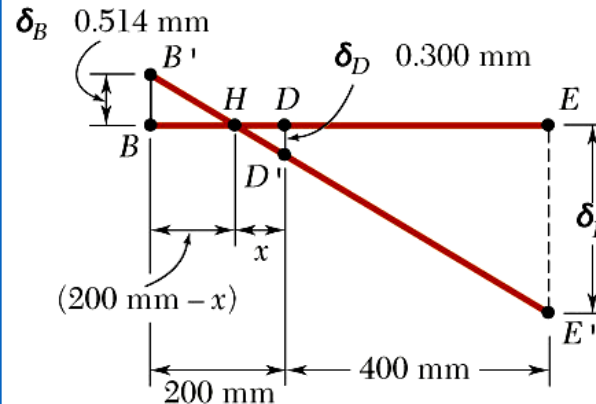
$$\sum M_D = 0$$

$$0 = -(30 \text{ kN} \times 0.4 \text{ m}) - F_{AB} \times 0.2 \text{ m}$$

$$F_{AB} = 60 \text{ kN}$$



Rijit çubuk olduğundan dolayı BDE doğrusu yine doğru olarak kalır.



D noktasının yer değiştirmesi

$$\delta_D = \frac{PL}{AE} = \frac{(90 \times 10^3 \text{ N})(400 \text{ mm})}{(600 \text{ mm}^2)(200 \times 10^3 \text{ MPa})} = 0.3 \text{ mm}$$

B noktasının yer değiştirmesi

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{(-60 \times 10^3 \text{ N})(300 \text{ mm})}{(500 \text{ mm}^2)(70 \times 10^3 \text{ MPa})} = -0.514 \text{ mm}$$

Üçgen benzerliklerinden

$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD} \rightarrow \frac{0.514 \text{ mm}}{0.300 \text{ mm}} = \frac{(200 \text{ mm}) - x}{x}$$

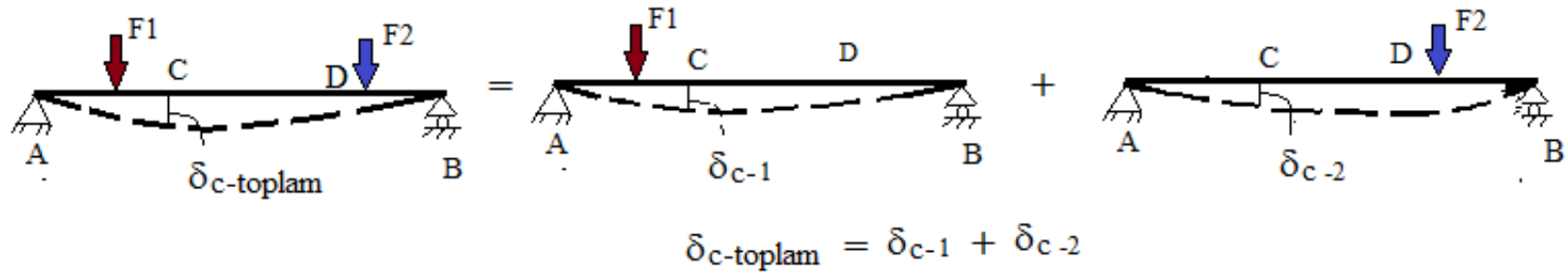
$$x = 73.7 \text{ mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD}$$

$$\frac{\delta_E}{0.300 \text{ mm}} = \frac{(400 + 73.7) \text{ mm}}{73.7 \text{ mm}}$$

$$\delta_E = 1.928 \text{ mm}$$

2.6 Süperpozisyon prensibi: Elastik yüklemede 2 farklı yükün etkilerinin toplamı, yükler ayrı ayrı uygulandıklarındaki etkilerinin toplamına eşittir. Buna süperpozisyon prensibi denir. Hiperstatik sistemlerin çözümünde kullanılabilir.



2.7. Eksenel Yüklemede Statikçe belirsiz (hiperstatik) problemler

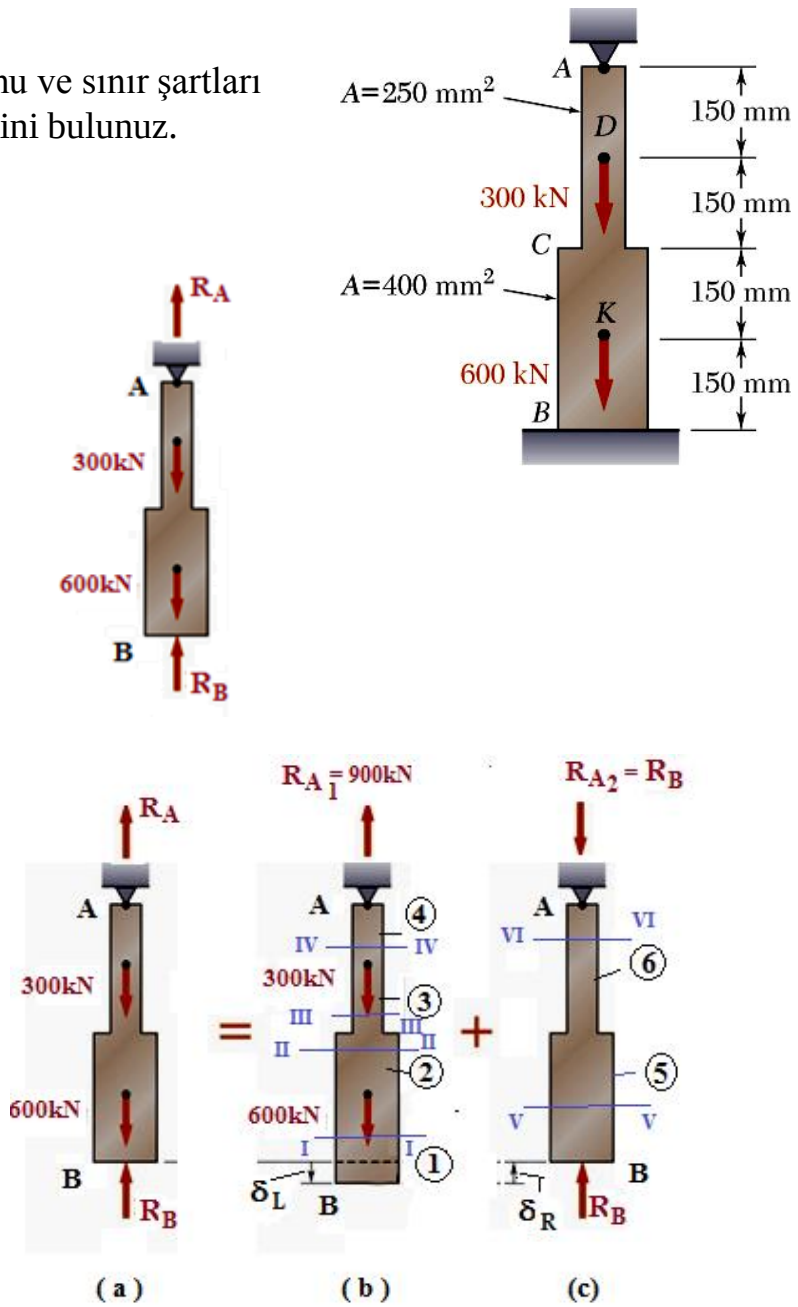
Denge halindeki sistemlerde bilinmeyen kuvvetlerin sadece statik denge denklemleri ile bulunamadığı (yani ilave denklemlere ihtiyaç olduğu) problemlere, statikçe belirsiz problemler denir. Bu ilave denklemler ise sistemin şekil değiştirmesinden elde edilir. Bu kısımda eksenel yüklemedeki şekil değiştirmelerden ek denklemler elde edilecektir. (Burulma ve eğilme konusunda da hiperstatik problemler söz konusudur.)

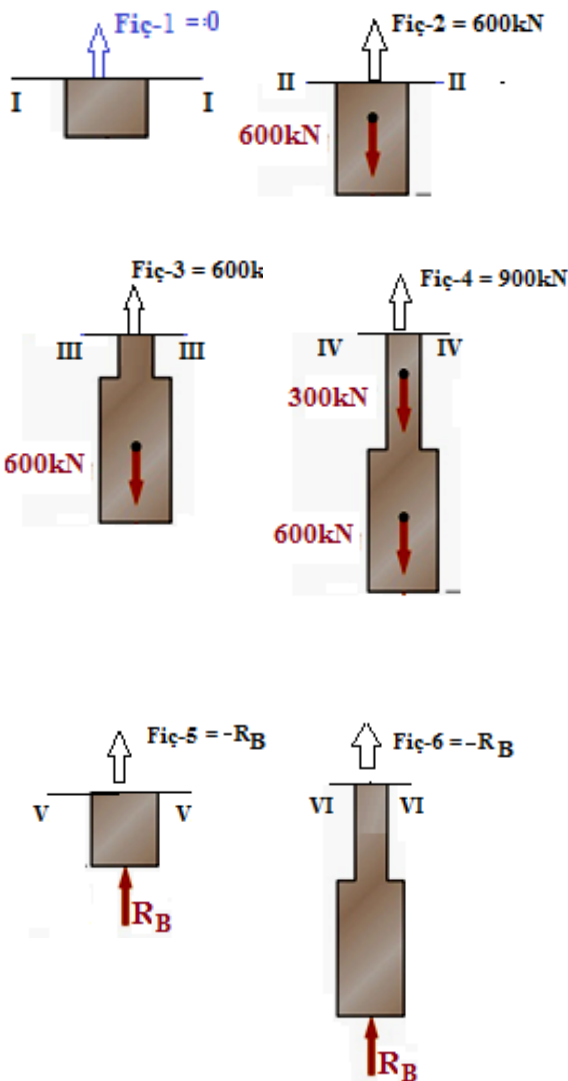
Örnek 2.3: Şekildeki kademeli çubukta verilen yükleme durumu ve sınır şartları için için A ve B noktalarındaki reaksiyon kuvvetlerini bulunuz.

Çözüm: Statik Denge denklemi olarak sadece;

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_A - 300 - 600 + R_B = 0 \quad (1)$$

- yazılabilir. 1 denklem 2 bilinmeyen vardır.
- Bir denkleme daha gerek var.
- Bu ilave denklem şekil değiştirmeden bulunur.
- Çubuğun alt ve üstü sınırlandırıldığı için toplam uzama miktarı sıfırdır.
- B zeminini kaldırıp yerine R_B kuvveti uygulayabiliriz.
- Süperpozisyon yöntemine göre 300 ve 600 kN nu önce
- R_B yi ise sonra uygulayabiliriz.
- Sonuçta 300kN ve 600kN varken ki uzama (δ_L),
- Sadece R_B varken ki kısılma (δ_R) toplamı sıfırdır.





$P_1 = F_{i\zeta-1} = 0 \quad P_2 = F_{i\zeta-2} = P_3 = F_{i\zeta-3} = 600 \times 10^3 \text{ N} \quad P_4 = F_{i\zeta-4} = 900 \times 10^3 \text{ N}$
 $A_1 = A_2 = 400 \text{ mm}^2 \quad A_3 = A_4 = 250 \text{ mm}^2, L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 150 \text{ mm}$

$$\delta_L = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E} \left(0 + \frac{600 \times 10^3 \times 150}{400} + \frac{600 \times 10^3 \times 150}{250} + \frac{900 \times 10^3 \times 150}{250} \right) = \frac{1.125 \times 10^6}{E}$$

$P_5 = F_{i\zeta-5} = P_6 = F_{i\zeta-6} = -R_B$
 $A_1 = 400 \text{ mm}^2 \quad A_2 = 250 \text{ mm}^2, L_1 = L_2 = 300 \text{ mm}$
$$\delta_R = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E} \left(\frac{-R_B \times 300}{400} + \frac{-R_B \times 300}{250} \right) = -\frac{1.95 \times R_B}{E}$$

$\delta = \delta_L + \delta_R = 0$
$$\delta = \frac{1.125 \times 10^6}{E} - \frac{1.95 \times R_B}{E} = 0 \quad (2)$$

(2) denkleminde: $R_B = 577 \times 10^3 \text{ N} = 577 \text{ kN}$

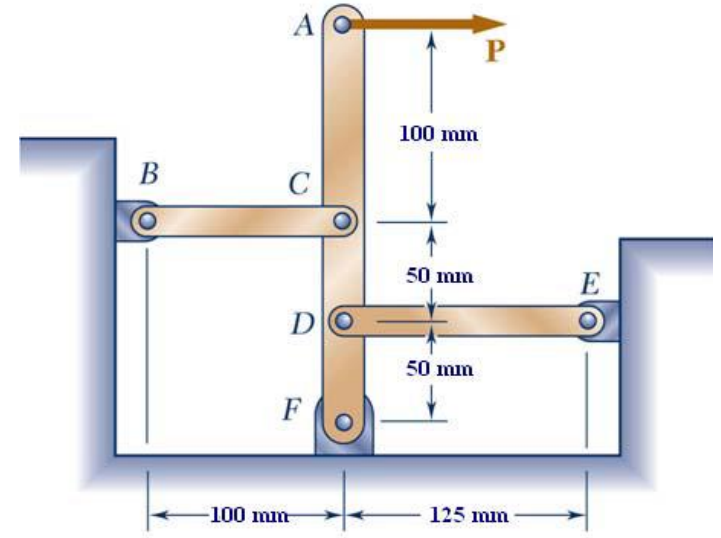
(1) denkleminde: $R_A = 323 \text{ kN}$

$R_A - 300 - 600 + 577 = 0$

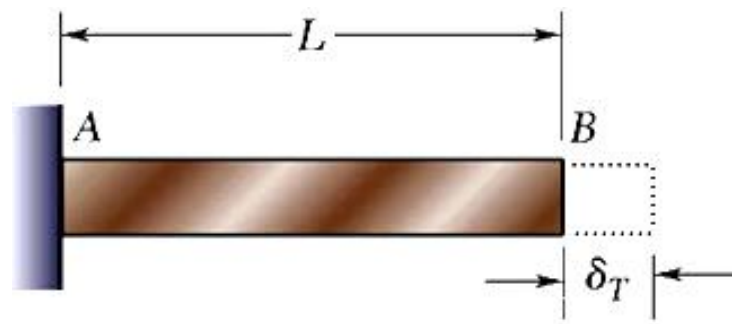
Örnek (Soru) 2.4*

Şekildeki BC ve DE çubukları çelikten imal edilmiş olup ($E_{\text{ç}}=200\text{GPa}$) her birinin genişliği 12 mm ve kalınlığı 6 mm'dir.

Buna göre; **a-)** AF rijit elemanına $P=2,4\text{ kN}$ 'luk kuvvet uygulandığı zaman BC ve DE çubuklarında meydana gelen kuvvetleri, **b-)** Buna karşılık gelen A noktasının deplasmanını (yer değiştirmesini), bulunuz. Cevap: a-) 4kN ve 1.6kN, b-) 0.056mm



2.8 Termal Yüklemeler : Sıcaklık etkisi sonucu malzemelerde uzama veya daralmalar (şekil değiştirmeler) olur. Eğer termal uzama engellenirse termal gerilmeler oluşur.



2.8.1 Termal Uzama

Öncelikle bir malzeme özelliğini iyi anlamak gerekir:

α : malzemenin ısı genleşme katsayısı (1 / °C):

Tanımı: α ; 1 birim boydaki çubuğun sıcaklığı 1 °C değiştirildiğinde boyundaki değişim miktarıdır.

Orantı kurulacak olursa;

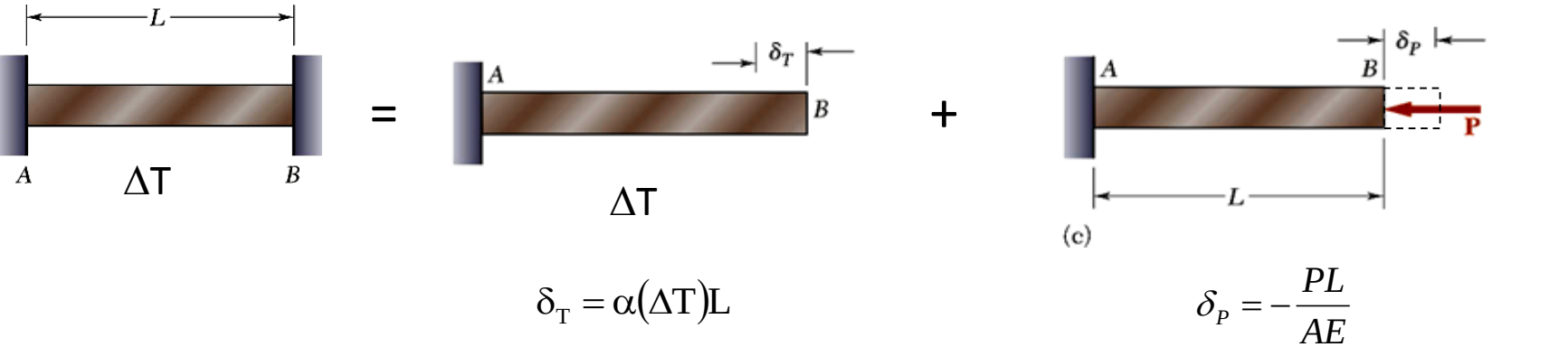
L boyundaki çubuğun sıcaklığı ΔT kadar değiştirildiğinde boyundaki toplam değişim miktarı:

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

2.8.2 Termal Gerilmeler (Thermal Stresses)

Termal uzaması engellenen cisimlerde termal gerilmeler oluşacaktır. Bir çubuk her iki tarafından iki duvar arasına sıkıştırılıp sıcaklığı ΔT kadar arttırılırsa uzaması engellendiği için duvarlarda P tepki kuvvetleri ve gerilmeler oluşacaktır. Şimdi bu P kuvvetinin ve termal gerilmelerin hesap şeklini anlamaya çalışalım:

Çubuğun toplam uzaması sıfırdır. Süperpozisyon prensibine göre, B duvarı kaldırılır, serbestçe uzamaya izin verilir. Sonra B duvarında oluşan P kuvveti uygulanır ve çubuğun kısalması sağlanır. Bu termal uzama (δ_T) ve kısalma (δ_P) miktarları birbirine eşittir. Toplamları sıfırdır. $\delta_T + \delta_P = 0$



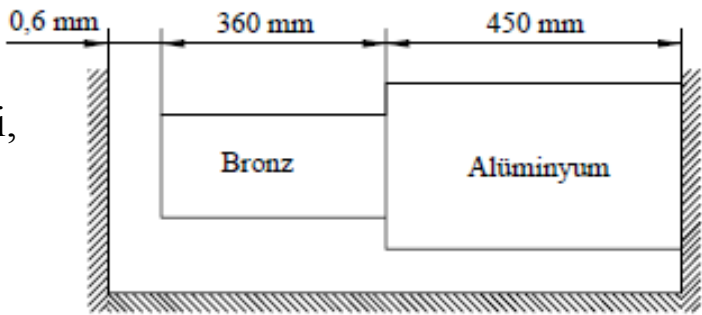
$$\delta = \delta_T + \delta_P = 0 \longrightarrow \alpha(\Delta T)L - \frac{PL}{AE} = 0 \rightarrow P = AE\alpha(\Delta T) \longrightarrow \sigma = -\frac{P}{A} = -E\alpha(\Delta T)$$

Termal gerilme

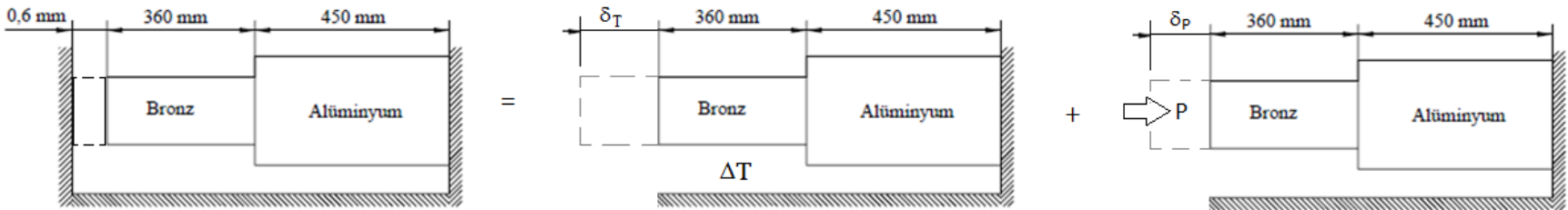
Örnek 2.5

Şekildeki kademeli çubukta, **a)** 110°C’lik sıcaklık artışından sonra çubuklarda meydana gelen bası kuvvetlerini ve gerilmeleri, **b)** Alüminyum çubuğun boyundaki değişimi bulunuz.

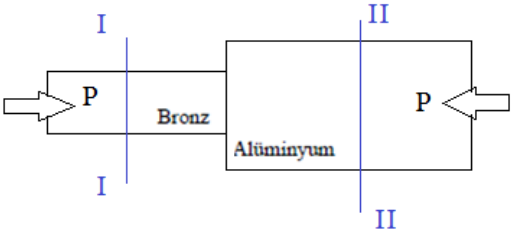
<u>Bronz</u>	<u>Alüminyum</u>
A=1500 mm ²	A=1800 mm ²
E=105 GPa	E=70 GPa
α=18x10 ⁻⁶ 1/°C	α=23x10 ⁻⁶ 1/°C



Çözüm:

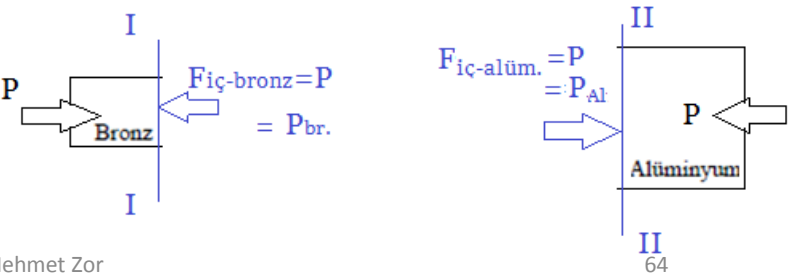


Sol duvar kaldırılınca ΔT sıcaklık farkı sebebiyle, sistem δ_T kadar uzar. Sol duvardan gelen P kuvveti sebebiyle δ_p kadar kısalır. Sonuçta δ_T + δ_p = 0.6mm olacaktır.



Statik dengeden:

$P_{Al.} = P_{Br.} = P \tag{1}$



a) $\delta_{toplam} = \delta_{Al.} + \delta_{Br.} = 0,6\text{ mm}$

$$\delta_{Al.} = \alpha_{Al.} \cdot L_{Al.} \cdot \Delta T - \frac{P_{Al.} \cdot L_{Al.}}{A_{Al.} \cdot E_{Al.}} = 23 \cdot 10^{-6} \cdot 450 \cdot 110 - \frac{P_{al.} \cdot 450}{1800 \cdot 70 \cdot 10^3} = 1,14 - 3,57 \cdot 10^{-6} P_{Al.}$$

$$\delta_{Br.} = \alpha_{Br.} \cdot L_{Br.} \cdot \Delta T - \frac{P_{Br.} \cdot L_{Br.}}{A_{Br.} \cdot E_{Br.}} = 18 \cdot 10^{-6} \cdot 360 \cdot 110 - \frac{P_{Br.} \cdot 360}{1500 \cdot 105 \cdot 10^3} = 0,71 - 2,29 \cdot 10^{-6} P_{Br.}$$

$$\delta_{Al.} + \delta_{Br.} = 1,14 - 3,57 \cdot 10^{-6} P_{Al.} + 0,71 - 2,29 \cdot 10^{-6} P_{Br.} = 0,6 \longrightarrow 1,14 - 3,57 \cdot 10^{-6} P + 0,71 - 2,29 \cdot 10^{-6} P = 0,6 \quad (2)$$

$$\rightarrow P = \frac{1,14 + 0,71 - 0,6}{3,57 \cdot 10^{-6} + 2,29 \cdot 10^{-6}} = 213,31\text{ kN} = P_{Br.} = P_{Al.}$$

$$\sigma_{Al.} = \frac{P}{A_{Al.}} = \frac{213,31 \times 10^3}{1800} = 118,5\text{ MPa}$$

$$\sigma_{Br.} = \frac{P}{A_{Br.}} = \frac{213,31 \times 10^3}{1500} = 142,2\text{ MPa}$$

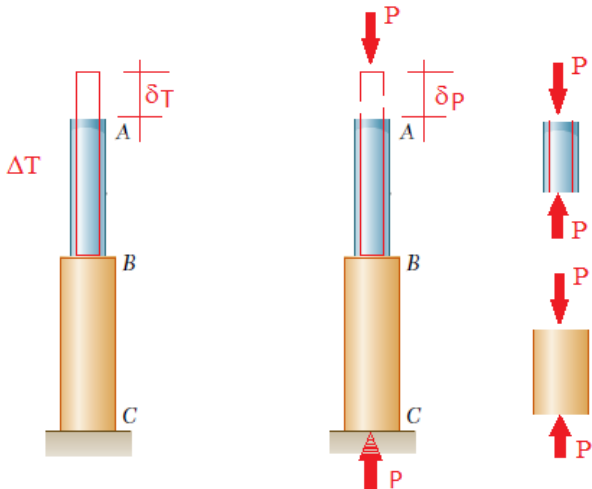
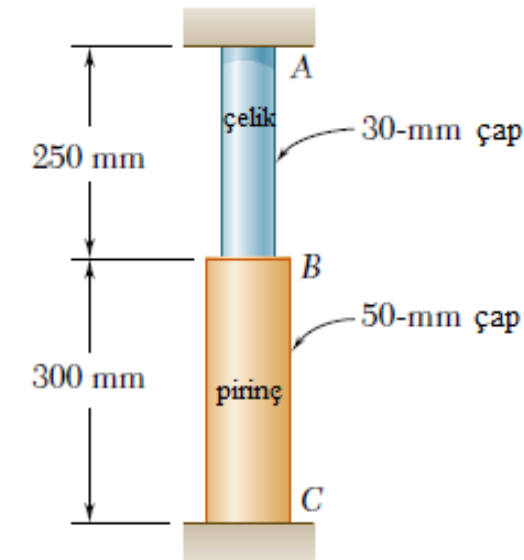
b) $\delta_{Al.} = 1,14 - 3,57 \cdot 10^{-6} P_{Al.} = 1,14 - 3,57 \cdot 10^{-6} \cdot 213310 = 0,38\text{ mm}$

Örnek (Soru) 2.6* : Her iki ucundan ankastre edilmiş, çelik ve pirinç kısımlardan oluşan kademeli çubuğun sıcaklığı 50 °C arttırılıyor. Çelik ve pirinç kısımlarında oluşan gerilmeleri hesaplayınız.

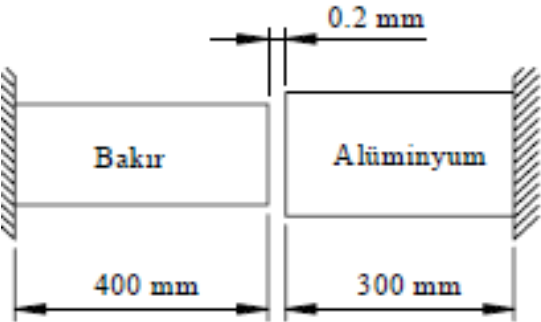
	Pirinç	Çelik
E(GPa)	105	200
α (1/ °C)	20.9×10^{-6}	11.7×10^{-6}

Cevap: Pirinçte:- 72.62MPa, Çelikte: - 201.73MPa

$$\delta_T = \delta_P$$
$$\alpha_p (\Delta T) L_p + \alpha_\varsigma (\Delta T) L_\varsigma = \frac{P L_p}{A_p E_p} + \frac{P L_\varsigma}{A_\varsigma E_\varsigma} \rightarrow P = 142600 N$$
$$\sigma_p = -\frac{P}{A_p} = -72.62 MPa, \sigma_\varsigma = -\frac{P}{A_\varsigma} = -201.73 MPa$$



Örnek (Soru) 2.7* Emniyet sınırları aşılmaksızın şekildeki sistemi ne kadar ısıtabiliriz?

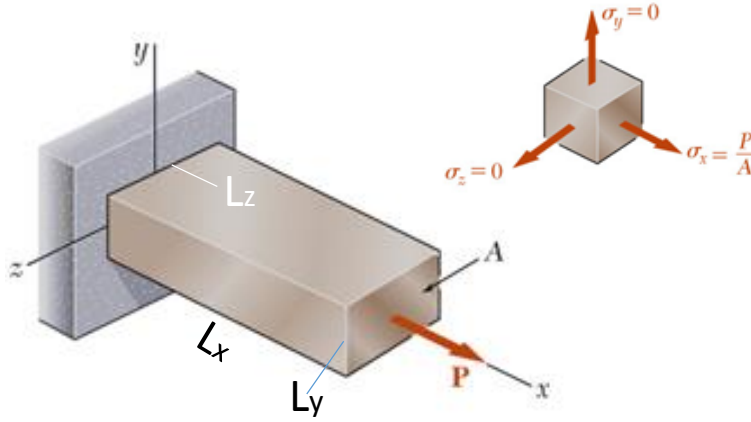


Bakır
d=40 mm
E=100 GPa
 $\alpha=27 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^{\circ}\text{C}$
 $\sigma_{em}=100 \text{ MPa}$

Alüminyum
d=50 mm
E=70 GPa
 $\alpha=23 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^{\circ}\text{C}$
 $\sigma_{em}=50 \text{ MPa}$

(Cevap: $\Delta T= 41 \text{ } ^{\circ}\text{C}$)

2.9 Poisson Oranı: (bir malzeme özelliği)



Şekildeki çubuk eksenel P yüküne maruz kalırsa birim uzama:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \sigma_y = \sigma_z = 0$$

(tek eksenli yüklemede Hooke bağıntısı)

X doğrultusundaki eksenel P yükü y ve z doğrultularında gerilme oluşturmaz ancak bu doğrultularda daralmaya sebep olur. Bu sebeple;

$$\epsilon_y = \epsilon_z$$

$$\text{Poisson oranı: } \nu = \left| \frac{\text{yanal birim uzama}}{\text{eksenel birim uzama}} \right| = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$$

Dikkat: Bu formül tek eksenli yükleme durumunda geçerlidir. P nin yanısıra Y veya Z doğrultularında da kuvvetler olsaydı bu formül kullanılamazdı.

Poisson oranı bir yükün diğer doğrultulardaki şekil değiştirme etkisini verir.

Poisson oranı bir malzeme özelliğidir ve sınırları: 0 ile 0.5 arasında değişir.

Unutmayın: Aynı zamanda
Birim uzama = Toplam uzama/ o yöndeki ilk boydur.
Bu tanım tüm elastik yükleme durumları için geçerlidir.

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{L_x}$$

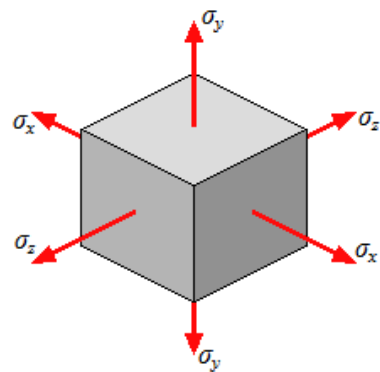
$$\epsilon_y = \frac{\delta_y}{L_y}$$

$$\epsilon_z = \frac{\delta_z}{L_z}$$

2.10 Genel eksenel yüklemde Hooke kanunları:

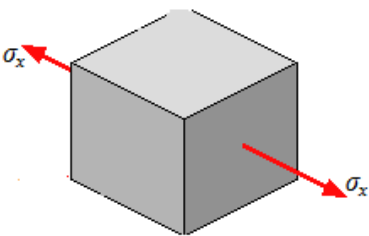
Bir noktada, x, y ve z doğrultularında normal gerilmelerin her üçü birden varsa, elastik bölgede aynı noktada birim uzamaları bulmak istiyoruz.

Süperpozisyon yöntemini kullanırsak:



$$\begin{aligned}\epsilon_x &=? \\ \epsilon_y &=? \\ \epsilon_z &=?\end{aligned}$$

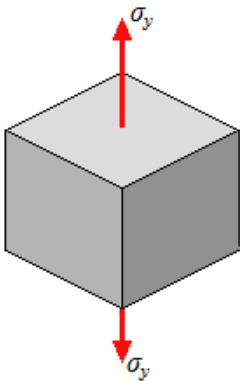
≡



$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} \\ \epsilon_y &= -\nu \cdot \epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \\ \epsilon_z &= -\nu \cdot \epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}\end{aligned}$$

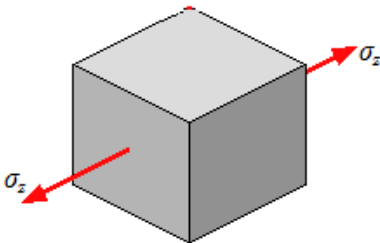
+



$$\sigma_x = \sigma_z = 0$$

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= -\nu \cdot \epsilon_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} \\ \epsilon_z &= -\nu \cdot \epsilon_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_y}{E}\end{aligned}$$

+



$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= -\nu \cdot \epsilon_z = -\nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= -\nu \cdot \epsilon_z = -\nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E}\end{aligned}$$

Herbir yüklemdeki aynı terimler toplanır:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}\end{aligned}$$



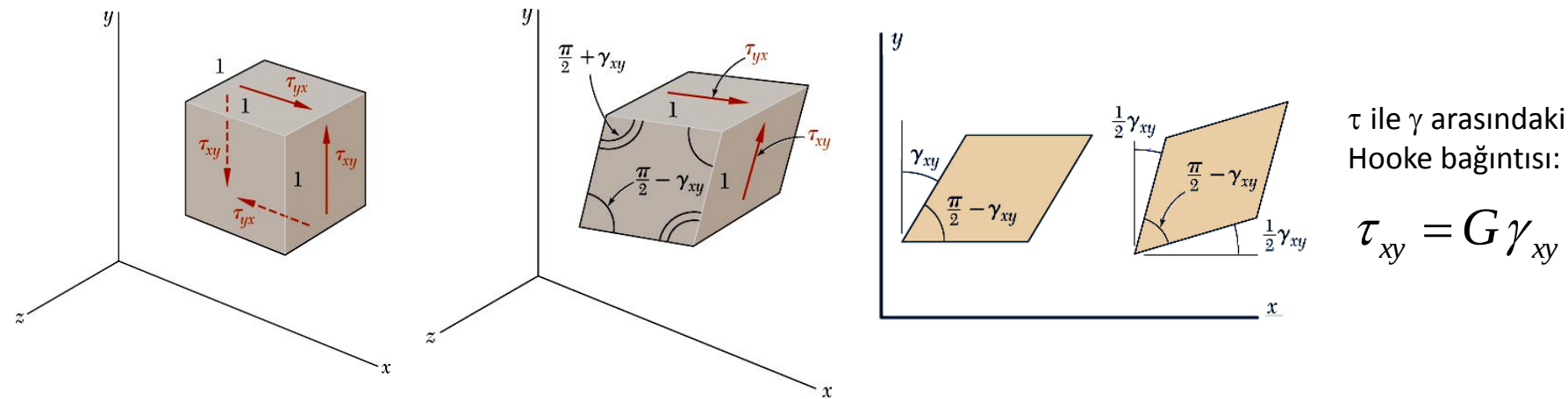
$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}$$

Genel Eksenel
yükleme halinde
Hooke kanunları

2.11 Kayma durumunda Hooke kanunları:

Bir noktada, en genel durumda 3 farklı kayma gerilmesi (τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz}) olabilir.

Bu gerilmeler kayma şekil değiştirme açılarına (γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{xz}) sebep olurlar.

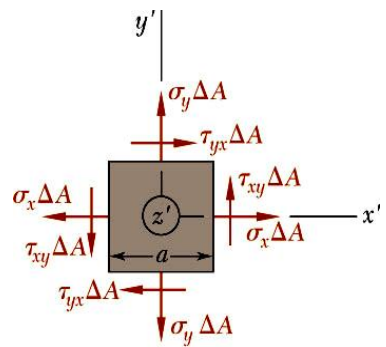


$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= G \gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= G \gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Kaymada Hooke Bağlıntıları}$$

G: kayma modülü (malzeme özelliği)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

2- Boyutlu bir gerilme elemanında z-eksenine göre moment alınırsa :



$$\sum M_z = 0 = (\tau_{xy} \Delta A) a - (\tau_{yx} \Delta A) a$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \text{benzer şekilde;} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

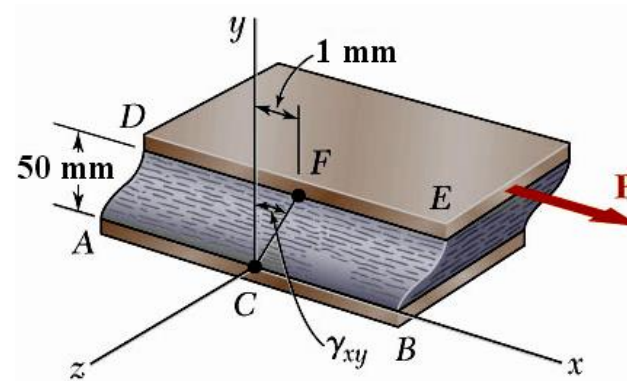
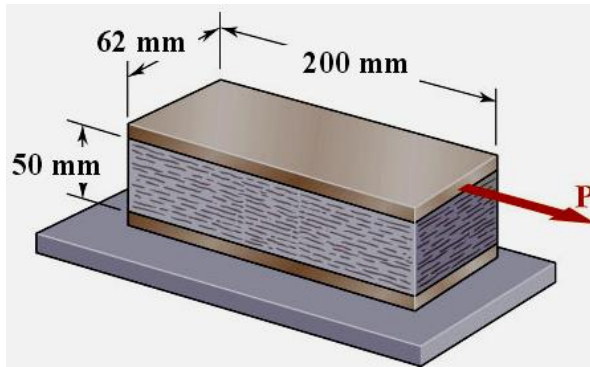
Böylece bir noktadaki genel gerilme durumu 6 gerilme elemanı (bileşen) ile temsil edilebilir.

indisler: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

Düzlem normali Gerilme doğrultusu

Örnek 2.8:

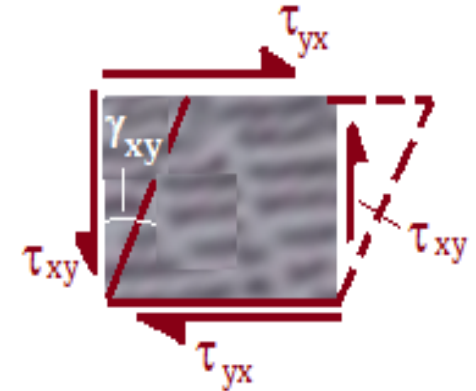
Dikdörtgen prizması şeklindeki bir blok ($G = 630 \text{ MPa}$) iki rijit plakaya yapıştırılmıştır. Alt plaka sabit iken, üst plakaya bir P kuvveti uygulanmıştır. P 'nin etkisi ile üst plaka 1 mm hareket ettiğine göre; malzemedeki ortalama kayma şekil değiştirmesini ve uygulanan P kuvvetini bulunuz.



$$\gamma_{xy} \approx \tan \gamma_{xy} = \frac{1 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} \quad \gamma_{xy} = 0.02 \text{ rad}$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = (630 \text{ MPa})(0.02 \text{ rad}) = 12.6 \text{ MPa}$$

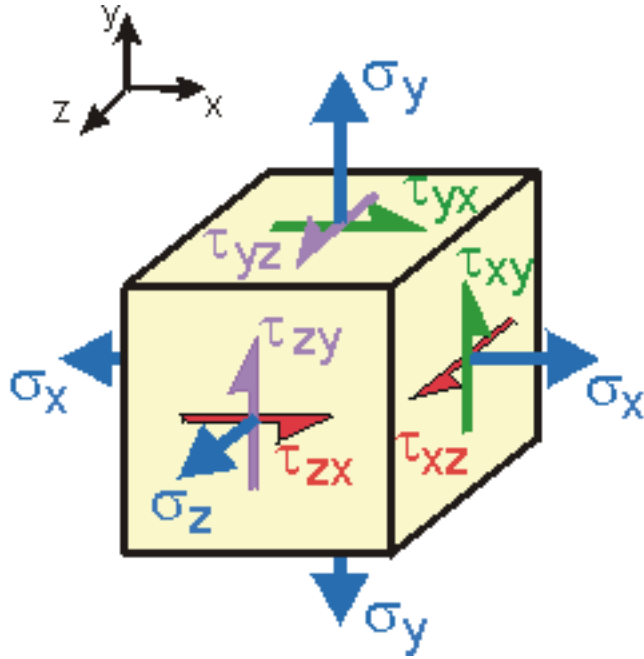
$$P = \tau_{xy} A = (12.6 \text{ MPa})(2008 \text{ mm})(62 \text{ mm}) = 156.2 \times 10^3 \text{ N}$$



2.12 En genel durumda Hooke bağlantıları:

Bir noktada en genel durumda 6 tane bağımsız gerilme bileşeni vardır ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$).

Bu noktadaki elastik şekil değiştirmeler alttaki Hooke bağlantılarından elde edilir.:



Sıcaklık etkisi:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha \Delta T$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

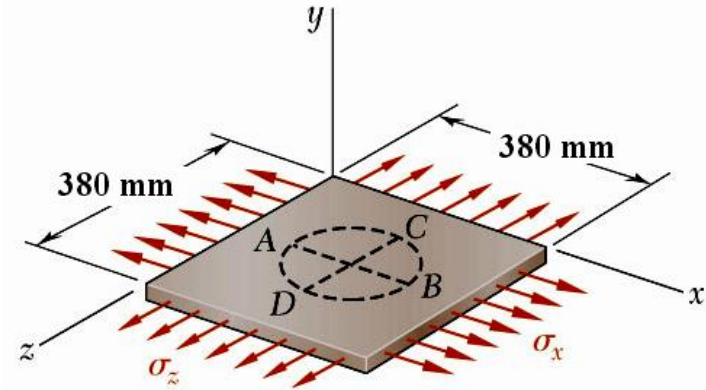
$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

- Normal gerilmelerin kayma şekil değiştirmelerine; kayma gerilmelerinin normal birim uzamalara etkisi yoktur.
- Sıcaklığın kayma gerilmeleri ve kayma şekil değiştirmelerine etkisi yoktur.

Örnek 2.9

Şekildeki plakanın üzerine $d = 225$ mm çapında bir çember çizilmiştir. 18 mm kalınlığındaki plakada düzlemsel kuvvetlerin etkisiyle $\sigma_x = 84$ MPa ve $\sigma_z = 140$ MPa'lık gerilmeler meydana gelmiştir. $E = 70$ GPa ve $\nu = 1/3$, olduğuna göre: a) AB çapındaki, b) CD çapındaki, c) plakanın kalınlığındaki değişimi bulunuz.

**Genel Hooke bağlantılarından**

Normal birim şekil değiştirmeler;

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ &= \frac{1}{70 \times 10^3 \text{ MPa}} \left[84 - \frac{1}{3}(0 + 140) \right] \\ &= +0.533 \times 10^{-3} \text{ mm/mm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ &= -1.067 \times 10^{-3} \text{ mm/mm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ &= +1.600 \times 10^{-3} \text{ mm/mm}\end{aligned}$$

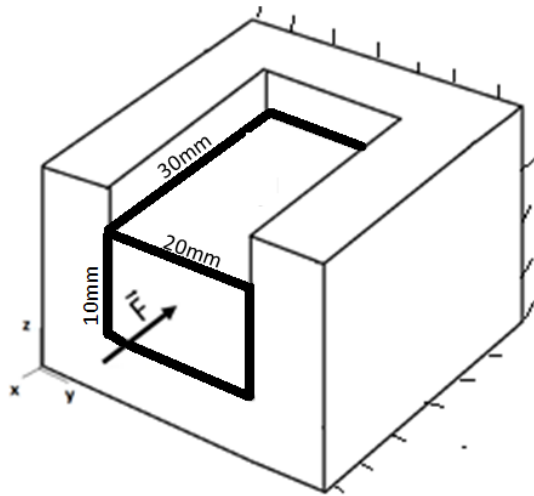
Toplam uzamalar (Deformasyonlar) ;

(Birim uzama x o yöndeki ilk boy)

$$\delta_{B/A} = \varepsilon_x d = (+0.533 \times 10^{-3})(225 \text{ mm}) = 0.12 \text{ mm}$$

$$\delta_{C/D} = \varepsilon_z d = (+1.600 \times 10^{-3})(225 \text{ mm}) = 0.36 \text{ mm}$$

$$\delta_t = \varepsilon_y t = (-1.067 \times 10^{-3})(18 \text{ mm}) = -0.0192 \text{ mm}$$



Örnek 2.10

10x20x30 mm₃ boyutlarındaki bir prizmatik elastik eleman, sabit bir oyukun içine, yüzeyleri temas edecek şekilde yerleştirilmiştir. Bu elemanın dış yüzeyine x eksenine paralel, F=-60kN luk bası kuvveti uygulanmıştır. Sürtünmeler ihmal edilebilir. Buna göre her bir kenar uzunluğundaki değişim miktarlarını hesaplayınız. E=100GPa, ν = 0.3

$$\sigma_x = \frac{F}{A_{\text{ön.}}} = \frac{-60 \times 10^3 \text{ N}}{10 \times 20} = -300 \text{ MPa}$$

σ_y : (yan duvarlardan gelen kuvveti bilmediğimiz için F/A dan hesaplayamayız.)

$\sigma_z = 0 \rightarrow$ (Cismin z doğrultusunda hareketi serbesttir. Yukarı doğru serbestçe şekil değiştirir. Bu sebeple gerilme oluşmaz. Gerilme ancak hareketin sınırlanması durumunda oluşur.)

$\varepsilon_y = 0 \rightarrow$ (y yönünde hareket sınırlı olduğundan o yönde şekil değiştirmez.)

Birim uzamaların hesabı:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{100 \times 10^3 \text{ MPa}} [\sigma_y - 0.3(-300 + 0)] = 0$$

$$\rightarrow \sigma_y = -90 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{100 \times 10^3 \text{ MPa}} [-300 - 0.3(-90 + 0)]$$

$$\rightarrow \varepsilon_x = -0.00273$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{100 \times 10^3 \text{ MPa}} [0 - 0.3(-300 - 90)]$$

$$\rightarrow \varepsilon_z = 0.00117$$

Toplam uzamaların hesabı:

$$\delta_x = \varepsilon_x L_x = -0.00273 \times 30$$

$$\rightarrow \delta_x = -0.0819 \text{ mm}$$

$$\delta_y = \varepsilon_y L_y = 0 \times 20 \rightarrow \delta_y = 0$$

$$\delta_z = \varepsilon_z L_z = 0.00117 \times 10$$

$$\rightarrow \delta_z = 0.0117 \text{ mm}$$



Örnek (Soru) 2.11 : Poğaçı hamurunu bastırıp bir şekle sokarız.

Bu durumda;

a-) x, y, z eksenlerinden hangilerinde gerilme oluşur?

b-) hangi eksenlerde şekil değiştirme oluşur?

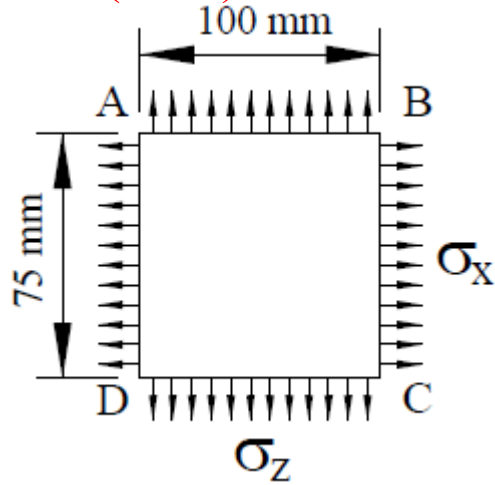
c-) Gerilmeler F/A ile hesaplanabilir mi?

d-) Şekil değiştirmeler Hooke kanunlarıyla hesaplanabilir mi?

Cevapların nedenlerini aranızda tartışınız.

Cevap: a-) z, b-)x, y ve z c-) Evet, d-) Hayır

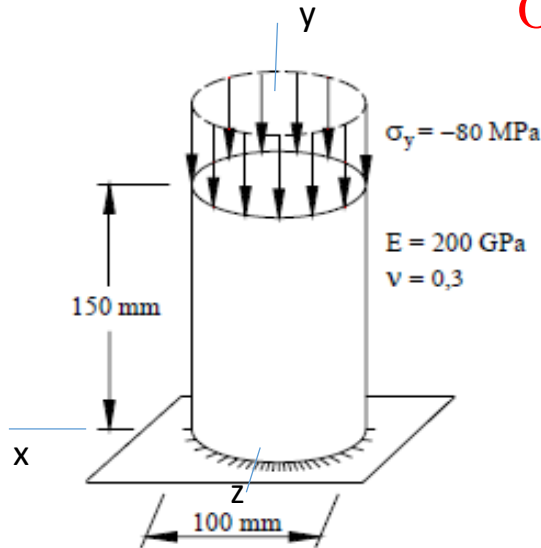
Örnek (Soru) 2.12*



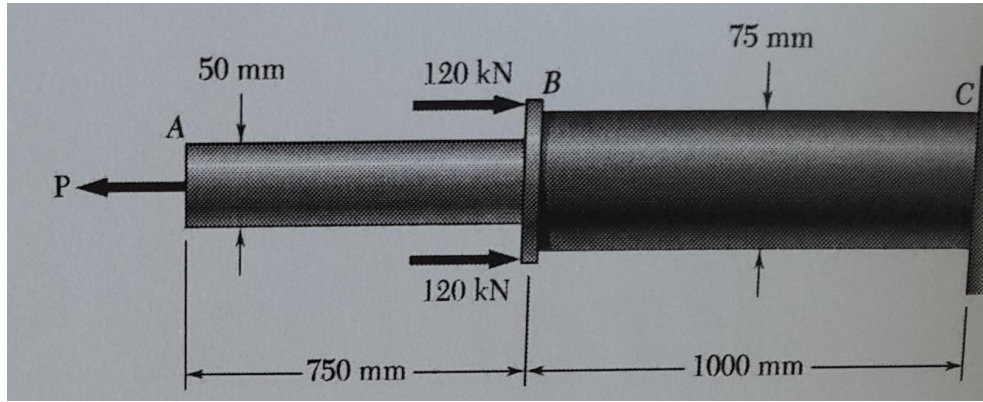
Şekildeki yüklemeye maruz elemanda $\sigma_x = 150 \text{ MPa}$, $\sigma_z = 100 \text{ MPa}$ 'dır. $E = 200 \text{ GPa}$ ve $\nu = 0,3$ olduğuna göre; a) AB kenarının boyundaki değişimi, b) BC kenarının boyundaki değişimi, c) AC kenarının boyundaki değişimi bulunuz.

Cevaplar a-) 0.06mm, b-) 0.0206mm, c-) 0.06mm

Örnek (Soru) 2.13*

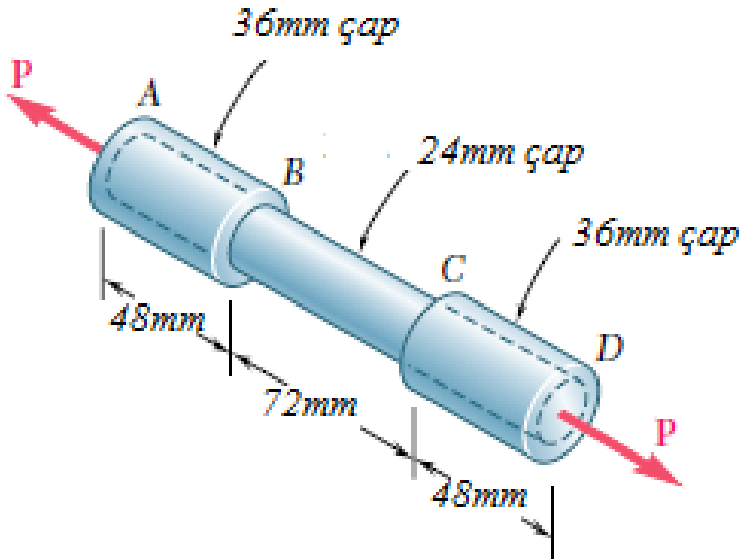


Şekildeki çelik silindir, alt ucundan ankastre olup dış kuvvetler sonucu üst yüzeyinde -80MPa lık bası gerilmesi oluşmuştur. Buna göre silindirin hacmi ne kadar değişir? Cevap: -188.48 mm^3



Örnek (Soru) 2.14* Şekildeki kademeli milde AB kısmındaki gerilmenin BC kısmındakinin 2 katı çıkması için P kuvvetinin değerini hesaplayınız.

Cevap: $P=112.9\text{ kN}$

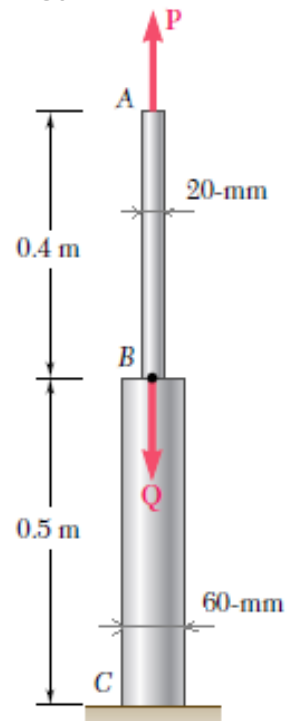


Örnek (Soru) 2.15* : 24mm çaplı AD çelik çubuğunun her iki ucuna aynı malzemeden AB ve CD kapakları sıkı geçirilmiştir. a-) Sistemin toplam uzamasını 0.04mm yapacak P çekme kuvvetini bulunuz.

b-) Bulduğunuz P kuvveti etkisiyle BC kısmının uzama miktarını hesaplayınız.

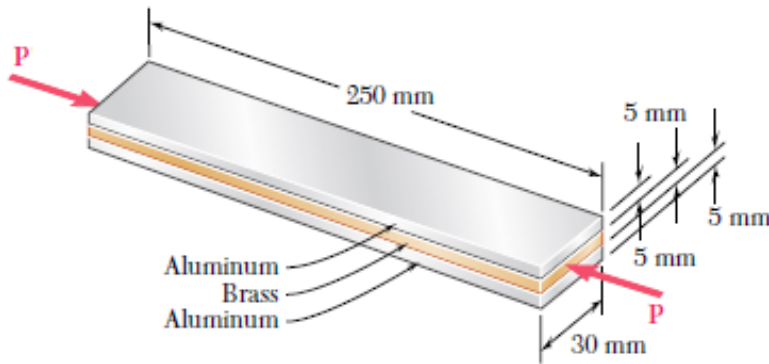
Elastiklik Modülü $E=200\text{ GPa}$ alınız.

Cevap: a-) $P=31.6\text{ kN}$, b-) $\delta_{BC} = 0.025\text{ mm}$



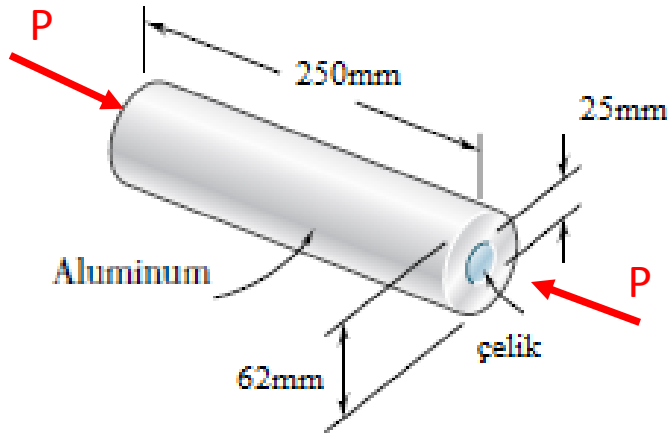
Örnek (Soru) 2.16: Şekildeki Alüminyum kademeli çubuğa $P=4\text{kN}$ luk çeki, $Q = 32.8\text{kN}$ luk bası kuvveti uygulanıyor. Buna göre çubuğun toplam uzama miktarını hesaplayınız.

Cevap: 0

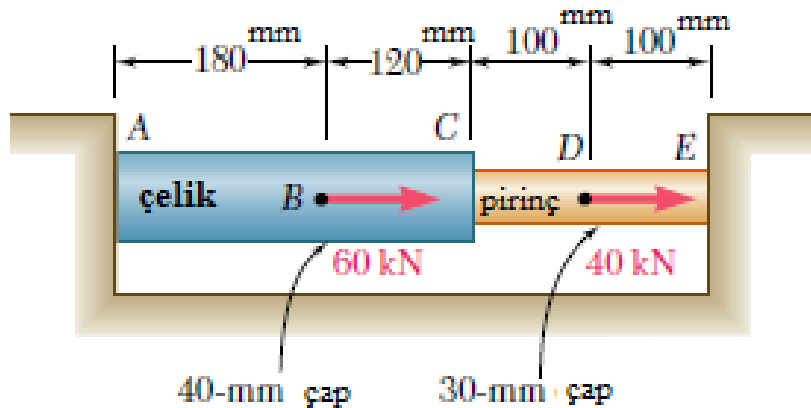


Örnek (Soru) 2.17* İki alüminyum levhanın arasına pirinç bir başka levha yerleştirilerek yapıştırılmış ve şekildeki kompozit plaka elde edilmiştir. Alüminyum ve Pirinç levhaların herbirisi $250 \times 30 \times 5\text{mm}$ boyutlarına sahiptir. Kompozit levhaya uygulanan eksenel $P = -30\text{kN}$ luk bası kuvveti etkisi ile alüminyum ve pirinç levhalarda oluşan normal gerilmeleri hesaplayınız.

Cevap: $\sigma_{\text{ALÜM.}} = -51.1 \text{ MPa}$, $\sigma_{\text{PİRİNÇ}} = -85.7 \text{ MPa}$



Örnek (Soru) 2.18 25 mm çapında çelik mil bir alüminyum tüpün içine yerleştirilmiştir. Bu sisteme $P = 160\text{kN}$ luk bası kuvveti uygulandığında a-) Çelik ve Alüminyum'da ortaya çıkan gerilmeleri b-) Herbirisinin boyundaki değişim miktarlarını hesaplayınız. ($E_{\text{çelik}} = 200\text{GPa}$, $E_{\text{alüm.}} = 70\text{GPa}$)
Cevap: a-) $\sigma_{\text{çelik}} = -116.3\text{ MPa}$, $\sigma_{\text{alüm.}} = -40.7\text{ MPa}$
b-) -0.145 mm



Örnek (Soru) 2.19 Çelik ve pirinçten oluşturulan kademeli çubuk, her iki ucunda iki sabit duvar arasına yerleştirilmiş, B ve D noktalarından sırasıyla 60kN ve 40kN luk eksenel kuvvetlere maruz bırakılmıştır. Buna göre çelik pirinçte oluşan maksimum gerilmeleri hesaplayınız. ($E_{\text{çelik}} = 200\text{GPa}$ ve $E_{\text{pirinç}} = 105\text{GPa}$)
(Cevap: $\sigma_{AB} = 53,98\text{MPa}$, $\sigma_{DE} = -52,65\text{MPa}$)

3

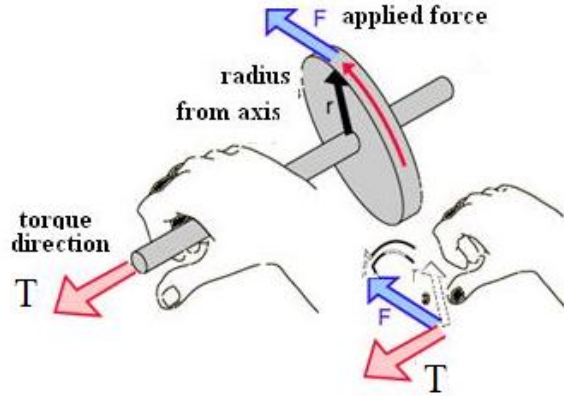
BURULMA

(TORSION)

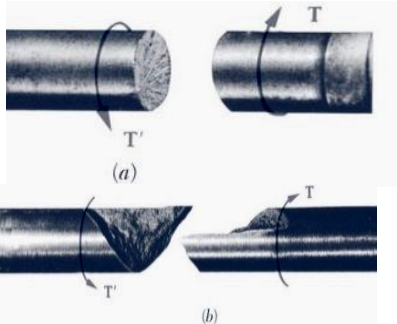
Dairesel Kesitli Çubukların (Millerin) Burulması



Burulma (Torsion): Dairesel Kesitli Millerde Gerilme ve Şekil Değişiklikler



Hasar şekilleri



Sünek malzeme

Gevrek malzeme



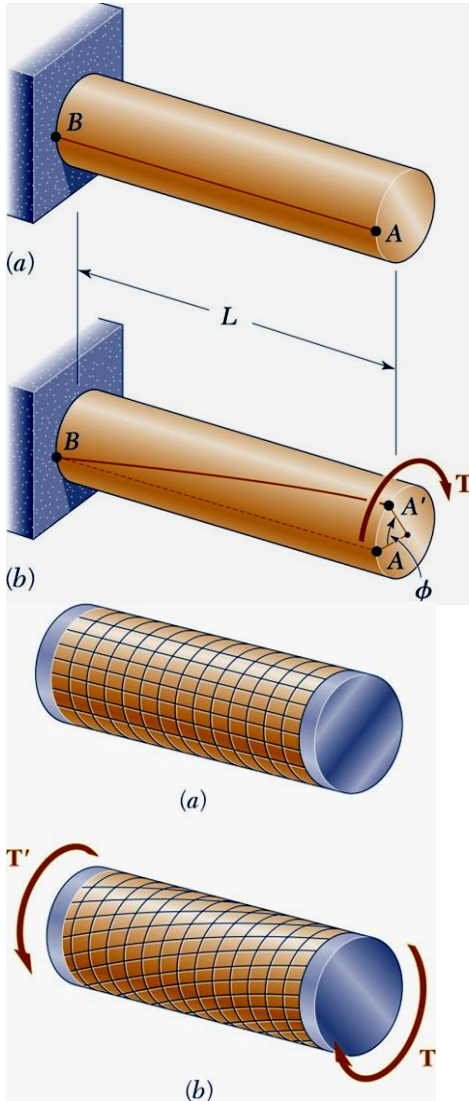
Endüstriyel uygulamalarda en çok rastlanan yükleme tiplerinden birisi dairesel kesitli millere gelen burulma momentleridir.

Burulma momenti vektörü sağ el kaidesine göre çubuk eksenini doğrultusundadır.

Bu konuda ilk amacımız burulma momenti sebebiyle mil kesitinde (dairesel kesitte) oluşan gerilmelerin dağılımını bulmak ve her bir noktadaki değerini hesaplamaktır.



Aslında amaşıır sıkmak, teknik anlamda amaşııra her iki ucundan burulma momenti uygulamak demektir.



3.1 Millerin burulması için yapılan kabuller

Dairesel kesitli çubuk elemanlara mil (ingilizcesi: shaft) denir.

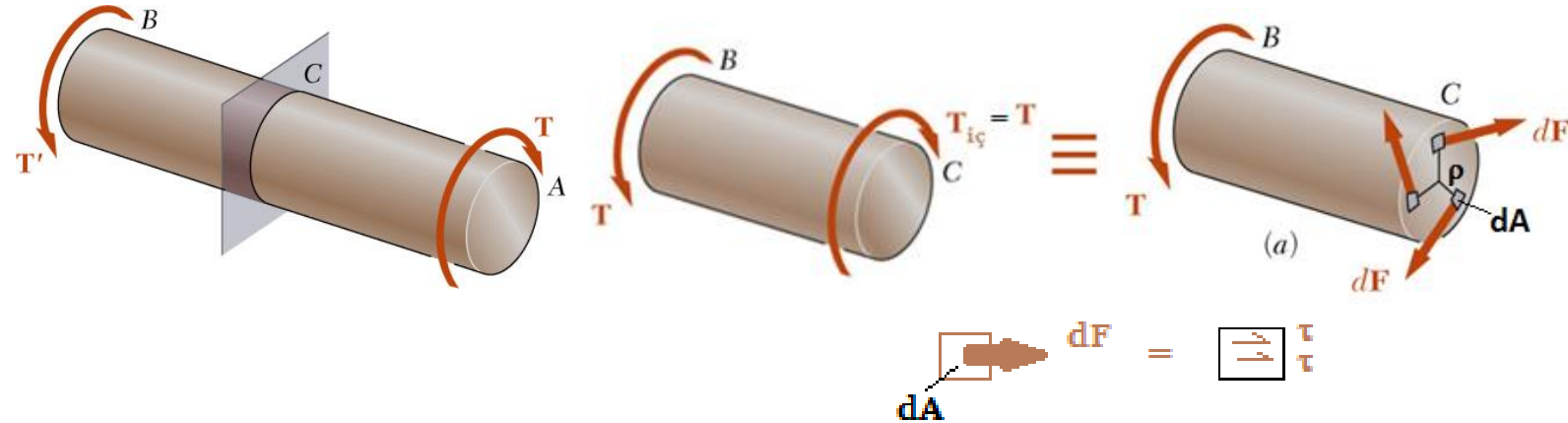
Gözlemlere dayanarak, burulmaya maruz bir milde, elastik sınırlar içerisinde aşağıdaki kabullerin yapılabilir:

- 1- Dönme veya başka ifade ile burulma açısı (ϕ) uygulanan tork değeri ve uzunlukla doğru orantılı olarak değişir.
- 2- Tüm düzlem dairesel kesitler düzlem kalır ve şekli değişmez. Kesitlerde herhangi bir çarpılma olmaz. (Dairesel kesitli olmayan elemanlarda çarpılma oluşur)
- 3- Kesit üzerine çizilen (markalanan) bir çap çizgisi burulma sonrası yine düz kalır.

Bu kabüllerden yola çıkarak, dairese kesitli bir çubuk elemanda elastik yüklemde, burulma sonrası oluşan gerilme dağılımları ve şekil değıştirmeler hesaplanabilir.

(**Dairesel kesitli olmayan parçalarda** bu kabüller yapılamaz. Bu tip elemanlarda burulma sırasındaki gerilme ve şekil değıştirmelerin hesap yaklaşımları ve formülleri tamamen farklıdır. Bu konu ders kapsamımızın dışındadır.)

3.2 Gerilme ve Şekil Değiştirme Hesabı:



Bir mil her iki ucundan elastik sınırlar içinde burulma momentine maruz olsun. Denge halindeki milin hayali bazda ayırdığımız her bir parçası da iç ve dış kuvvetlerin etkisi ile dengededir (ayırma prensibi)

dF : dA diferansiyel elemanına düşen iç kuvvet

$\int \rho dF$: dF kuvvetlerinin merkeze göre momentlerinin toplamı : iç momente eşittir.

$$T_{iç} = T = \int \rho dF = \int \rho(\tau dA)$$

3.2 Gerilme ve Şekil Değiştirme Hesabı -devam:

Kayma şekil değiştirmesi dönme açısı ve radyüsle orantılıdır

$$AA' \text{ yay uzunluğu} = L\gamma = \rho\phi \rightarrow \gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

(Hooke Bağıntısı) $\tau = G\gamma = G.\rho.\frac{\phi}{L}$

$$\rightarrow T = \int \rho\tau dA = \int \rho.G.\rho.\frac{\phi}{L} dA = G.\frac{\phi}{L} \int \rho^2.dA$$

$$\int \rho^2.dA : J : \text{kesitin polar atalet momenti} \rightarrow T = G.\frac{\phi.J}{L}$$

$$\rightarrow \phi = \frac{T.L}{G.J} \quad (D 3.1) \rightarrow \tau = \frac{G.\rho}{L} \cdot \frac{T.L}{G.J} \rightarrow \tau = \frac{T\rho}{J} \quad (D 3.2)$$

D 3.1 ve D3.2 denklemleri elastik yükleme ve miller için geçerlidir.

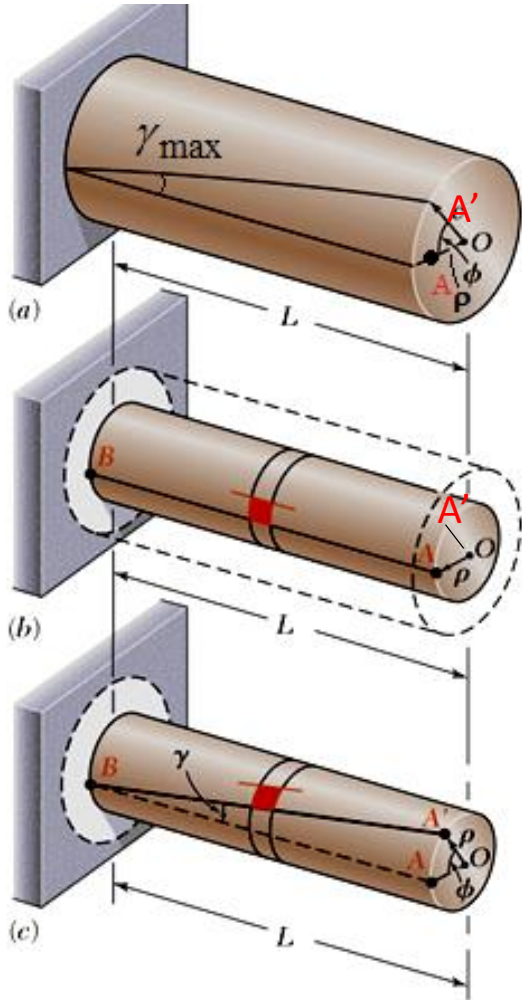
T : burulma momenti (tork) (N.mm)

τ : kayma gerilmesi (N/mm²)

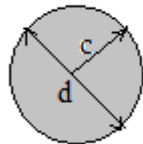
ϕ : burulma (dönme) açısı (radyan)

J : dairesel kesitin polar atalet momenti (mm⁴)

G : Malzeme Rijitlik modülü (MPa)

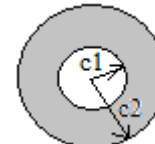


İçi dolu mil



$$J = \frac{1}{2} \pi c^4 = \frac{1}{32} \pi d^4$$

İçi boş mil



$$J = \frac{1}{2} \pi (c_2^4 - c_1^4) = \frac{1}{32} \pi (d_2^4 - d_1^4)$$

3.3 Dairesel kesitteki kayma gerilmesi dağılımı:

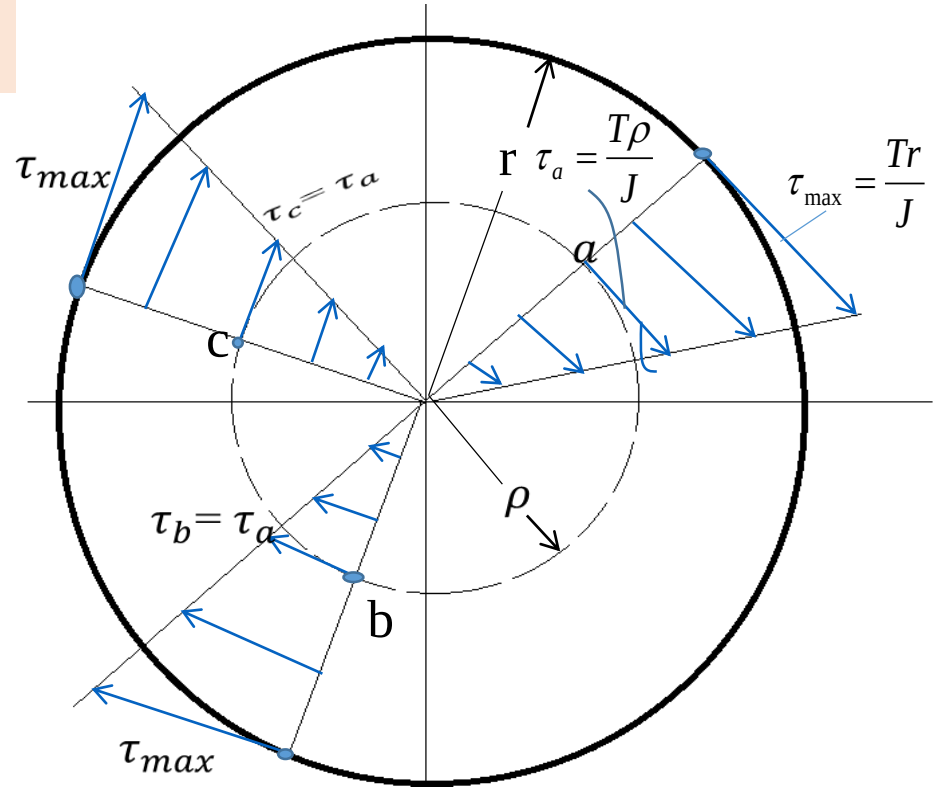
Kesit merkezinden ρ kadar uzak bir noktada kayma gerilmesi D 3.2 denkleminde :

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

Bir kesitteki T ve J değeri sabittir. Değişen sadece merkezden olan uzaklık (ρ) değeridir.

Buna göre:

- 1- merkezden aynı uzaklıktaki yani aynı çember üzerindeki noktalardaki (örn: a, b, c noktalarındaki) gerilmeler birbirlerine eşittir.
- 2-Dışa doğru gidildikçe ρ artacağı için, gerilmeler de (doğrusal olarak) artar.



3. Maksimum gerilme en dış çemberde ortaya çıkar. Zira dış çemberde $\rho_{\max} = r$ dir.

4. Merkezde ise $\rho=0$ olduğu için gerilme sıfırdır.

4. Kayma gerilmeleri çemberin o noktadaki teğeti doğrultusundadır.

$$\tau_{\max} = \frac{T\rho_{\max}}{J} = \frac{T.c}{J}$$

Bazen r yerine c kullanılabilir.

3.4 Burulmada Şekil Değiştirme:

3.4.1 Elastik Bölgede Burulma Açısı (ϕ)

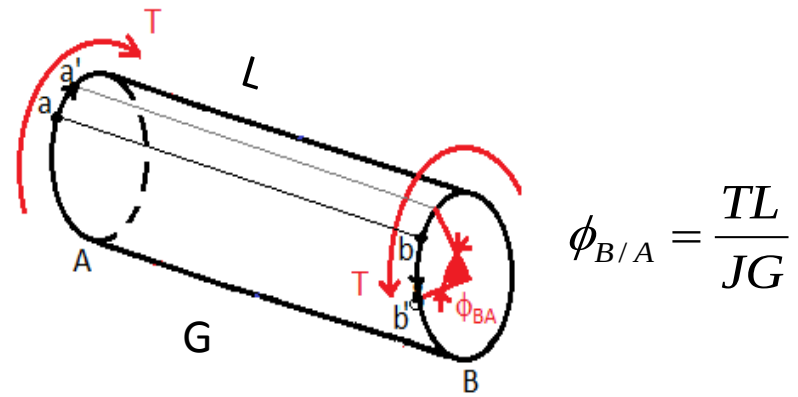
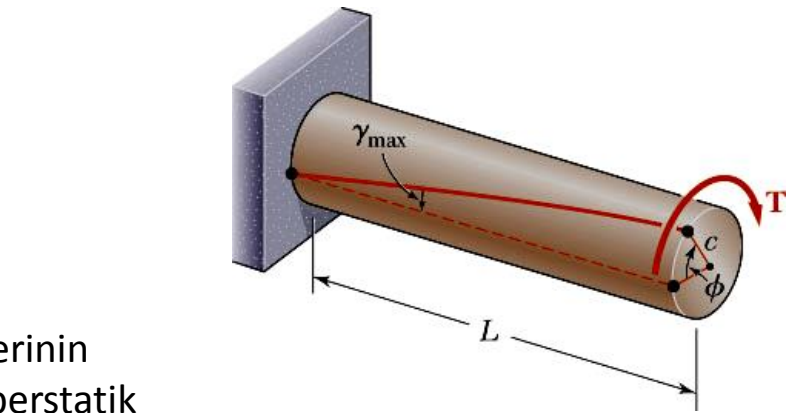
D 3.1 denkleminde

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

olarak bulmuştuk. Bu açı mil eksenini (x) etrafında mil kesitlerinin birbirlerine göre dönme miktarını verir. Ve burulmadaki hiperstatik problemler için kullanılır.

Bu formül milin öyle bir kısmına uygulanabilir ki; o kısımda

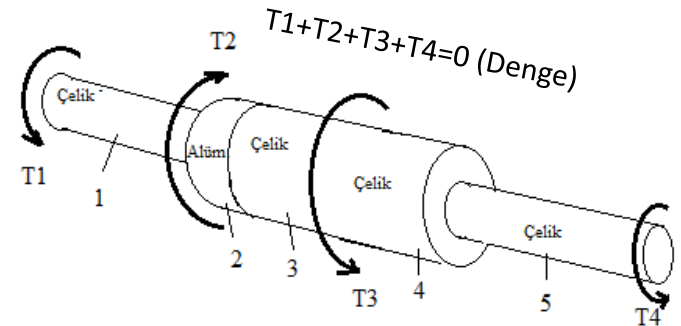
- her iki uç kesitte eşit ve zıt T burulma momenti vardır. Arada başka bir moment yoktur.
- L boyunca malzeme ve kesit geometrisi aynıdır.
- Yandaki şekli inceleyerek ϕ açısını iyice anlamaya çalışınız.



Kademeli millerde Burulma açısı:

- Yukarıdaki şartlardan en az birisi sağlanamıyorsa mil kademelidir ve yine bölgelere ayrılır. Herbir bölgede, L boyunca; T (dış yük), J(kesit) ve G (malzeme) sabit olmalıdır. Bunlardan birisi değişirse bölge değişir.

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$

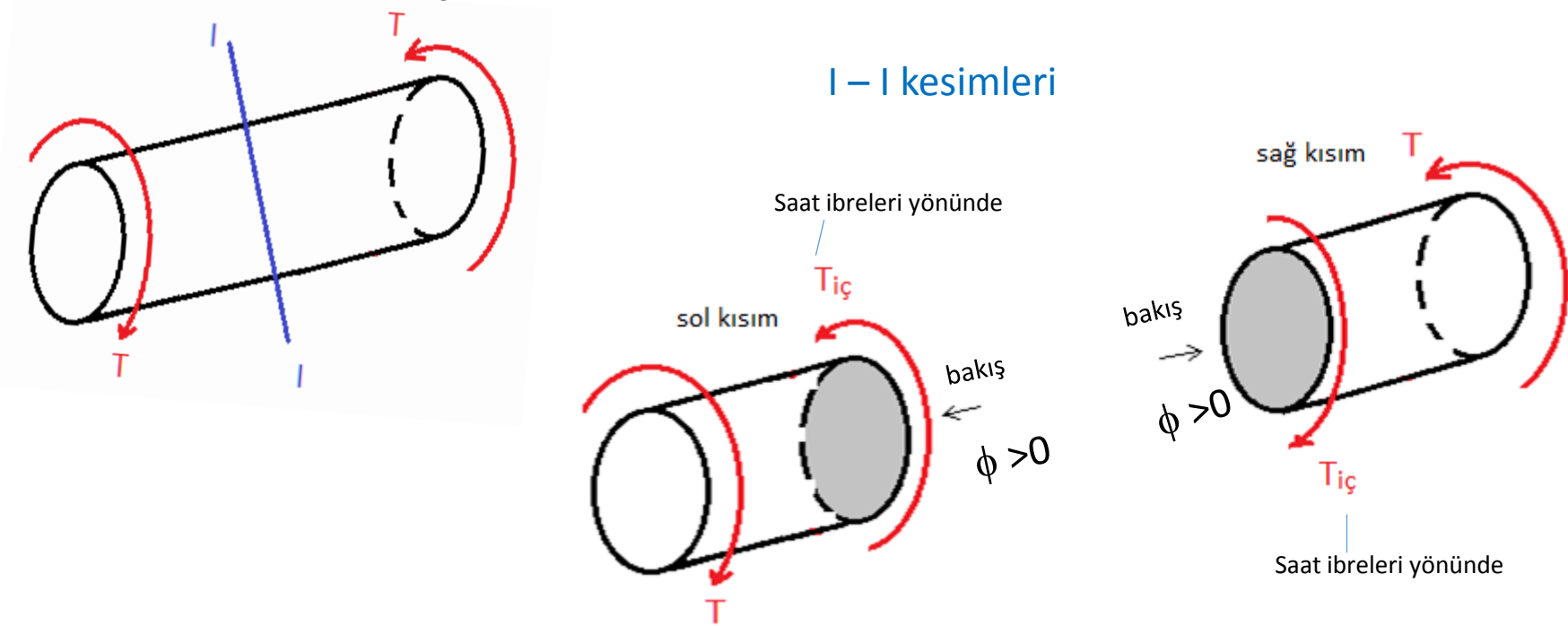


Kademeli mil örneği

3.4.2 (ϕ) açısının işareti:

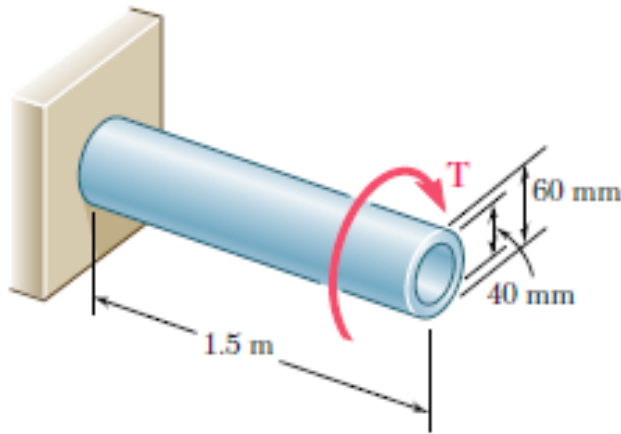
İncelediğimiz kesite karşıdan dik olarak baktığımızda kesitteki iç moment ($T_{iç}$) yönü saat ibreleri yönünde ise ϕ açısı pozitif (+) alınır.

Saat ibreleri tersi yönünde ise işareti negatif (-) alınır. Aşağıdaki şekilleri dikkatlice inceleyiniz.



Örnek 3.1:

Şekildeki boru için emniyetli kayma gerilmesi değeri 120 MPa olduğuna göre emniyet sınırları içerisinde uygulanabilecek burulma momentini ve bu momente karşılık gelen minimum kayma gerilmesini bulunuz.



$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot c}{J}$$

$$\longrightarrow T = \frac{J \tau_{\max}}{c}$$

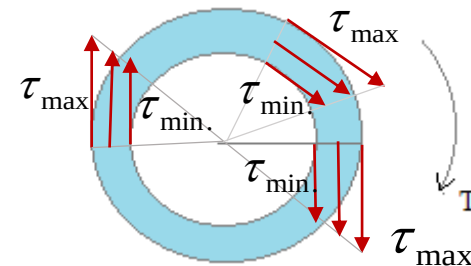
c: yarıçap

İçi boş kesitin polar atalet momenti:

$$J = \frac{1}{2} \pi (c_2^4 - c_1^4) = \frac{1}{2} \pi (30^4 - 20^4) = 1021 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$T = \frac{J \tau_{\max}}{c} = \frac{(1021 \times 10^3 \text{ mm}^4)(120 \text{ MPa})}{30 \text{ mm}} = 4080 \times 10^3 \text{ Nmm} = 4.08 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\tau_{\min} = \frac{T c_{\min}}{J} = \frac{4080 \times 10^3 \text{ Nmm} \times 20 \text{ mm}}{1021 \times 10^3 \text{ mm}^4} = 80 \text{ N/mm}^2 = 80 \text{ MPa}$$



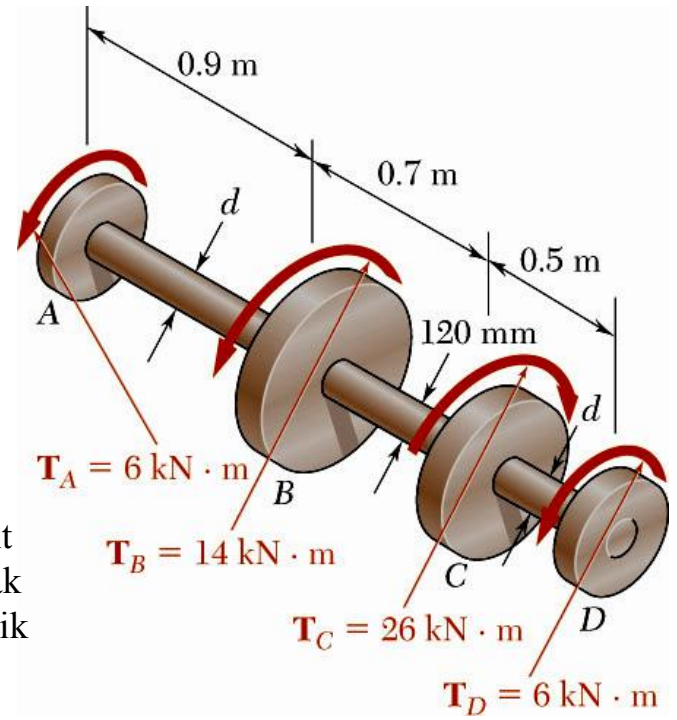
Örnek 3.2:

Şekildeki kademeli milin BC kısmının içi boştur ve iç çapı 90 mm, dış çapı 120 mm'dir. Diğer kısımların içi dolu ve çapları " d " dir.

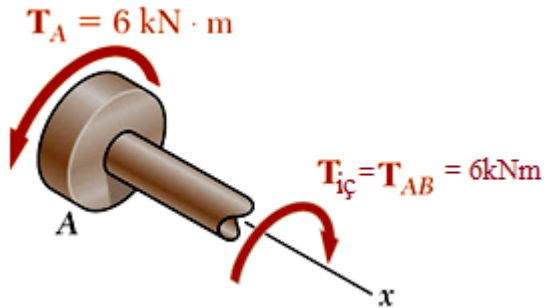
Buna göre;

- AB ve CD kısımları için izin verilebilir (emniyetli) kayma gerilmesi değeri 65 MPa ise « d » minimum ne olmalıdır?
- BC kısımindaki maksimum ve minimum kayma gerilmelerini bulunuz.

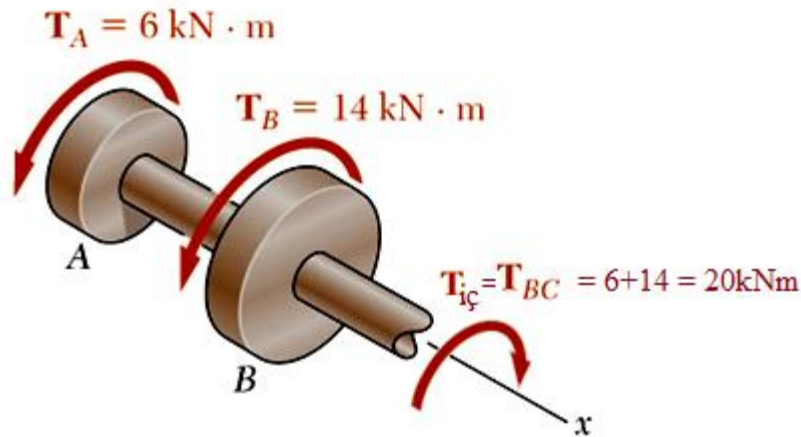
Çözüm: A ucundan başlayıp D ye kadar mili bölgelere ayıracağız. Ani Moment (T) ve mil kesiti değiştiğinde (J) bölge değişir. Buna göre AB, BC ve CD olmak üzere 3 bölge vardır. Şimdi herbir bölgeye ayırma prensibi uygulayacağız, statik dengeden iç momentleri tespit edeceğiz ve bu iç momentleri gerilme formülünde yerine koyacağız.



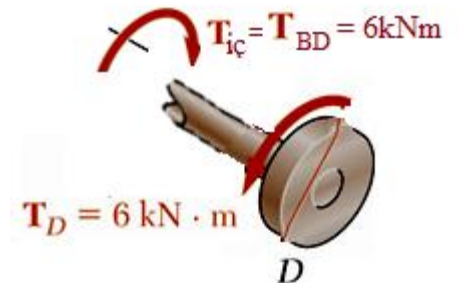
AB bölgesi



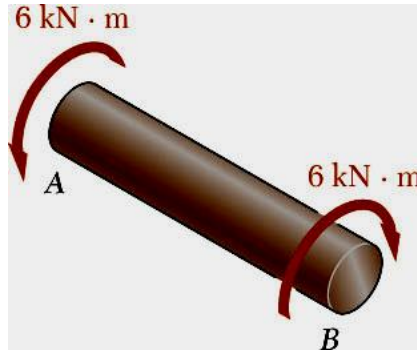
BC bölgesi



CD bölgesi



a)



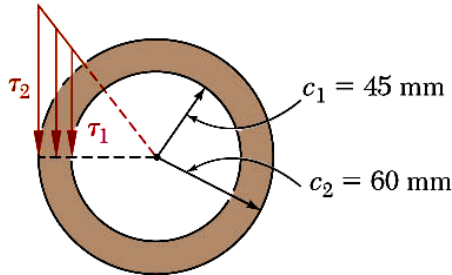
$$\tau_{\max} = \frac{T_{AB} \cdot c}{J} = \frac{T_{AB} \cdot c}{\frac{\pi}{2} c^4} = \tau_{\text{emn.}} \rightarrow \frac{6 \times 10^6 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{2} c^3} = 65 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow c = 38.9 \text{ mm}$$

$$d = 2c = 77.8 \text{ mm}$$

* CD kısmı içinde, iç moment değeri aynı olduğundan aynı sonuç bulunur.

b)



$$J = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2} [(60 \text{ mm})^4 - (45 \text{ mm})^4] = 1392 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{\max} = \tau_2 = \frac{T_{BC} c_2}{J} = \frac{(20 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm})(60 \text{ mm})}{1392 \times 10^4 \text{ mm}^4} = 86.2 \text{ MPa}$$

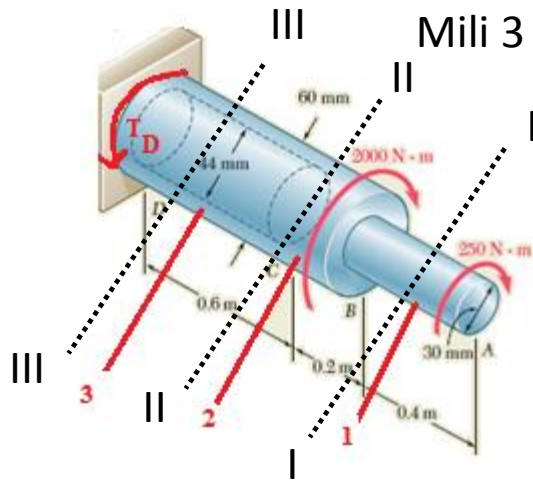
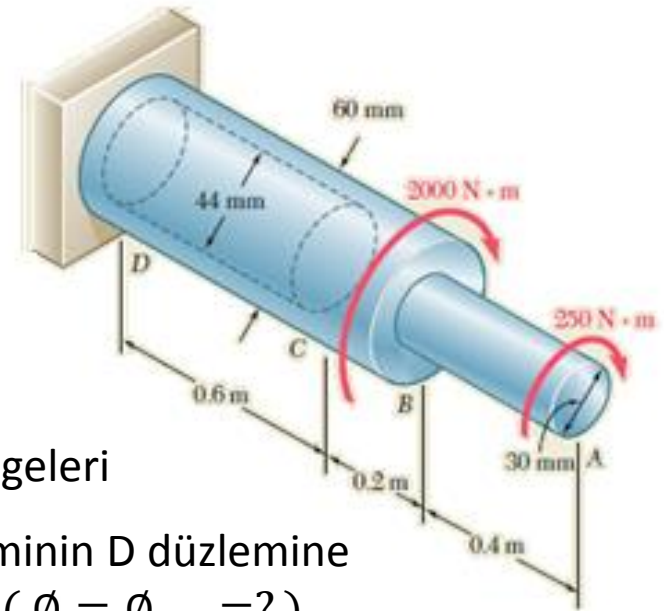
$$\tau_{\min} = \tau_2 = \frac{T_{BC} c_1}{J} = \frac{(20 \times 10^6)(45)}{1392 \times 10^4} = 64.7 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = 86.2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\min} = 64.7 \text{ MPa}$$

Örnek 3.3: Şekildeki çelik kademeli milin kayma modülü $G=77 \text{ GPa}$ olduğuna göre A ucunun toplam dönme (burulma) açısını bulunuz.

Çözüm: Statik dengeden ankastre uçtaki tepki momenti $T_D = 2250 \text{ kNm}$ çıkar. Ancak kesimlerde sağ kısmı alırsak bunu bulmamıza gerek yoktur.



Mili 3 bölgeye ayırabiliriz. DC, CB, BA bölgeleri

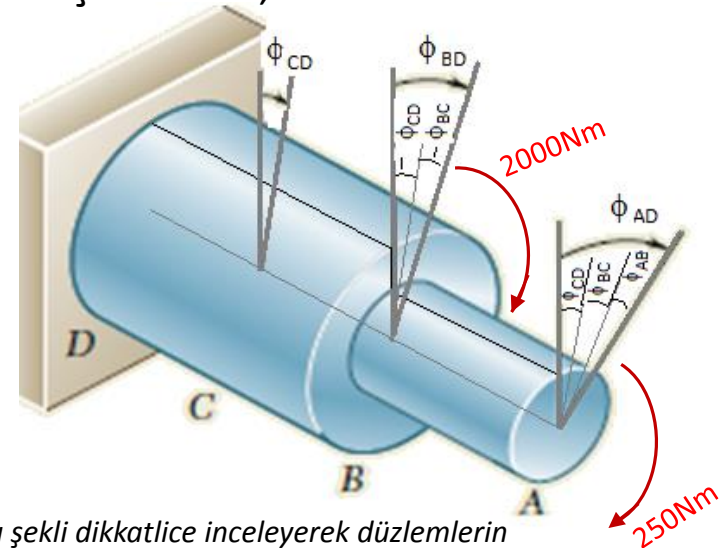
Aslında bizden sorulan A düzleminin D düzlemine göre dönme (burulma) açısıdır. ($\phi = \phi_{AD} = ?$)
Bu ise D den A ya kadar olan bölgelerin birbirlerine göre dönmelerinin toplamına eşittir. Yani;

$$\phi_{AD} = \phi_{CD} + \phi_{BC} + \phi_{CA}$$

↓
C nin D'ye göre dönme açısı

Şunu farkettiler mi?

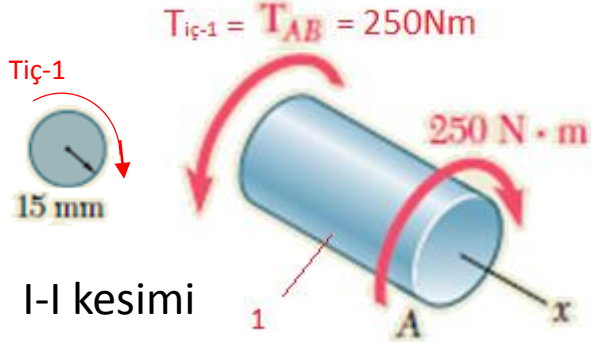
Aslında A düzlemi $\phi_{CD} + \phi_{BC}$ kadar ötelenir, 250Nm lik burulma momenti etkisiyle ϕ_{AB} kadar şekil değiştirir. Bu durumda toplam dönmesi (ϕ_{AD}) bu üç açının toplamı kadar olur.



Bu şekli dikkatlice inceleyerek düzlemlerin birbirlerine göre dönme açılarını anlamaya çalışın.

Şimdi bölgeleri sırayla inceleyip ayırma prensibine göre iç momentleri bulacağız. Unutmayın, ϕ formülünde T değeri bölgenin kesiminden elde ettiğimiz iç moment değeridir.

1.Bölge: AB kısmı



$$L_1 = 400 \text{ mm}$$

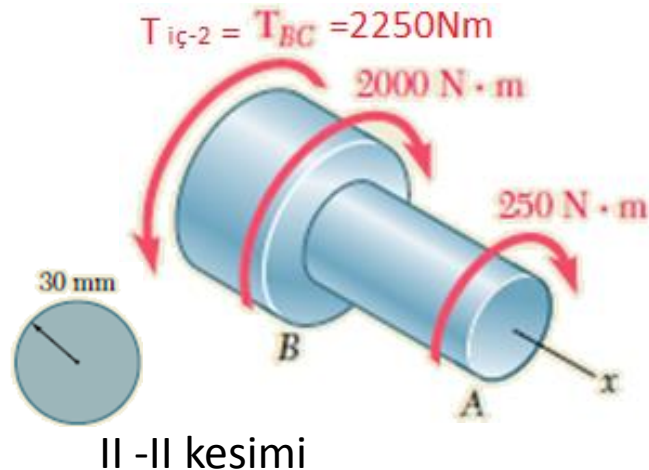
$$J_1 = J_{AB} = \frac{\pi}{2} c_1^4 = \frac{\pi}{2} 15^4 = 795000 \text{ mm}^4$$

$$\phi_{AB} = + \frac{T_{iç-1} \cdot L_1}{G \cdot J_1} = \frac{T_{AB} \cdot L_1}{G \cdot J_1} = \frac{250 \times 10^3 \text{ Nmm} \cdot 400 \text{ mm}}{77000 \text{ MPa} \cdot 795000 \text{ mm}^4} = 0.01634 \text{ rad}$$

I-I kesitine dik ve karşıdan bakıldığında $T_{iç-1}$ saat ibreleri yönünde olduğundan ϕ pozitiftir.

2.Bölge: CB kısmı

$$\text{Statik denge şartı : } \sum M_x = 0 \rightarrow T_{BC} - 2000 - 250 = 0 \rightarrow T_{BC} = 2250 \text{ Nm}$$

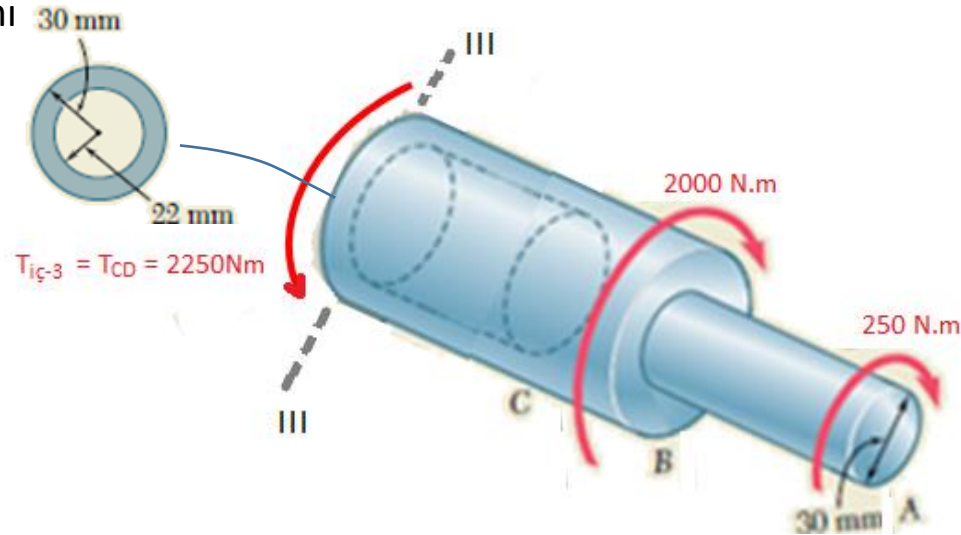


$$L_2 = 200 \text{ mm}$$

$$J_2 = J_{BC} = \frac{\pi}{2} c_2^4 = \frac{\pi}{2} 30^4 = 1272000 \text{ mm}^4$$

$$\phi_{BC} = + \frac{T_{iç-2} \cdot L_2}{G \cdot J_2} = \frac{T_{BC} \cdot L_2}{G \cdot J_2} = \frac{2250 \times 10^3 \text{ Nmm} \cdot 200 \text{ mm}}{77000 \text{ MPa} \cdot 1272000 \text{ mm}^4} = 0.00450 \text{ rad}$$

3.Bölge: CD kısmı



$$L_3 = 600 \text{ mm}$$

$$J_3 = J_{CD} = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2} (30^4 - 22^4) = 904000 \text{ mm}^4$$

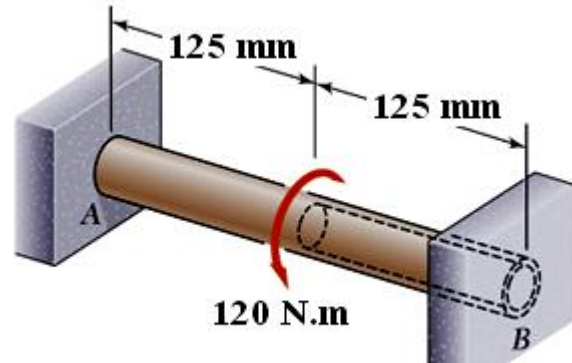
$$\phi_{CD} = + \frac{T_{i\zeta-1} \cdot L_1}{G \cdot J_1} = \frac{T_{AB} \cdot L_1}{G \cdot J_1} = \frac{250 \times 10^3 \text{ Nmm} \cdot 600 \text{ mm}}{77000 \text{ MPa} \cdot 904000 \text{ mm}^4} = 0.01939 \text{ rad}$$

$$\phi_{AD} = \sum \frac{T_i \cdot L_i}{G_i \cdot J_i} = \phi_{CD} + \phi_{BC} + \phi_{CA} = 0.01634 + 0.00450 + 0.01939 = 0.0403 \text{ rad}$$

$$\phi_{AD} = 0.0403 \times \frac{180}{\pi} = 2.31^\circ$$

3.5 Burulmada hiperstatik mil problemleri: Bilinmeyen tepkileri bulmak için statik denklem sayısının yeterli olmadığı burulma problemlerine denir. Önceden bilinen burulma açısından ek denklemler elde edilerek bilinmeyen tepkiler bulunabilir. Bu konuyu örneklerle anlamaya çalışacağız.

Örnek 3.4:



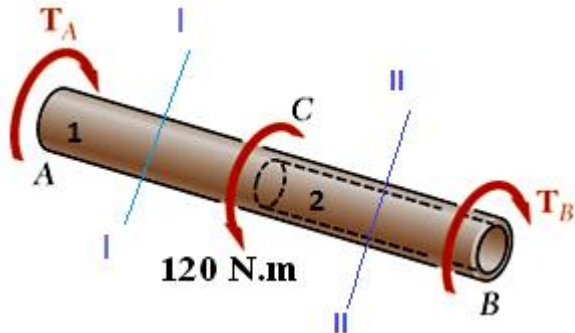
Şekildeki milin (yarısının içi boş) dış çapı 22 mm ve içi boş kısmın iç çapı ise 12 mm dir. Mil A ve B noktalarından sabitlenmiştir. Milin tam ortasına 120 N.m lik bir tork uygulandığında A ve B noktalarında meydana gelen reaksiyon momentlerini bulunuz?

Çözüm:

$$\text{Statik dengeden: } T_A + T_B = 120 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (1)$$

B ve A ankastre olduğu için, bu kısımlarda dönme olmaz. Dolayısıyla toplam dönme açısı (B nin A ya göre burulma açısı) sıfırdır.

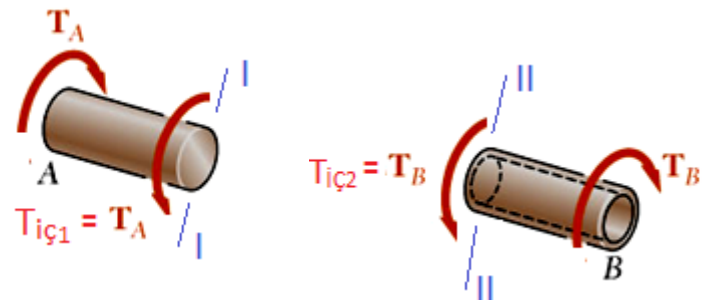
Mili iki bölgeye ayırırız.



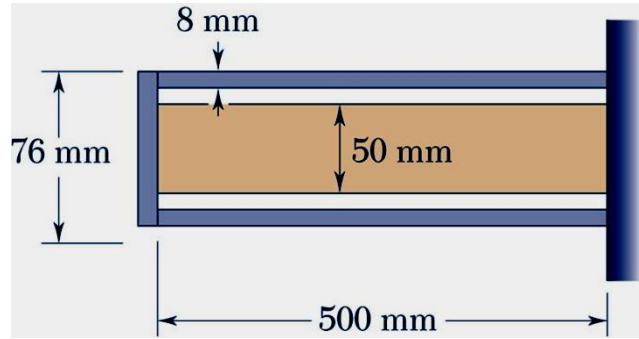
$$\phi = \phi_{B/A} = \phi_{C/A} + \phi_{B/C}$$

$$-\frac{T_A L_1}{GJ_1} + \frac{T_B L_2}{GJ_2} = 0 \rightarrow L_1 = L_2 = 125 \text{ mm} \rightarrow T_B = \frac{J_2}{J_1} T_A$$

$$\begin{aligned} & \frac{\pi \cdot (c_2^4 - c_1^4)}{2} T_A = \frac{11^4 - 6^4}{11^4} T_A \rightarrow T_B = 0.91 T_A \quad (2) \\ & = \frac{\pi \cdot c_2^4}{2} T_A \end{aligned}$$



$$(1) \text{ ve } (2) \text{ den } T_A = 62.82 \text{ N} \cdot \text{m} , T_B = 57.18 \text{ N} \cdot \text{m}$$



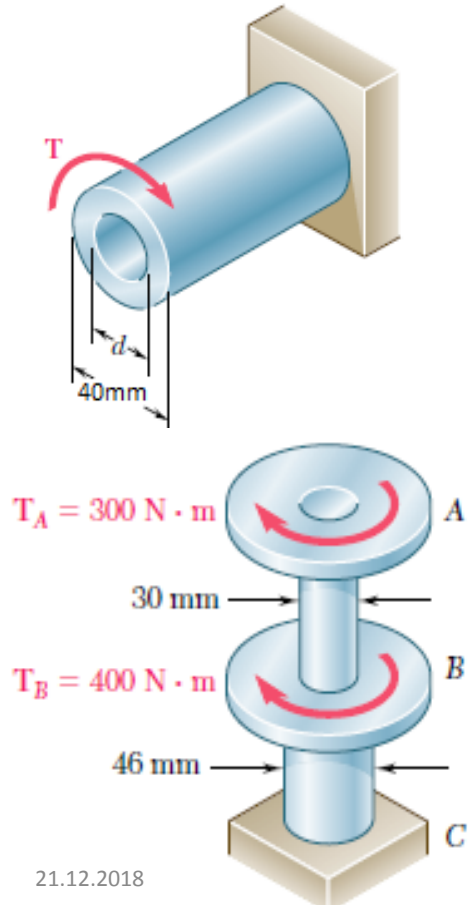
Örnek 3.5*

Sağ taraftan sabitlenmiş çelik bir mil ile alüminyum bir tüp, şekildeki gibi rijit bir diske bağlanmıştır. Çelik mil ve alüminyum tüp için emniyetli kayma gerilmeleri sırasıyla 120 MPa ve 70 MPa olduğuna göre; disk vasıtasıyla sisteme uygulanabilecek maksimum tork değerini bulunuz.

($G_{\text{Alüm.}} = 27 \text{ GPa}$, $G_{\text{Çelik}} = 77 \text{ GPa}$)

Örnek (Soru) 3.6

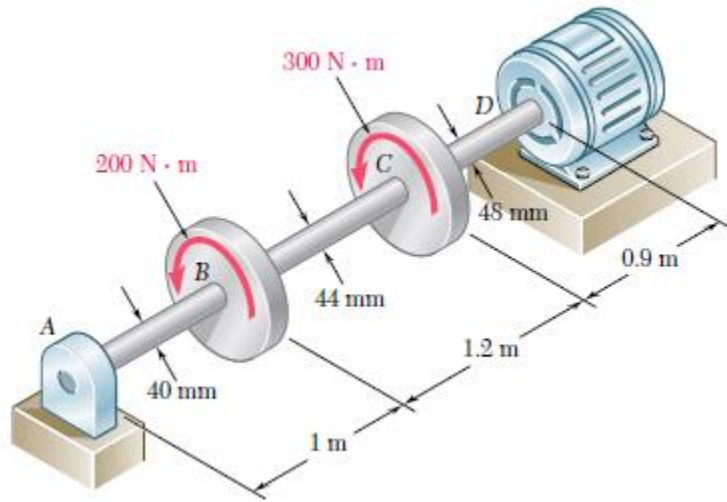
Şekildeki ankastre boruya emniyet sınırları içinde uygulanabilecek maksimum burulma momenti (T) değerini hesaplayınız. ($d = 30 \text{ mm}$, $\tau_{\text{emn.}} = 52 \text{ MPa}$) (Cevap: $T = 446.7 \text{ Nm}$)



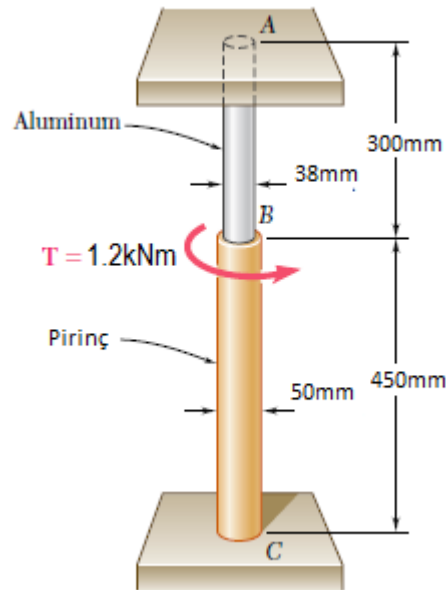
Örnek (Soru) 3.7

Şekildeki kademeli milde, AB ve BC kısımlarında oluşan maksimum gerilmeleri hesaplayınız.

(Cevap: 56.6 MPa, 36.6 MPa)

Örnek (Soru) 3.8

Şekildeki elektrik motorundan alınan, 500Nm lik tork B ve C dişlileri tarafından 200Nm ve 300Nm olarak iletilmektedir. A yatağı dönmeye izin vermektedir. Bu durumda A ucunun D ye göre dönme miktarını (burulma açısını) hesaplayınız.
Cevap: 3.22°

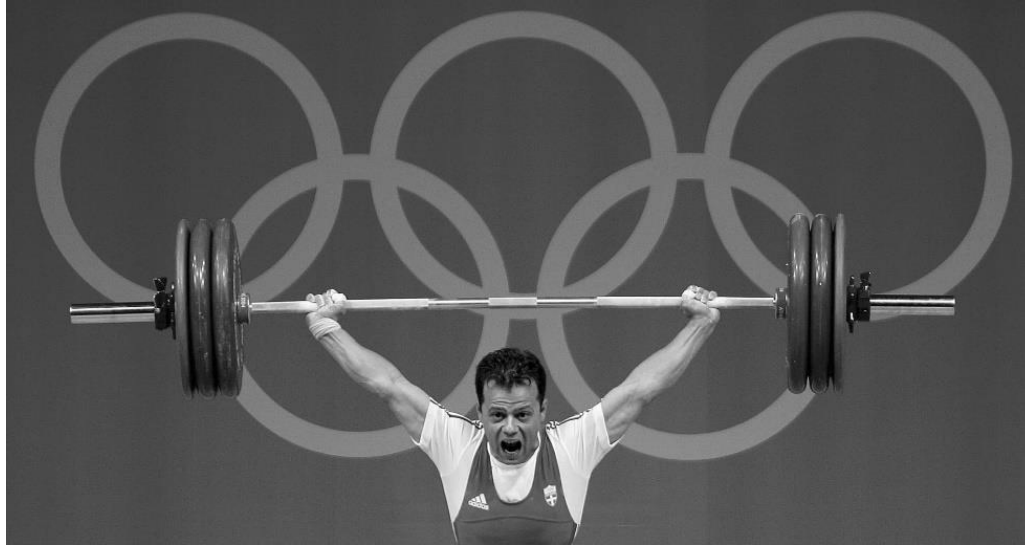
Örnek (Soru) 3.9

Alüminyum ve piriç kısımlarından oluşan, her iki ucu sabit duvara bağlı olan kademeli mile $T = 1.2 \text{ kNm}$ lik bir tork uygulanıyor. Bu durumda sistemin emniyet kontrolünü yapınız. Verilenler: Emniyet faktörü $n=2$, $G_{\text{alüm.}} = 26 \text{ GPa}$, $G_{\text{piriç.}} = 39 \text{ GPa}$, $\tau_{\text{akma-alüm.}} = 120 \text{ MPa}$, $\tau_{\text{akma-piriç.}} = 160 \text{ MPa}$,

Cevap: $\tau_{\text{max-alüm}} = 27.9 \text{ MPa}$ (emniyetli);
 $\tau_{\text{max-piriç}} = 36.7 \text{ MPa}$ (emniyetli).

4

Eğilme

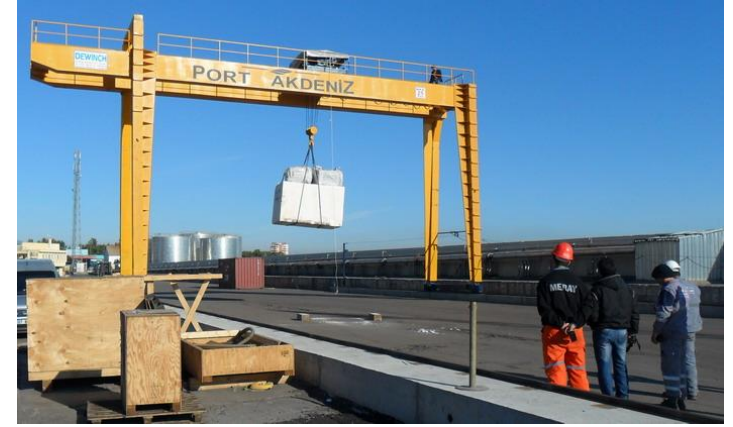


4.1 Eğilme Yüklemesine Maruz Yapı Örnekleri:

Eğilme, uygulamalarda çok sık görülen bir yükleme biçimidir.

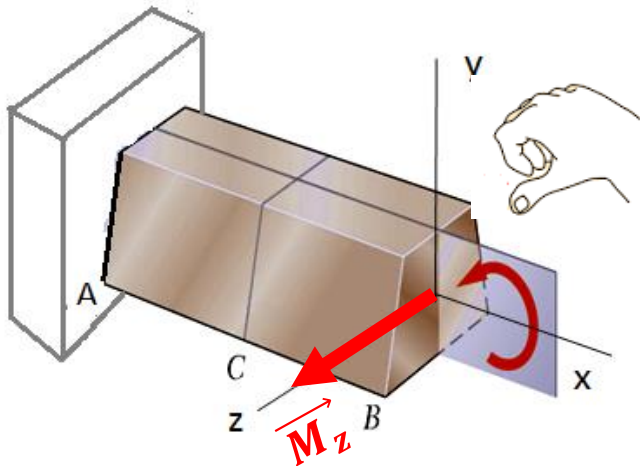
- Yapılarda kullanılan kirişler,
- Araçların geçtiği köprüler,
- Vinçler, krenler vb.

eğilme yüklemesine maruzdur.



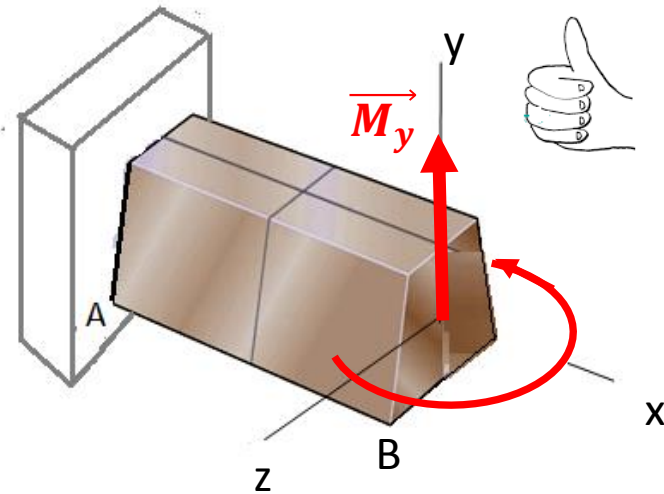
4.2 Eğilme ile Burulma Arasındaki Farkı nasıl anlarız?

Genel kaide: Düzleme paralel moment eğilme; düzleme dik moment burulma momentidir.



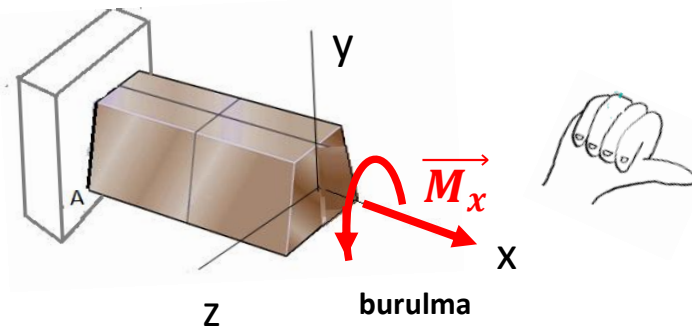
z eksenini yönünde eğilme

Eğilme yüklemesinde, kesitteki moment vektörü (sağ el kaidesine göre) düzlem üzerindeki eksenler (y veya z eksenleri) den birisi yönündedir.



y eksenini yönünde eğilme

Moment vektörü düzlem dik yani düzlem normali yönünde (şekilde x eksenini) olursa burulma momenti oluşacaktır.



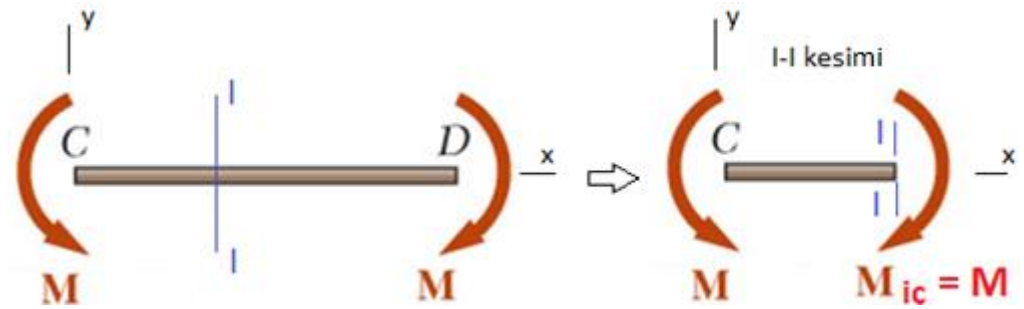
burulma

Not: Moment indisleri eksen takımının yerleştirilmesine göre değişebilir, ancak üstteki genel kaide değişmez. Biz bu ders kapsamında eksen takımını bu şekilde yerleştireceğiz ve kesitte sadece M_z momenti varken elastik yüklemde gerilmeleri hesaplayacağız.

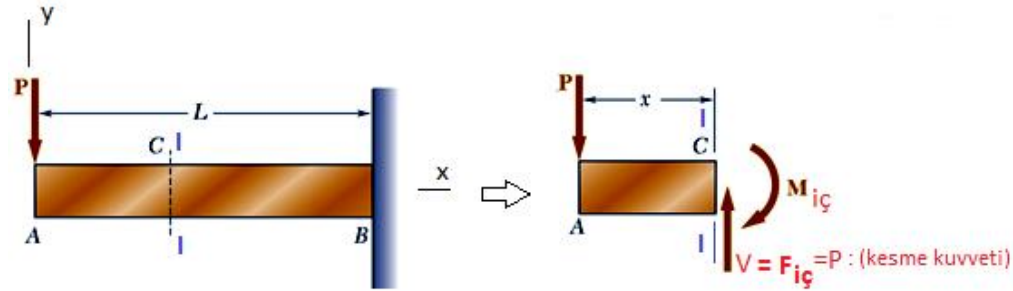
4.3 Eğilme Çeşitleri:

1-) Basit (Simetrik) Eğilme:

Kesitte sadece 1 eğilme momenti vardır ve kesit en az bir eksene göre simetriktir.

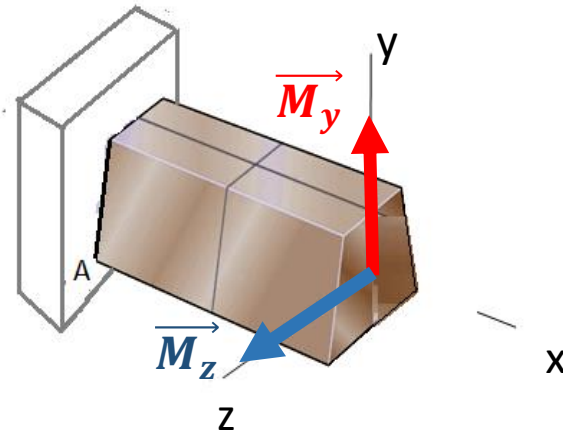


2-) Kismeli Eğilme: Kesitte 1 eğilme momenti ve 1 kesme kuvveti vardır ve kesit en az bir eksene göre simetriktir.



3-) Simetrik olmayan (Eğik) Eğilme:

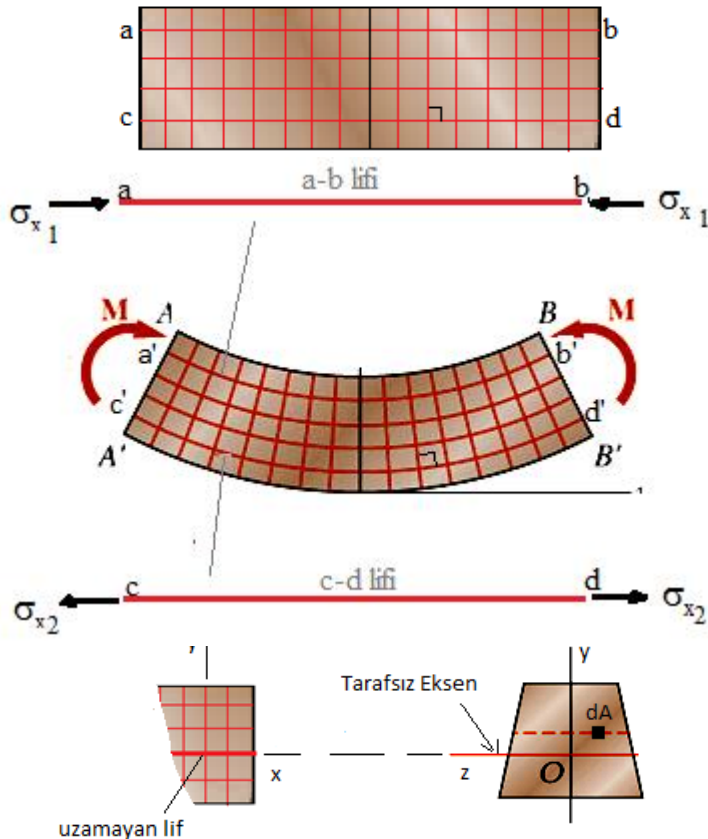
Simetrik kesitlerde en az 2 eğilme momenti, simetrik olmayan kesitlerde en az 1 eğilme momenti vardır. (Bu daha ileri seviye bir konudur.)



4.4 Eğilme yüklemesinde oluşan gerilme cinsi:

Eğilme momenti sonucu acaba kesitte kayma gerilmesi mi yoksa normal gerilme mi oluşur? Önce buna karar vereceğiz. Daha sonra kesitteki gerilme dağılımını formülüze edeceğiz.

Şekildeki elastik çubuğun lif lif olduğunu düşünelim. Bu çubuğa eğilme uygulayalım.

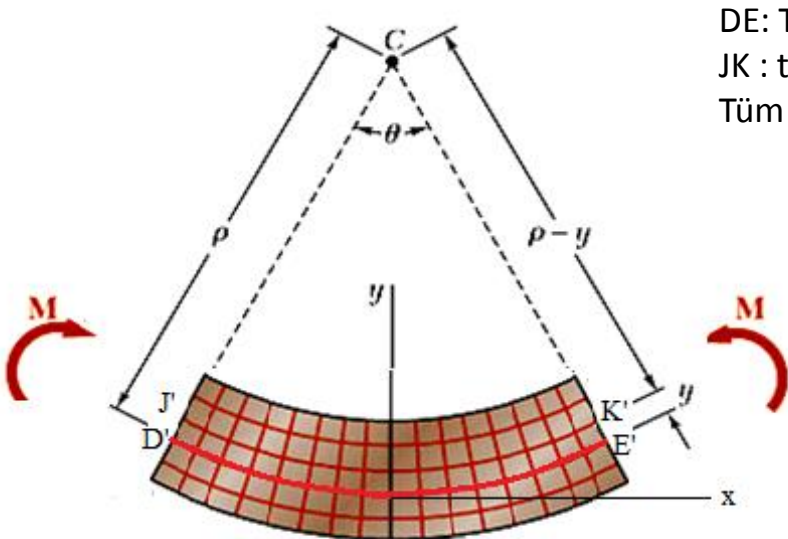


- Eğilme momenti sonucu üstteki liflerin kısaldığını alttaki liflerin uzadığını görürüz.
- Bu durumda üst liflere bası alt liflere çeki kuvvetleri gelir.
- O halde liflerde normal gerilmeler oluşur.
- Üst lifler kısılacığı için bası gerilmeleri ($-\sigma_x$), alt lifler uzayacağı için çekme gerilmeleri (σ_x) oluşacaktır.
- En üstteki lif en fazla kısalmış en alttaki lif en fazla uzamıştır. Bu durumda bu liflerde şiddet olarak en büyük gerilmeler oluşur.
- Altan üste doğru gidildikçe liflerdeki uzama azalır. Bir geçiş noktasında lifte uzama sıfır olur. Bu lifin bulunduğu kesitteki yatay çizgiye tarafsız eksen denir. Bu liften üstteki liflerde artık uzama negatif olur yani kısılma başlar. Yukarı doğru gidildikçe kısılma artar. En üstte en fazla kısılma olur.
- Tarafsız eksenden en uzak noktalarda en fazla uzama ve kısılma; dolayısıyla da maksimum çeki ve minimum bası gerilmeleri oluşacaktır.
- Tarafsız eksenindeki tüm noktalarda gerilmeler sıfırdır. Her kesitteki tarafsız eksen vardır. Bu durumda tüm tarafsız eksenler kiriş boyunca bir düzlem teşkil ederler ki buna tarafsız düzlem denir.

4.5 Basit ve kesmeli eğilme de yapılan kabuller:

- Düzlem kesitler eğilmeden sonra da düzlem kalmaya devam eder.
- Birbirine dik lifler (çizgiler) eğilmeden sonra yine dik kalır.

4.6 Basit eğilme de elastik gerilme hesabı:



DE: Tarafsız düzlem üzerindeki lifdir. Boyu değişmez. Bu durumda $DE = D'E'$
 JK : tarafsız düzlemden y kadar uzaklıktaki lifdir. Son boyu $J'K'$ dür.
 Tüm liflerin ilk boylar eşittir. $JK = DE$

JK lifi için;

Son boy: $J'K' = (\rho - y)\theta$, $D'E' = \rho\theta = DE = JK$

Toplam uzama : $\delta = J'K' - JK = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta$

Birim elastik uzama : $\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = -\frac{y\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho}$

Elastik bölgede normal gerilme: $\sigma_x = E \cdot \epsilon_x = -E \cdot \frac{y}{\rho}$

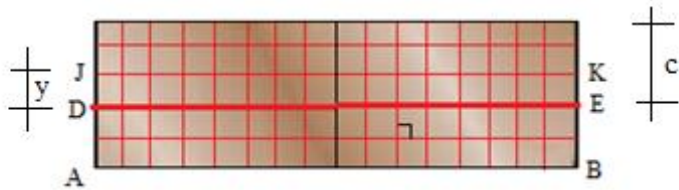
Kesitte, normal yönde toplam iç kuvvet (F_x) yoktur. Yani sıfırdır.

$$F_x = 0 = \int \sigma_x dA = \int -E \frac{y}{\rho} dA = -\frac{E}{\rho} \int y dA = 0 \rightarrow \int y dA = 0$$

Ağırlık merkezi tanımından: $\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} = 0$

Ağırlık merkezinin y koordinatı ($\bar{y}$) sıfır çıktı. **O halde tarafsız eksen kesitin ağırlık merkezinden geçer.**

Unutmayın: Eğilmede eksen takımı mutlaka ağırlık merkezine yerleştirilmelidir.

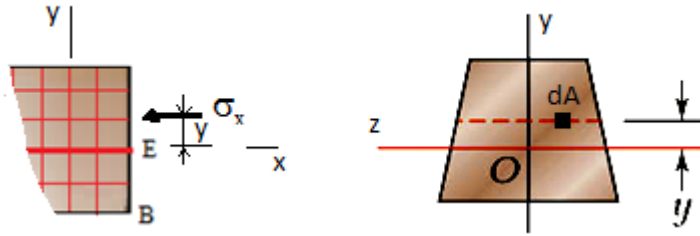


- Mukavemette aksi söylenmedikçe şekil değiştirmemiş ilk durumdaki geometriye göre işlem yapılır. (JK lifi nin ilk hali yatay bir çizgidir. İşlemler bunun üzerinden yapılmaktadır. $J'K'$ yayına göre değil.)

4.7 Basit Eğilme de elastik gerilme hesabı – devam:

Kesitteki y mesafesindeki bir noktada dA elemanına gelen iç kuvvet: $-\sigma_x dA$

dA elemanın tarafsız eksene göre momenti: $(-\sigma_x dA).y$



+y tarafındaki noktalarda bası gerilmesi varken, bunlar pozitif M_z momentine sebep olur. $y > 0$, $\sigma_x < 0$ ise M_z nin pozitif çıkması için denklemin başına – koyulmalıdır.

Kesitteki toplam iç moment: $M_z = -\int (\sigma_x dA).y$

$$M_z = -\int \left(-\frac{E}{\rho} y \cdot y \cdot dA\right) = \frac{E}{\rho} \int (y^2 \cdot dA) = \frac{E}{\rho} I_z \rightarrow \frac{E}{\rho} = \frac{M_z}{I_z}$$

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = -E \cdot \frac{y}{\rho} \quad \text{idi.}$$

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z}$$

Bu formül,

- Basit veya kesmeli eğilmede,
- elastik yükleme de,
- İzotropik malzemeler için geçerlidir.

Not: bazı kitaplarda eksen takımı farklı alınınca eksi işareti olmayabilir. Eksi işareti olup olmayacağını kendimiz anlayabiliriz. $M_z > 0$ iken Tarafsız eksenin üstündeki noktalarda ($y > 0$) bası oluşması gerektiğini görünüz. Bu durumda σ_x in negatif çıkması için denklemin başında mutlaka – olmalıdır.

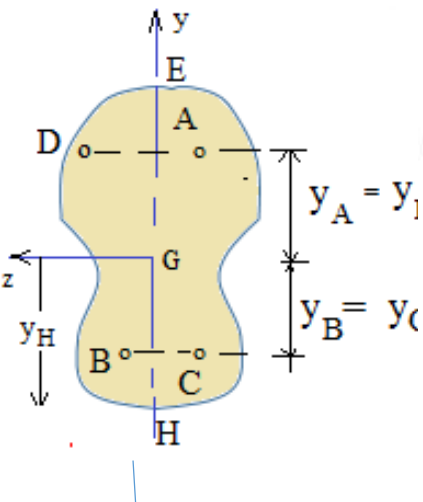
4.8 Basit eğilmede normal gerilme dağılımı

Kesitte herhangi bir noktadaki gerilme formülü:

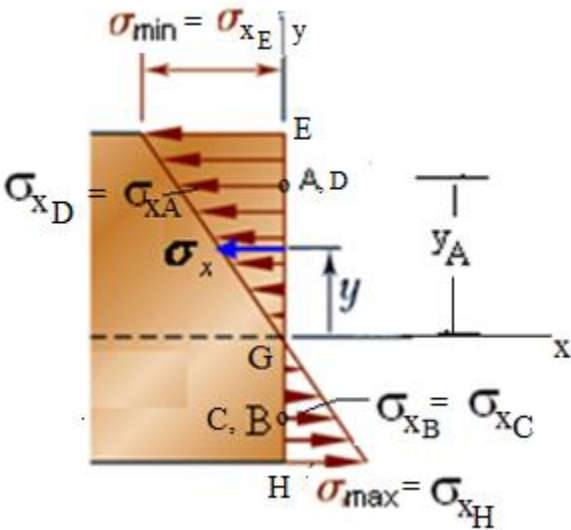
$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z}$$

M_z : kesitteki z yönünde iç moment.
 I_z : kesitin z eksenine göre atalet momenti
 y : noktanın y koordinatı (orjin mutlaka ağırlık merkezidir.)

M_z ve I_z bir kesit için sabittir. Gerilme ise aynı kesitte noktadan noktaya değişir. Tarafsız eksenden eşit uzaklıkta olan, yani aynı y koordinatına sahip noktalarda gerilmeler aynıdır.



Kesit en az bir eksene göre simetrik olmalı.



Kirişin önden görünüşünün bir kısmı. Gerilme dağılımını dikkatlice inceleyiniz.

$$\sigma_{xA} = \sigma_{xD} = -\frac{M_z y_A}{I_z} \quad , \quad \sigma_{xB} = \sigma_{xC} = -\frac{M_z y_B}{I_z}$$

$$\sigma_{x\max} = \sigma_{xH} = -\frac{M_z y_H}{I_z}$$

$$\sigma_{x\max} = \sigma_{xE} = -\frac{M_z y_E}{I_z}$$

Maksimum ve minimum gerilmeler tarafsız eksenden en uzak noktalarda meydana gelir.

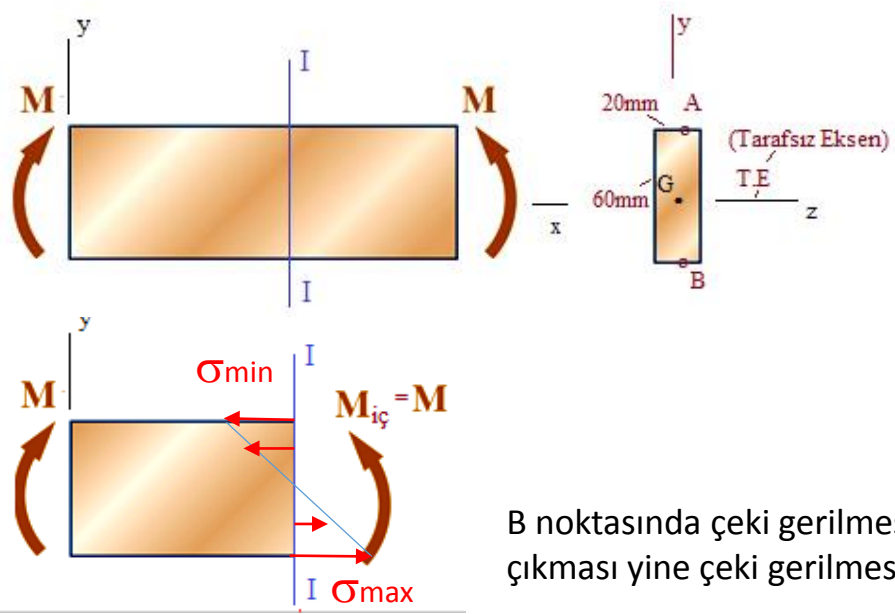
Örnek 4.1



Şekildeki kiriş için akmayı başlatacak eğilme momentini bulunuz.

$\sigma_{ak} = 250MPa$

Çözüm: I-I kesitindeki yüklemeye göre alttaki lifler uzar. Maksimum çeki gerilmesi en alt noktalarda (örneğin B noktasında) ortaya çıkar.

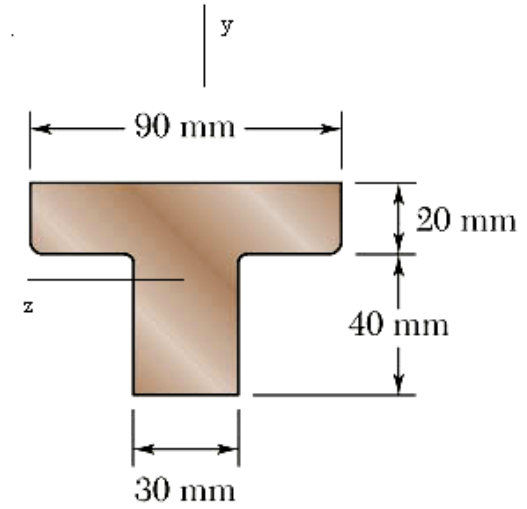
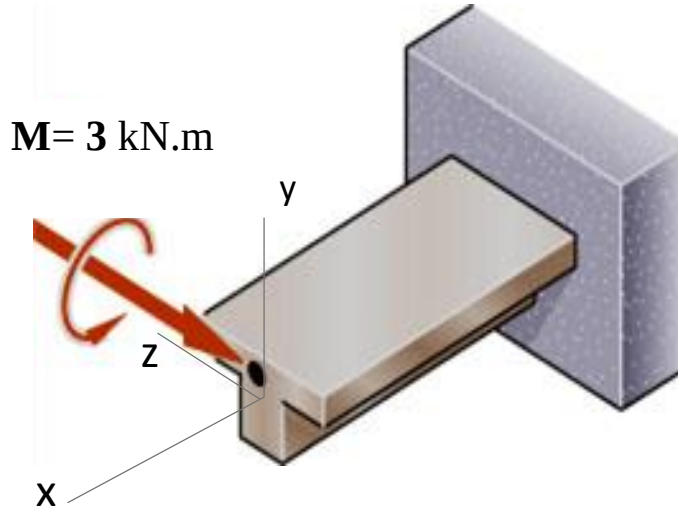


$$\sigma_{\max} = \sigma_B = -\frac{M_{i\zeta} y_B}{I_z} = -\frac{M_z y_B}{I_z}$$
$$\sigma_{\max} = -\frac{M_z (-30mm)}{(20mm) \times (60mm)^3 \times \frac{1}{12}} = 8,33 \times 10^{-5} M_z$$
$$\sigma_{\max} = \sigma_{akma} = 250MPa$$
$$\rightarrow M_z = 3000000 Nmm = 3kNm$$

B noktasında çeki gerilmesi olacağını önceden göremeseydik bile, σ_B nin pozitif çıkması yine çeki gerilmesi olduğunu gösterir.

Bununla birlikte sünek malzemelerde bası ve çekideki akma mukavemeti birbirine eşit kabul edilebilir.

$\sigma_{\min} = \sigma_A = -\sigma_{akma}$ Denklemden de aynı sonuç bulunabilir.

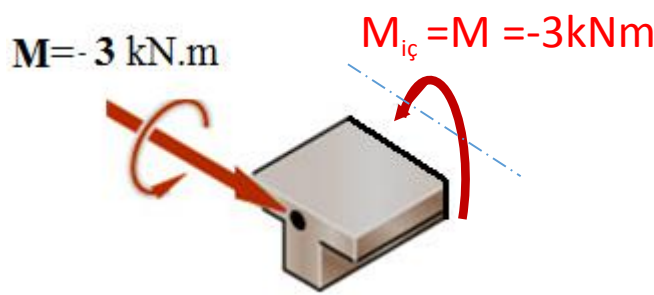
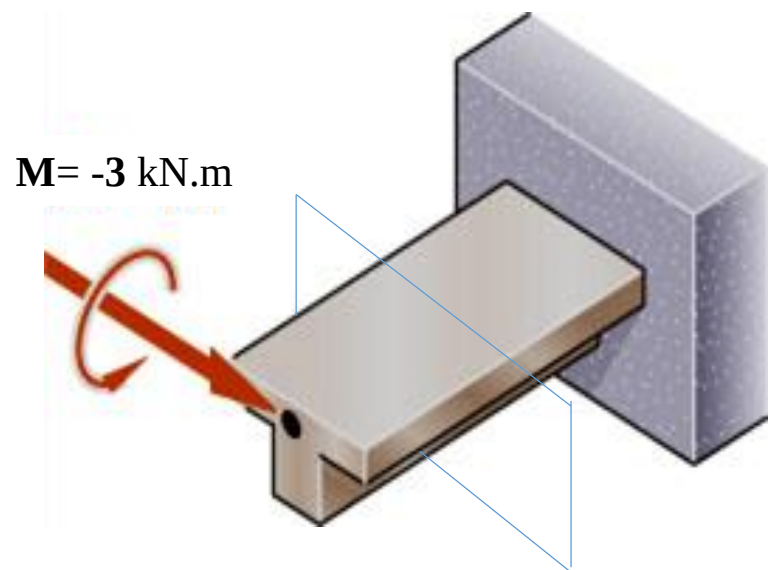
Örnek 4.2

T kesitli ankastre çubuğun çeki ve basıdaki akma mukavemeti 120MPa dır. Çubuğun serbest ucuna 3kNm lik bir moment uygulandığında çubukta akma olup olmayacağının kontrolünü yapınız.

Çözüm:

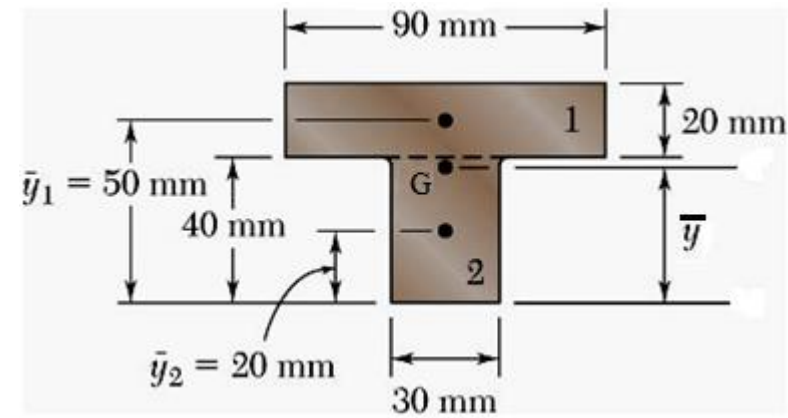
Uygulanan moment vektörel olarak yüzeye paralel (-z yönünde) olduğundan ve kesit simetrik olduğundan basit eğilme oluşur.

Bu durumda maksimum ve minimum normal gerilmeleri hesaplamalıyız ve akma gerilmesi ile karşılaştırmalıyız.



$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} = -\frac{-3.10^6 \text{ Nmm}}{I_z} y$$

I_z : ağırlık merkezinden geçen yatay eksen (z) e göre atalet momentini bulmalıyız.



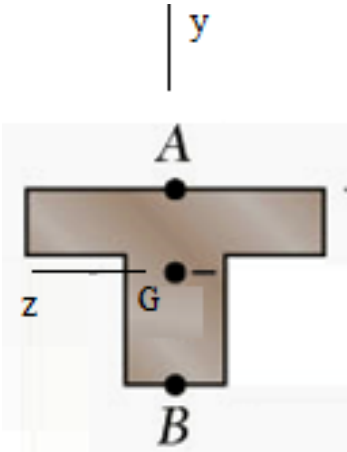
$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i} \quad I_z = \sum (\bar{I}_i + A_i d_i^2)$$

	$A_i \text{ mm}^2$	$\bar{y}_i, \text{ mm}$	$\bar{y}_i A_i, \text{ mm}^3$
1	$20 \times 90 = 1800$	50	90×10^3
2	$40 \times 30 = 1200$	20	24×10^3
	$\sum A_i = 3000$		$\sum \bar{y}_i A_i = 114 \times 10^3$

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{114 \times 10^3}{3000} = 38 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} I_z &= \sum (\bar{I}_{zi} + A_i d_i^2) = \sum \left(\frac{1}{12} b_i h_i^3 + A_i d_i^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{12} 90 \times 20^3 + 1800 \times 12^2 \right) + \left(\frac{1}{12} 30 \times 40^3 + 1200 \times 18^2 \right) \end{aligned}$$

$$I_z = 868 \times 10^3 \text{ mm}^4$$



-M_z momenti olduğu için **A** noktasında maksimum çeki, **B** noktasında minimum bası gerilmeleri meydana gelir.

$$\sigma_{\max} = -\frac{M_z y_A}{I_z}$$

$$\sigma_A = \sigma_{\max} = -\frac{-3 \times 10^6 \times 22}{868 \times 10^3}$$

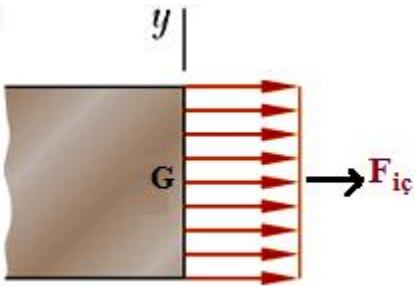
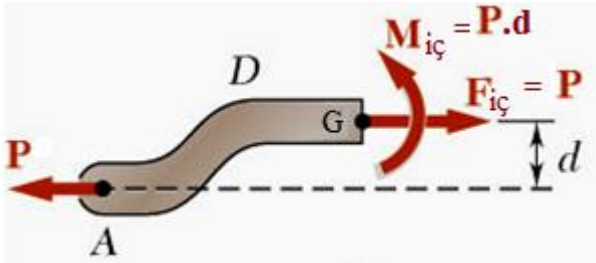
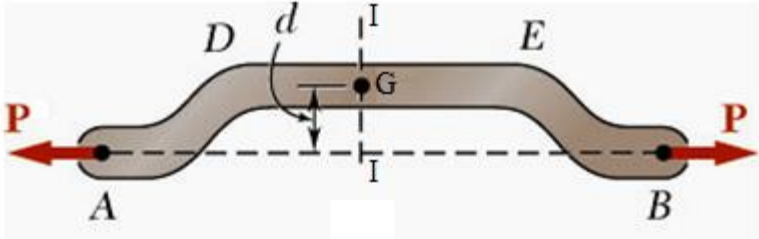
$\sigma_A = +76.0 \text{ MPa}$

$$\sigma_B = \sigma_{\min} = -\frac{M_z y_B}{I_z} = -\frac{-3 \times 10^6 \times (-38)}{868 \times 10^3}$$

$\sigma_B = -131.3 \text{ MPa}$

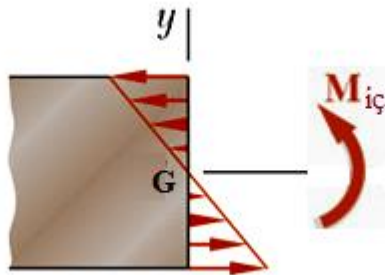
$|\sigma_B| = 131.3 \text{ MPa}, |\sigma_B| > \sigma_{akma}$ akma oluşur.

4.9 Eksantrik aksel yüklemeye: Kesit merkezinden geçmeyen çeki yüklemesine denir. Bu durumda oluşan gerilmeleri hesaplamak istiyoruz. Şekildeki gibi eğrisel bir çubuğa P çeki yükü uygulandığında DE kısmındaki I-I kesitinin G ağırlık merkezinde bir iç çeki kuvveti ($F_{iç}$) oluşur. Ancak P ile $F_{iç}$ in momentlerinin dengelenebilmesi için bir $M_{iç}$ eğilme momenti de oluşacaktır. $F_{iç}$ ve $M_{iç}$ in süperpozisyon yöntemine göre ayrı ayrı etkilerini toplarız ve bir noktadaki toplam normal gerilmeyi elde ederiz.



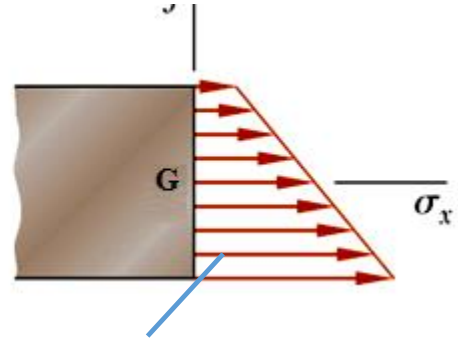
$$\sigma_{x_{F_{iç}}} = \frac{F_{iç}}{A} = \frac{P}{A}$$

+



$$\sigma_{x_{M_{iç}}} = - \frac{M_{iç}}{I_z} y = - \frac{P \cdot d}{I_z} y$$

=



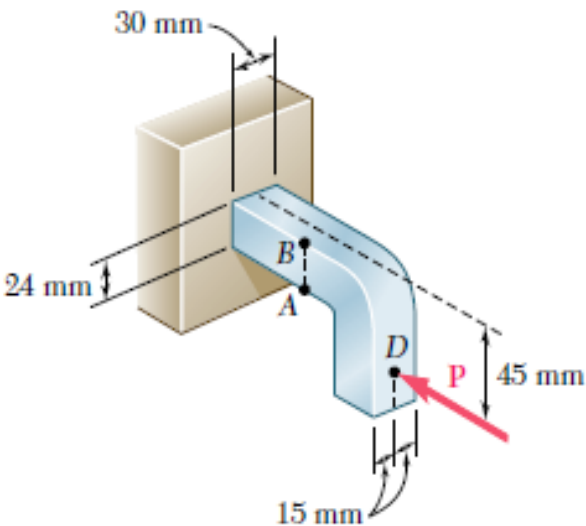
$$\sigma_x = (\sigma_x)_{F_{iç}} + (\sigma_x)_{M_{iç}} = \frac{P}{A} - \frac{P \cdot d}{I} y$$

Kesit en az bir eksene göre simetriktr.

Bir önceki 4.2 örneğinde aynı kesit kullanılmıştı. Aşağıdaki değerler oradan alınabilir:

$$d = 38 - 10 = 28 \text{ mm}$$

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{Mc_A}{I} = -\frac{P(kN) \times 10^3}{3 \times 10^3} + \frac{(28P \times 10^3)(22)}{868 \times 10^3} = 0.377P$$
$$\sigma_B = -\frac{P}{A} - \frac{Mc_A}{I} = -\frac{P \times 10^3}{3 \times 10^3} - \frac{(28P \times 10^3)(38)}{868 \times 10^3} = -1.559P$$
$$\begin{aligned}\sigma_A &= +0.377P = 30 \text{ MPa} & P &= 79.6 \text{ kN} \\ \sigma_B &= -1.559P = -120 \text{ MPa} & P &= 77.0 \text{ kN}\end{aligned}$$
$$P = 77.0 \text{ kN}$$

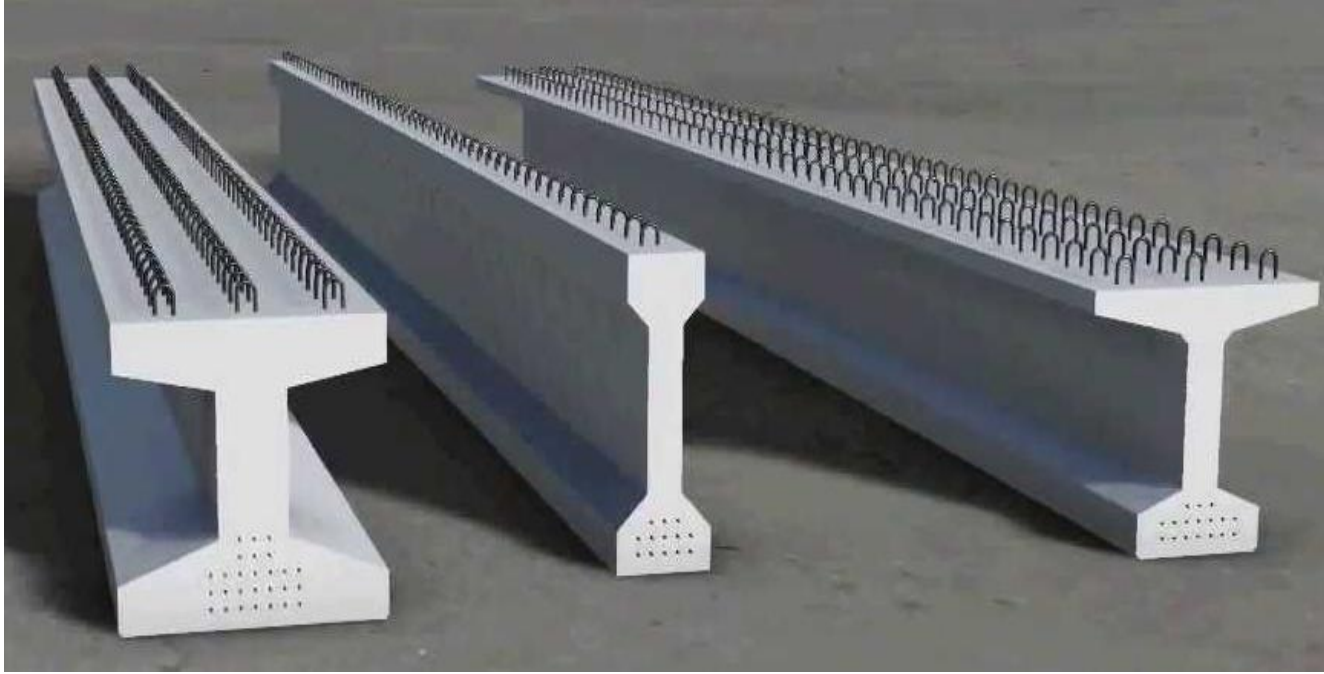


Örnek (Soru) 4.4: Şekildeki eğik alüminyum çubuğa uygulanabilecek emniyetli P yükünü hesaplayınız. Akma mukavemeti 140MPa, çubuk kesiti 24x30mm, emniyet katsayısı $n=2$ dir.

Cevap: $P=6.109\text{kN}$

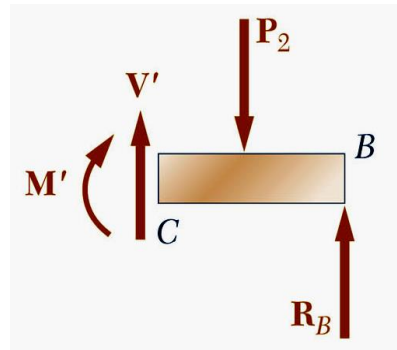
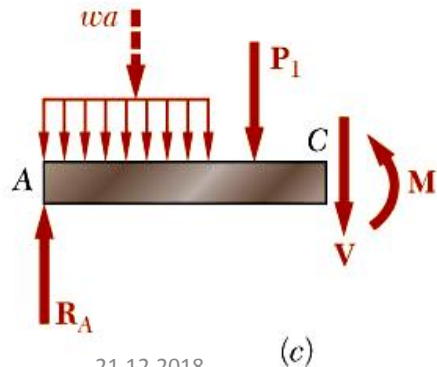
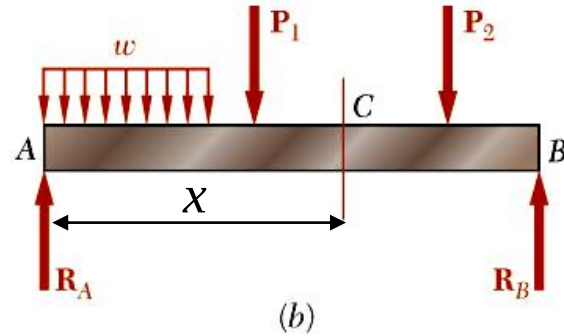
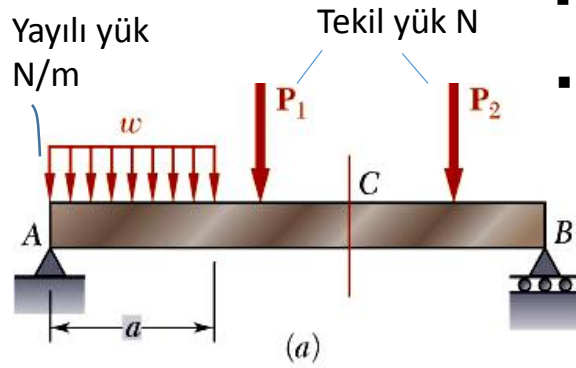
4.10 Düşey Yüklü Kirişlerin Eğilmesi

Kesit boyutları uzunluğuna göre daha çok daha küçük olan yatay elemanlara kiriş denir. Örneğin bulunduğunuz binaya dikkat ettiğinizde yatay beton elemanlar kiriştir. Düşey elemanlara ise kolon ismi verilir.



Farklı kiriş kesitleri

4.10.1 Düşey Yüklü Kirişlerin Yükleme Çeşitleri



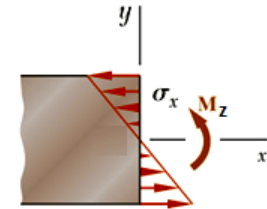
- Kirişler düşey olarak genellikle *tekil* ve/veya *yayılı* yüklere maruz kalırlar
- Tekil yük (N) bir noktaya, yayılı yük belli bir uzunluğa düşer (N/m)

- Uygulanan kuvvetler kirişin kesitlerinde iç kesme kuvveti (V) ve eğilme momenti (M) meydana getirirler.
- Kesit üzerinde kesme iç kuvvetinden dolayı kayma gerilmeleri meydana gelir. Kayma gerilmelerinin dağılımı :

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I \cdot t} \quad (\text{Bu konu daha farklı bir başlık altında incelenir.})$$

- Eğilme momentinden dolayı ise normal gerilmeler oluşur:

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z}$$



- Amacımız kirişte ortaya çıkan şiddetçe maksimum normal gerilmeyi hesaplamaktır.
- Burada en önemli nokta eğilme momentinin kesitten kesite farklılık göstermesidir. En kritik kesit (gerilme şiddetinin en fazla olduğu kesit), momentin şiddetinin en fazla olduğu kesittir.

4.10.2 İç kuvvet ve momentin Pozitif Yönleri:



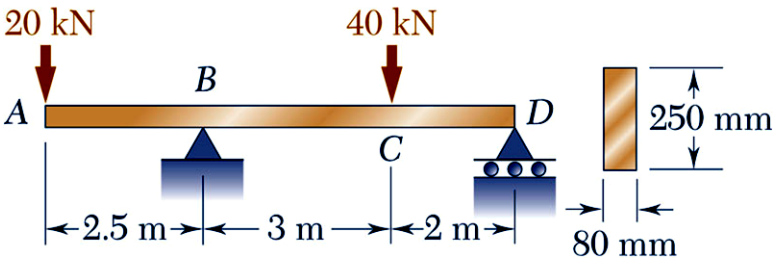
Sol kısmın dengesi incelenirken → M: saat ibresi tersi yönde, V: aşağı doğru
 Sağ kısmın dengesi incelerken → M: saat ibresi yönde, V: yukarı doğru

4.10.3 Düşey yüke maruz kirişlerde işlem sırası

- 1) Mesnet Tepkileri belirlenir,
- 2) Kesme Kuvveti – Eğilme Momenti diyagramları çizilir.
- 3) En kritik kesit belirlenir. (*Eğilme momentinin mutlak değerce en büyük olduğu kesit, en kritik kesittir.*)
- 4) Kritik kesitteki şiddetçe maksimum Gerilme hesaplanır. Bu gerilme aynı zamanda kirişteki en büyük gerilmedir. Buna göre mukavemet analizleri yapılır. (*emniyet kontrolü, boyut tayini, malzeme seçimi vb.*)

Şimdi örneklerle bu konuyu daha iyi anlamaya çalışacağız.

Örnek 4.5



Şekildeki kirişin kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çiziniz. b-) kirişte ortaya çıkacak maksimum normal gerilmenin yerini ve değerini bulunuz

$$\sum F_y = 0 = \sum M_B: R_B = 46 \text{ kN} \quad R_D = 14 \text{ kN}$$

1.bölge $0 < x < 2.5$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 & \quad -20 \text{ kN} - V_1 = 0 & V_1 = -20 \text{ kN} \\ \sum M_{k1} = 0 & \quad (20 \text{ kN})(x) + M_1 = 0 & M_1 = -20x \end{aligned}$$

$x = 0$ için

$$V_1 = -20 \text{ kN}, M_1 = 0,$$

II-II kesimi (sağ kısım)

$x = 2.5$ için

$$V_1 = -20 \text{ kN}, M_1 = -50 \text{ kNm}$$

2.bölge $2.5 < x < 5.5$

$$\begin{aligned} F_y = 0 & \quad -20 \text{ kN} + 46 \text{ kN} - V_2 = 0 & V_2 = 26 \text{ kN} \\ M_{k2} = 0 & \quad 20.x + M_2 - 46.(x - 2.5) = 0 & M_2 = 26x - 115 \end{aligned}$$

$x = 2.5$ için

$$V_2 = 26 \text{ kN}, M_2 = -50 \text{ kNm},$$

$x = 5.5$ için

$$V_1 = 26 \text{ kN}, M_2 = 28 \text{ kNm}$$

3.bölge $5.5 < x < 7.5$

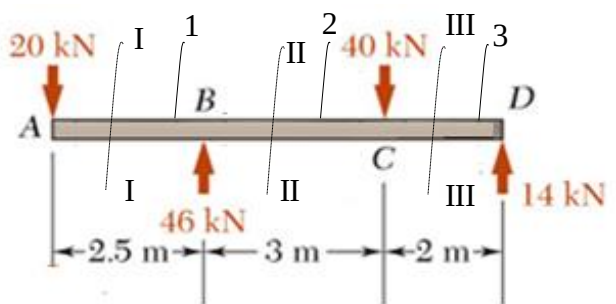
$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 & \quad 14 \text{ kN} + V_3 = 0 & V_3 = -14 \text{ kN} \\ \sum M_{k3} = 0 & \quad 14.(7.5 - x) - M_3 = 0 & M_3 = 14.(7.5 - x) \end{aligned}$$

$x = 5.5$ için

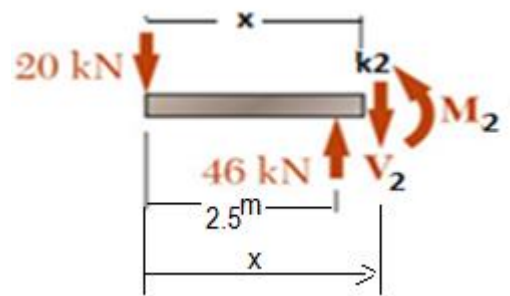
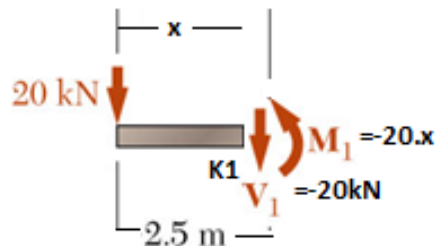
$$V_3 = 26 \text{ kN}, M_3 = 28 \text{ kNm},$$

$x = 7.5$ için

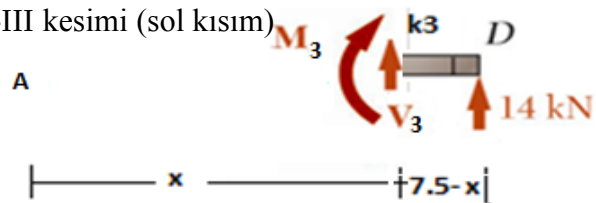
$$V_3 = 0, M_3 = 0$$

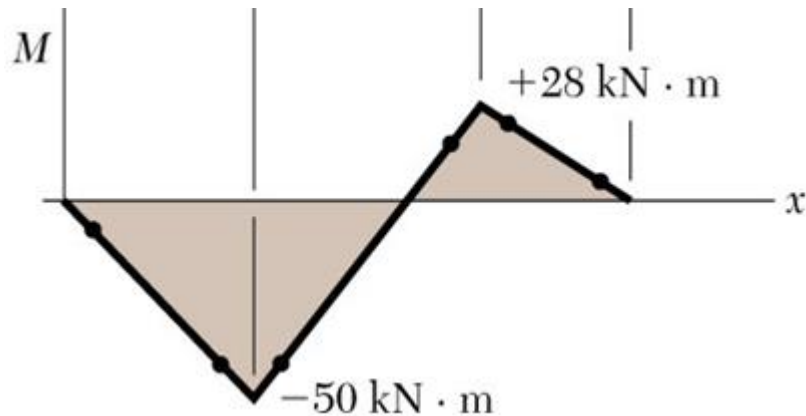
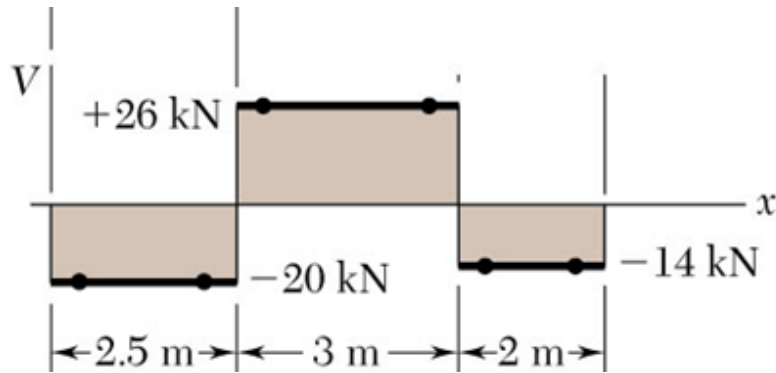
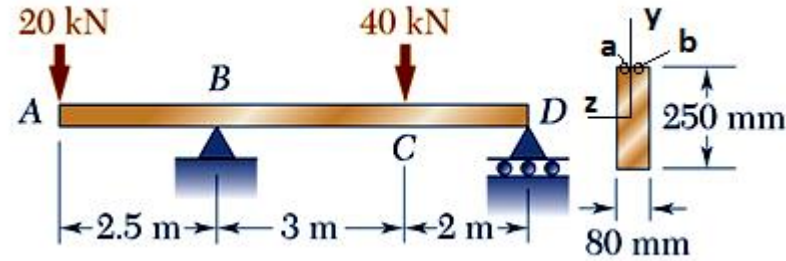


I-I kesimi (sağ kısım)



III-III kesimi (sol kısım)



Örnek 4.5- devam

Şiddetçe en büyük moment B kesitinde ortaya çıkmıştır. O halde kritik kesit B kesitidir.

$$M_{\min} = M_B = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

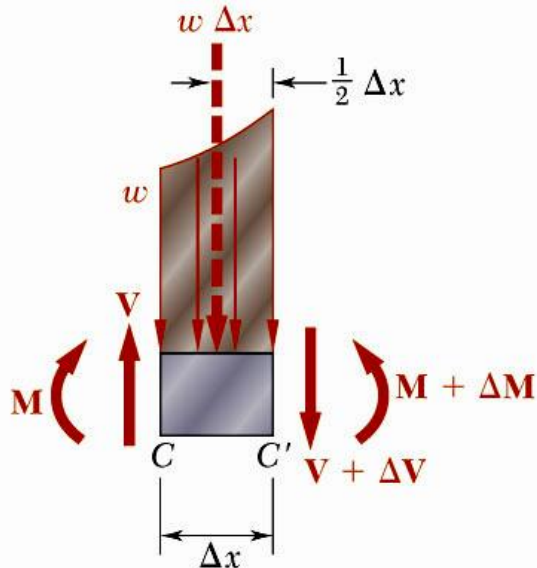
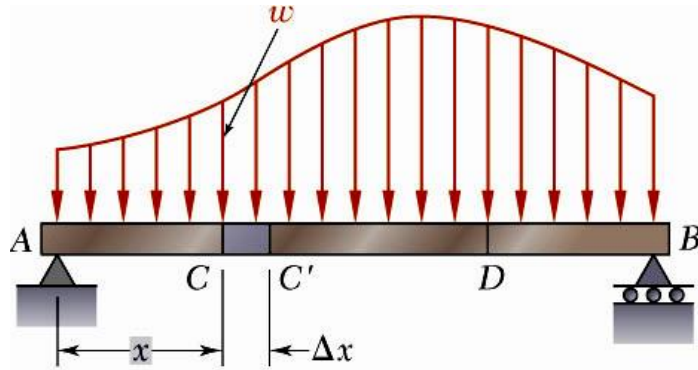
Bu kesitte maksimum gerilme:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= -\frac{M_B}{I_z} y_{\max} = \sigma_a = \sigma_b \\ &= -\frac{-50 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}}{\frac{1}{12} 80 \times 250^3} \cdot \frac{250}{2} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\max} = 60 \text{ MPa}$$

V ise kayma gerilmesine sebep olur. Ancak kayma gerilmesi dağılımının incelenmesi ise farklı bir konudur ve bu bölümde incelenmeyecektir.

4.10.4 Yayılı yük, kesme kuvveti ve moment arasındaki ilişki



Yayılı yük ile kesme kuvveti arasındaki ilişki:

$$\sum F_y = 0: V - (V + \Delta V) - w \Delta x = 0$$

$$\Delta V = -w \Delta x$$

$$\frac{dV}{dx} = -w \rightarrow V_D - V_C = - \int_{x_C}^{x_D} w \, dx$$

$V_D - V_C = -$ (CD arasında yayılı yük eğrisi altında kalan alan)

Kesme kuvveti ile eğilme momenti arasındaki ilişki:

$$\sum M_{C'} = 0: (M + \Delta M) - M - V \Delta x + w \Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V \Delta x - \frac{1}{2} w (\Delta x)^2$$

$$\frac{dM}{dx} = V \rightarrow M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V \, dx$$

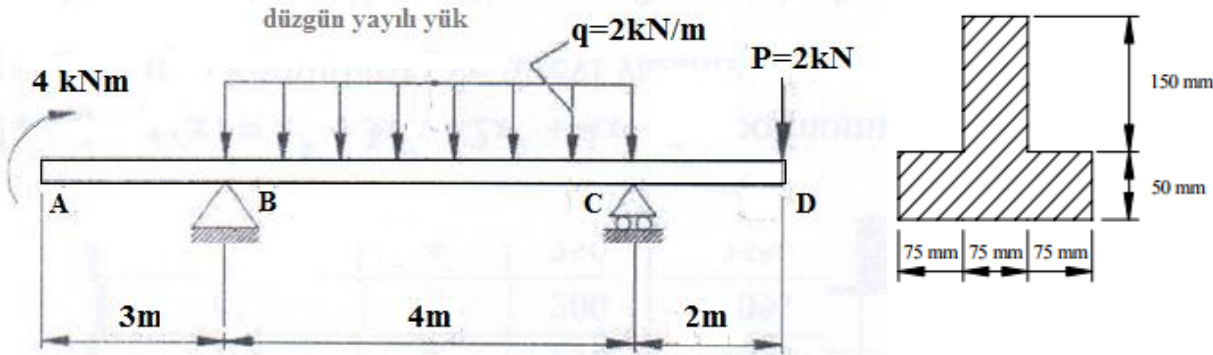
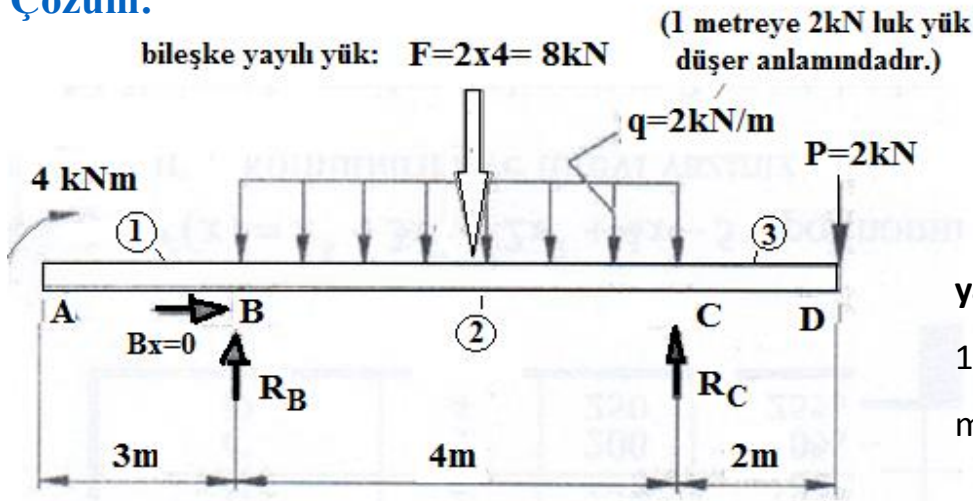
$M_D - M_C =$ (CD arasında kesme kuvveti eğrisi altında kalan alan)

Örnek 4.6

Şekildeki kirişin;

a-) kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çiziniz.

b-) Kirişteki maksimum ve minimum normal gerilmeyi bulunuz.

**Çözüm:**

yayılı yükün bileşkesi:

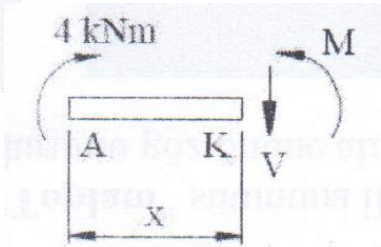
1 metreye 2kN luk yük düşerse, 4 metreye $2 \times 4 = 8\text{kN}$ luk yük düşer.

$$\begin{aligned}\sum M_C &= 0 \Rightarrow -4 - R_B \cdot 4 + 8 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0 \\ &\Rightarrow R_B \cdot 4 = 16 - 8 \\ &\Rightarrow \underline{R_B = 2 \text{ kN}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \Rightarrow R_B + R_C - 8 - 2 = 0 \\ &\Rightarrow R_C = 10 - 2 \\ &\Rightarrow \underline{R_C = 8 \text{ kN}}\end{aligned}$$

Çözüm 4.6-devam:

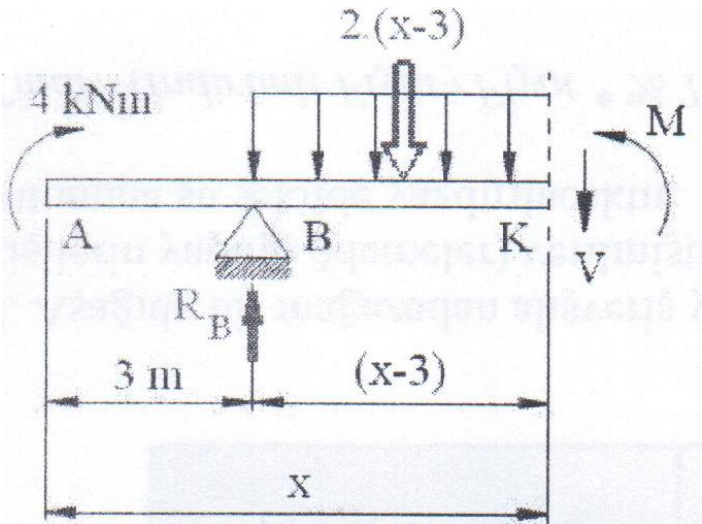
1. Kesim (AB arası); $0 \leq x \leq 3m$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = 0$$

$$\sum M_K = 0 \Rightarrow -4 + M = 0 \Rightarrow M = 4 \text{ kNm}$$

2. Kesim (BC arası); $3m \leq x \leq 7m$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_B - 2.(x-3) - V = 0 \Rightarrow V = 2 - 2.(x-3)$$

$$\begin{aligned} \sum M_K = 0 &\Rightarrow M + 2.(x-3).\frac{(x-3)}{2} - R_B.(x-3) - 4 = 0 \\ &\Rightarrow M = -(x-3)^2 + 2.(x-3) + 4 \end{aligned}$$

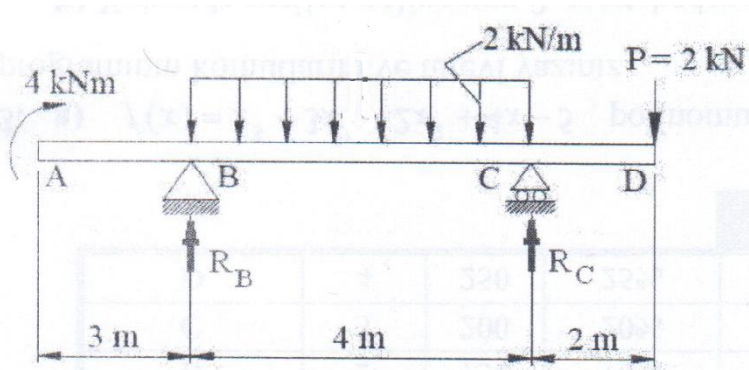
$$x = 3m \Rightarrow V = 2 \text{ kN} \Rightarrow M = 4 \text{ kNm}$$

$$x = 7m \Rightarrow V = -6 \text{ kN} \quad M = -4 \text{ kNm}$$

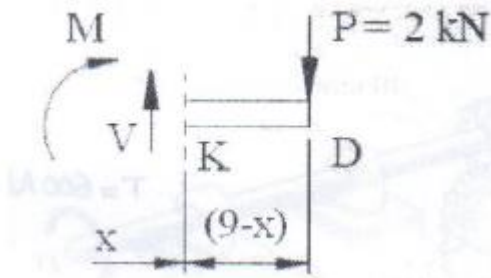
$$\frac{dM}{dx} = V = 2 - 2(x-3) \rightarrow x = 4m \text{ de } M = M_{max} \text{ olur}$$

$$M_{max} = -(4-3)^2 + 2(4-3) + 4 \rightarrow M_{max} = 5 \text{ kNm}$$

Çözüm 4.6-devam:



3. Kesim (CD arası); $7 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m}$



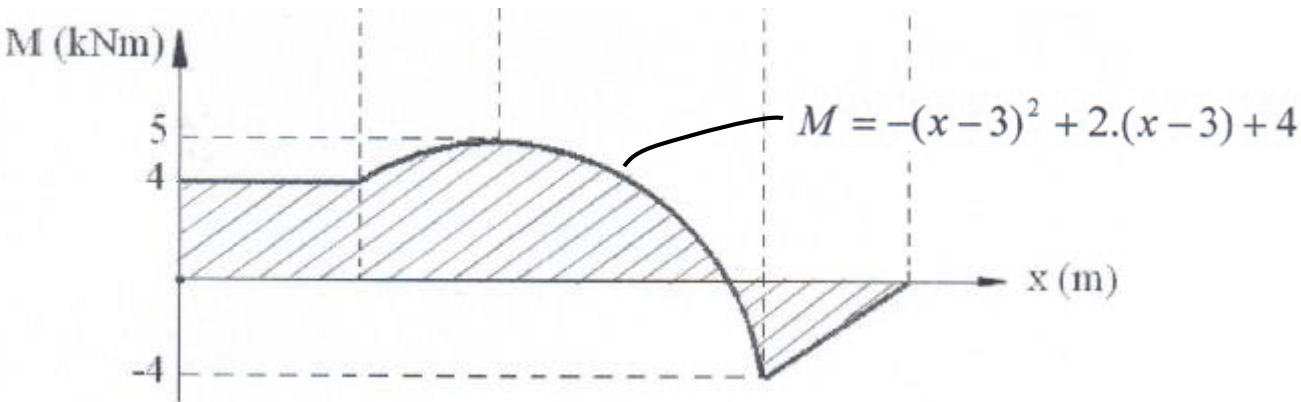
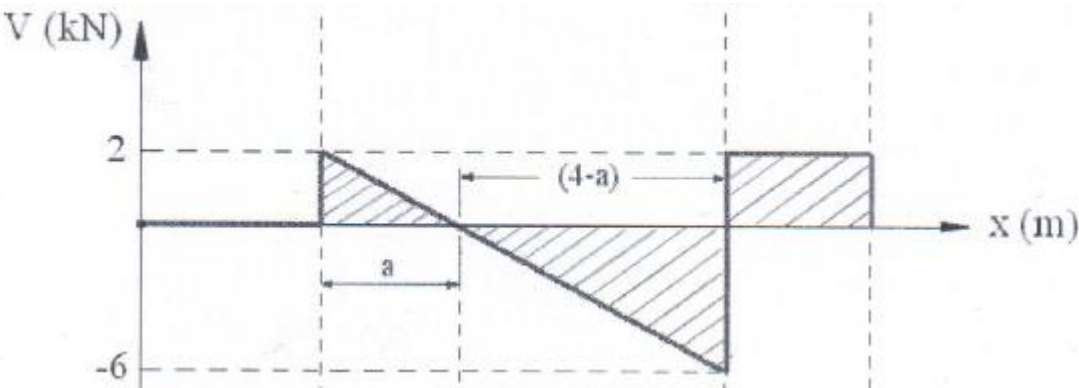
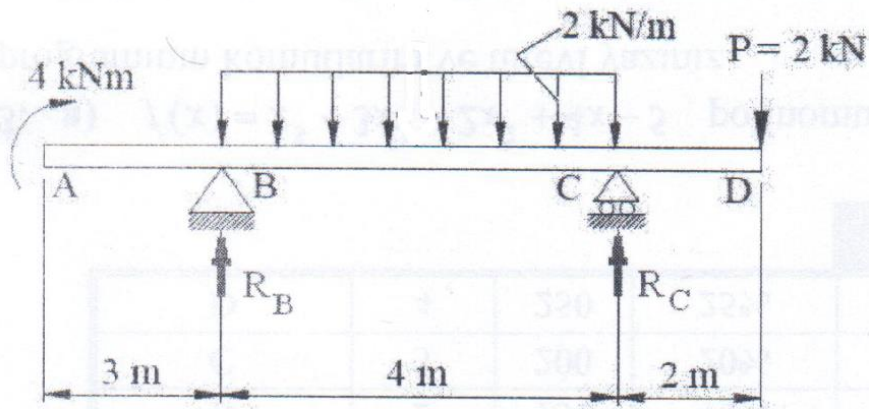
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V - 2 = 0 \Rightarrow V = 2 \text{ kN} \Rightarrow M = -2 \cdot (9 - x)$$

$$\sum M_K = 0 \Rightarrow -M - 2 \cdot (9 - x) = 0$$

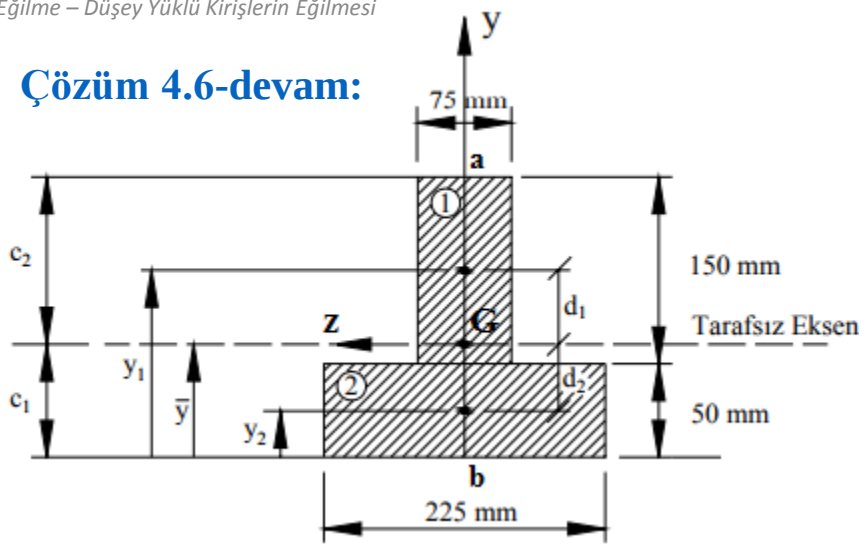
$$x = 7 \text{ m} \Rightarrow V = 2 \text{ kN} \quad M = -4 \text{ kNm}$$

$$x = 9 \text{ m} \Rightarrow V = 2 \text{ kN} , \quad M = 0$$

Çözüm 4.6-devam:



Çözüm 4.6-devam:



$$d_1 = \bar{y} - y_1 = 75 - 125 = -50 \text{ mm}$$

$$d_2 = \bar{y} - y_2 = 75 - 25 = 50 \text{ mm}$$

$$I_1 = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + A_1 \cdot d_1^2 = \frac{75 \cdot 150^3}{12} + (75 \cdot 150) \cdot (-50)^2$$
$$\underline{I_1 = 49218750 \text{ mm}^4}$$

$$I_2 = \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + A_2 \cdot d_2^2 = \frac{225 \cdot 50^3}{12} + (225 \cdot 50) \cdot (50)^2$$
$$\underline{I_2 = 30468750 \text{ mm}^4}$$

$$I_z = I_1 + I_2 = 49218750 \text{ mm}^4 + 30468750 \text{ mm}^4 = 79687500 \text{ mm}^4$$
$$\rightarrow I_z = 79687500 \text{ mm}^4$$

Ağırlık merkezinin yeri:

$$\bar{y} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{(75 \cdot 150) \cdot 125 + (225 \cdot 50) \cdot 25}{75 \cdot 150 + 225 \cdot 50} = 75 \text{ mm}$$
$$\rightarrow \underline{\bar{y} = 75 \text{ mm}}$$

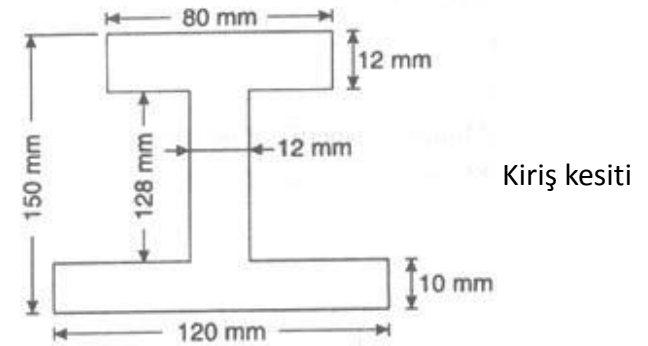
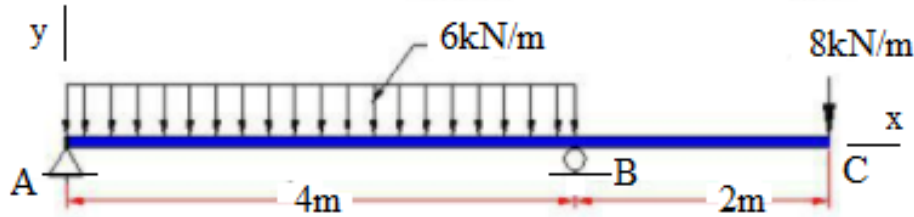
$$\sigma_{x-max} = -\frac{M_{z-E}}{I_z} y_b = -\frac{5 \times 10^6}{79687500} (-75)$$

$$\sigma_{x-max} = \sigma_{x-b} = 4,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x-min} = -\frac{M_{z-E}}{I_z} y_a = -\frac{5 \times 10^6}{79687500} (200 - 75)$$

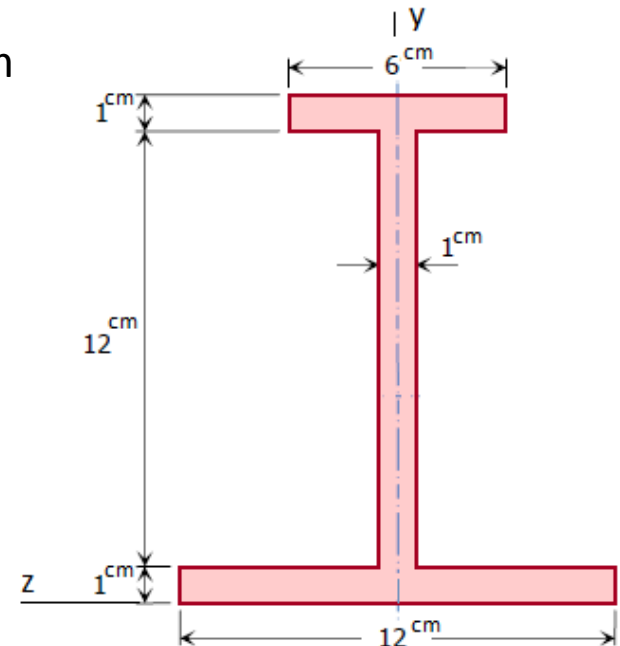
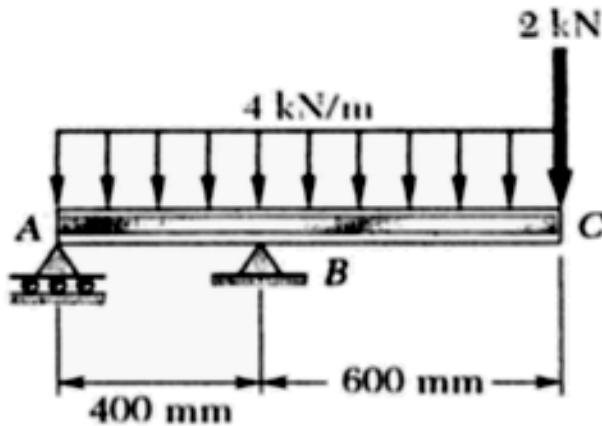
$$\sigma_{x-min} = \sigma_{x-a} = -7,84 \text{ MPa}$$

Örnek (Soru) 4.7* Şekildeki kirişte ortaya çıkan maksimum ve minimum normal gerilmeleri hesaplayınız.
Cevap: 95.3MPa, -89.6MPa



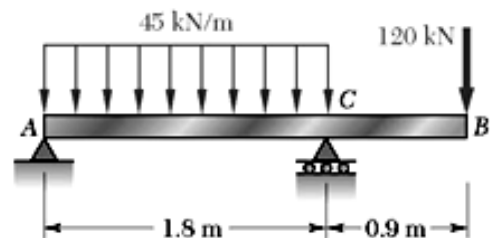
Örnek (Soru) 4.8*

Şekildeki kirişte ortaya çıkan maksimum ve minimum normal gerilmeleri hesaplayınız.



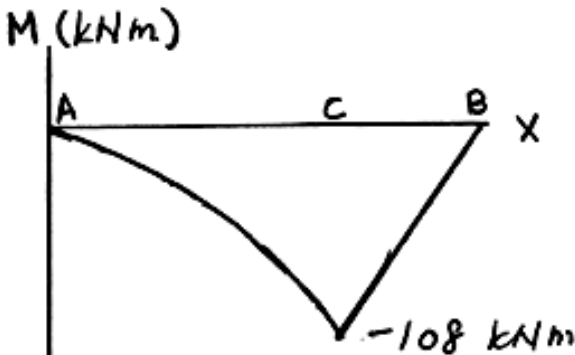
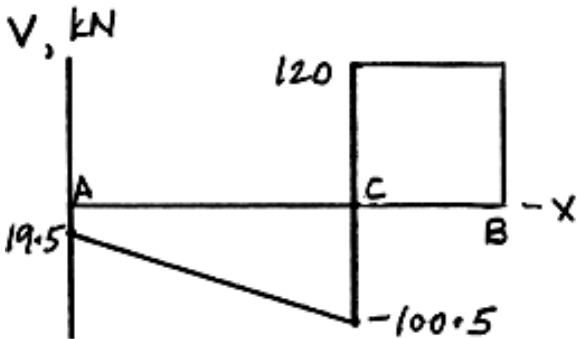
Örnek Sorular: Aşağıdaki kirişlerin kesme kuvveti-eğilme momenti diyagramlarını çiziniz.

Soru 4.9



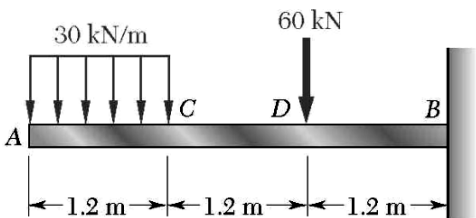
cevap:

Cevap 4.9

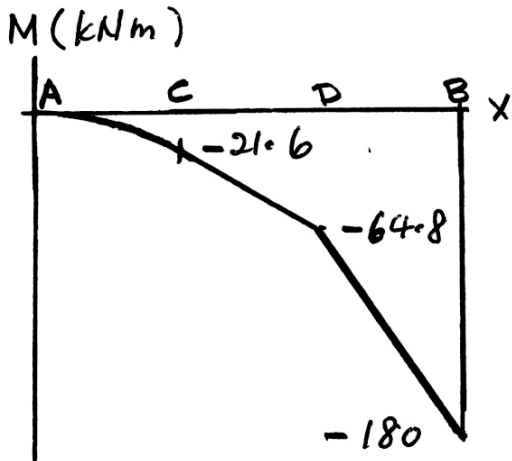
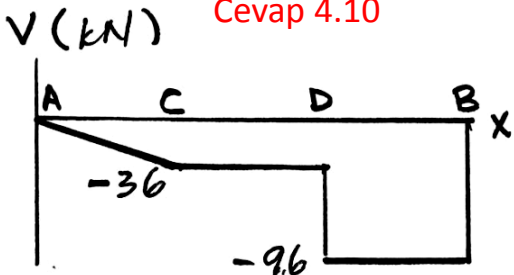


21.12.2018

Soru 4.10

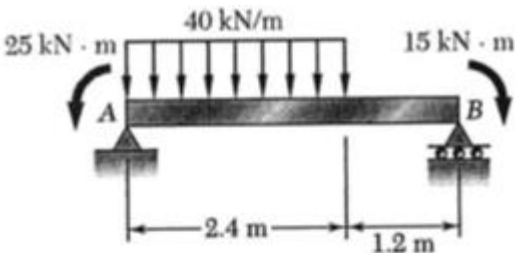


Cevap 4.10

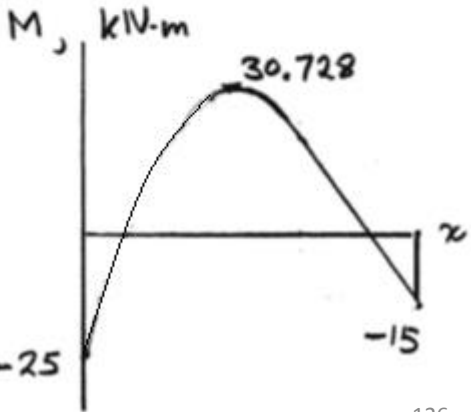
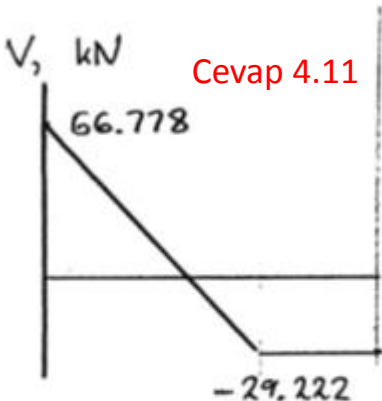


MUKAVEMET - Ders Notları - Prof.Dr. Mehmet Zor

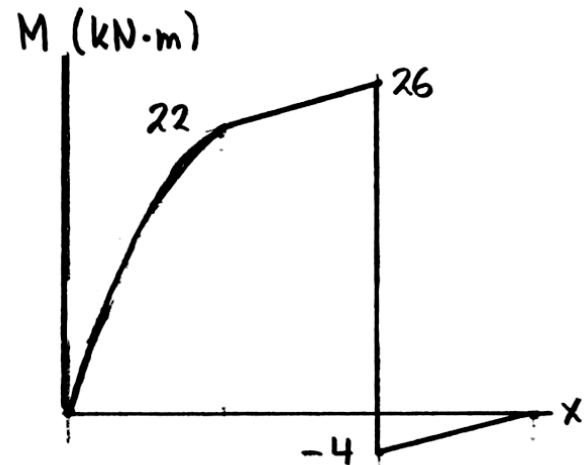
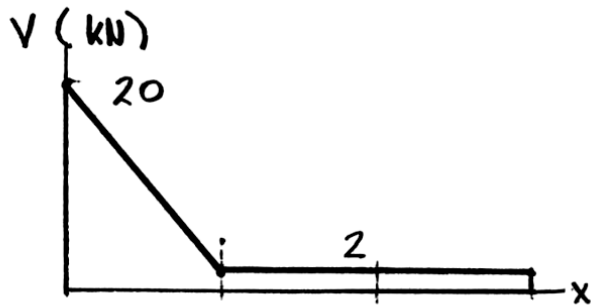
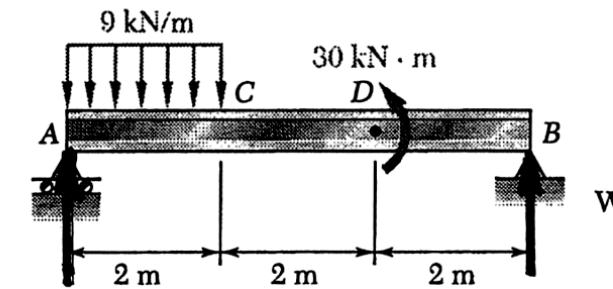
Soru 4.11



Cevap 4.11



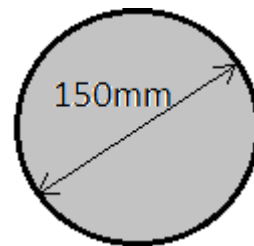
126



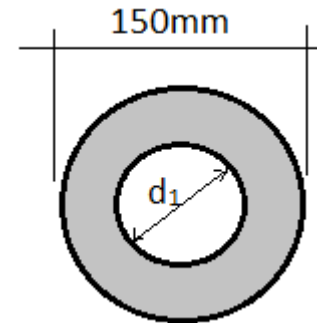
Soru 4.12 Şekildeki gibi yüklenmiş kiriş, 150mm çapında içi dolu dairesel kesittir. Malzemeden kazanmak için kiriş kesitini bir miktar boşaltmak ve içi boş dairesel kesitli (boru kesitli) yapmak istiyoruz. Emniyet sınırları içerisinde kalmak kaydıyla kiriş kesitinde maksimum ne kadarlık çapta bir delik açabilirsiniz?

Kiriş malzemesinin bası ve çekideki akma mukavemeti 300MPa, emniyet katsayısı $n=2$

Cevap: $d_1 = 124.65\text{mm}$ lik bir delik açabiliriz.



Mevcut kesit

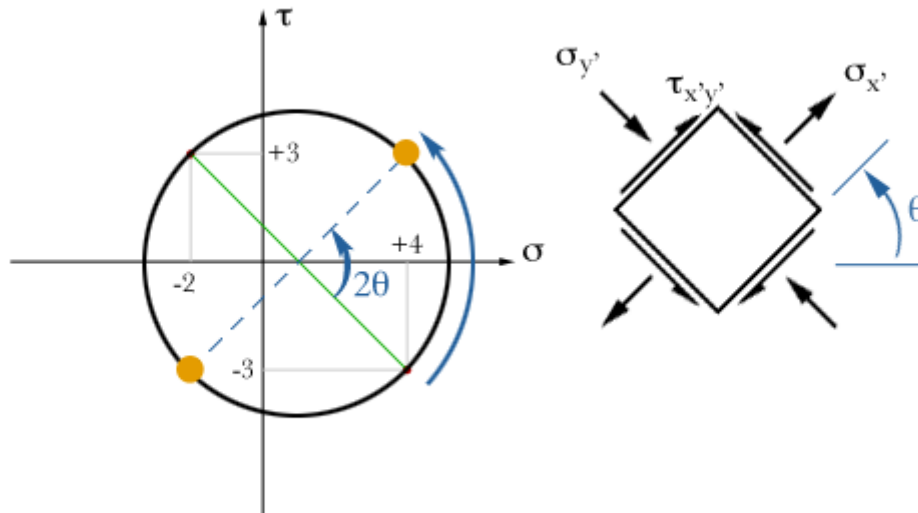


İstenen kesit

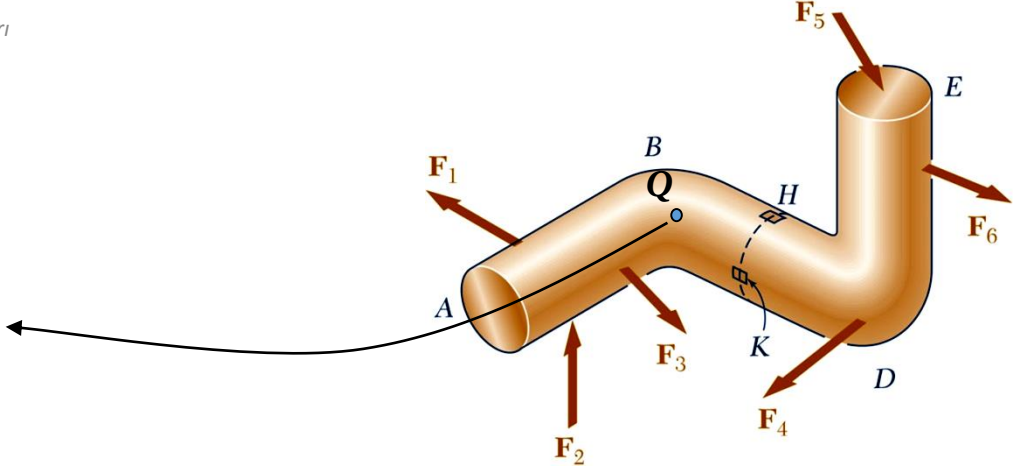
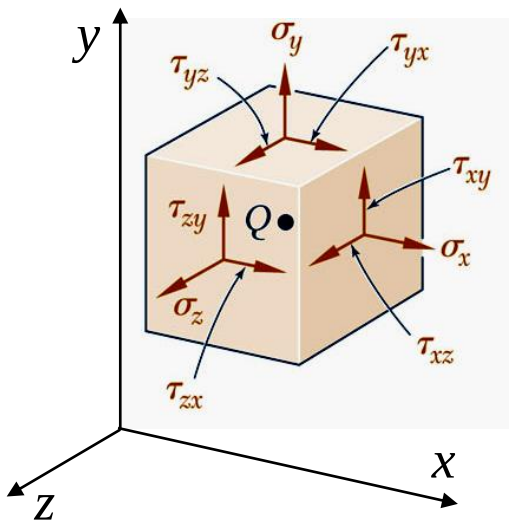
5. Düşey Yüklü Kirişlerde Kayma Gerilmeleri

(Bu konunun yeri burası olmasına rağmen, ders kapsamına dahil edilmemiştir.)

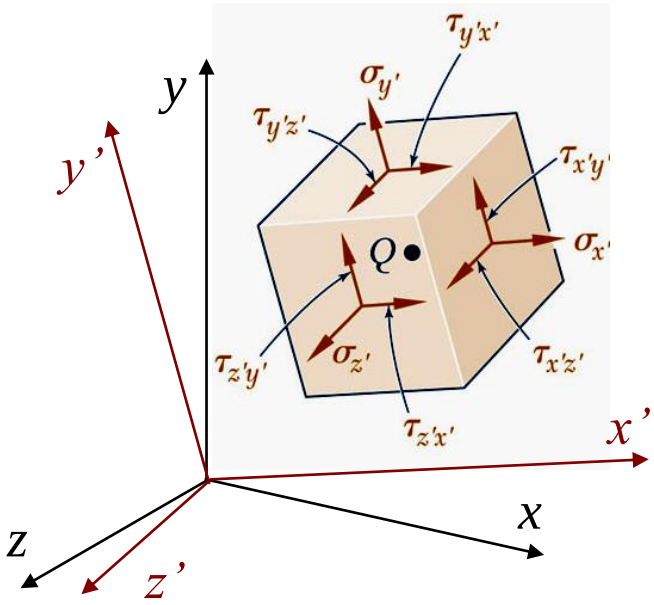
6. DÜZLEMDE GERİLME DÖNÜŞÜMLERİ VE MOHR ÇEMBERİ



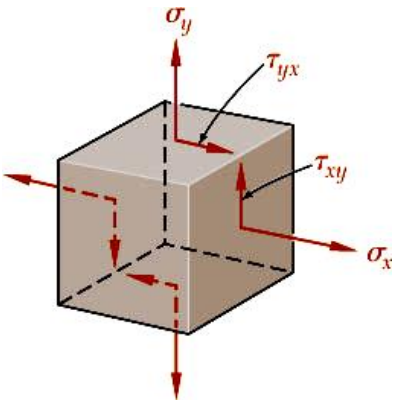
6.1 Konu içeriği ve Amaç



- Genel yükleme durumunda, herhangi bir **Q** noktasını üç boyutlu olarak temsil eden kübik gerilme elemanı üzerinde 6 bağımsız gerilme bileşeni gösterilebilir: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$.
- Söz konusu kübik eleman x - y - z eksenleri yerine döndürülmüş x' - y' - z' eksenlerine paralel alınsaydı gerilme bileşenleri; $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau'_{xy}, \tau'_{yz}, \tau'_{zx}$ olur. Ve x - y - z eksenlerindeki gerilmelerden farklı değerlere sahiptirler.
- Şimdi sorumuz şu: x - y - z eksen takımındaki gerilme bileşenleri belli iken, x' - y' - z' eksen takımındakiler bulunabilir mi?
- *Cevap: Evet, gerilme dönüşüm bağıntılarıyla veya Mohr yardımıyla bulunabilir. Ancak biz burada sadece düzlem gerilme durumu için bu işlemleri yapmayı öğreneceğiz. Yeri geldiği zaman 3 boyutlu duruma da değineceğiz.*

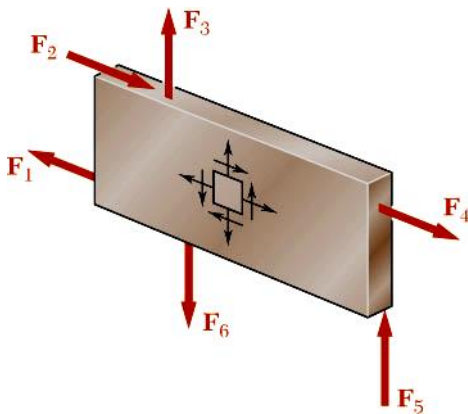


6.2 Düzlem gerilme durumu : Düzlemde (x-y düzleminde) 3 bağımsız gerilme sözkonusudur. $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

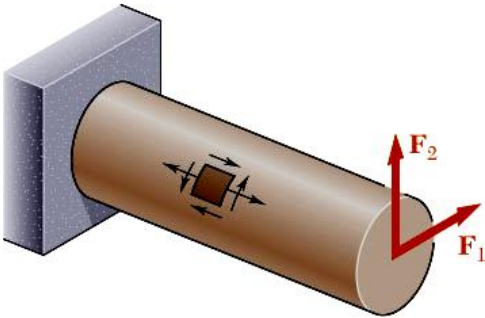


$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

3 boyutlu kübik eleman



İnce bir plakada orta düzlemde etkiyen kuvvetlerden dolayı düzlem gerilme oluşur.



Yapısal bir elemanın veya makine parçasının dış/serbest yüzeyinde düzlem gerilme durumu (yüzeye uygulanmış dış kuvvet/kuvvetler yoksa) ortaya çıkar.

- İnce cidarlı basınçlı tank ve tüplerde de düzlem gerilme durumu söz konusudur.



21.12.2018



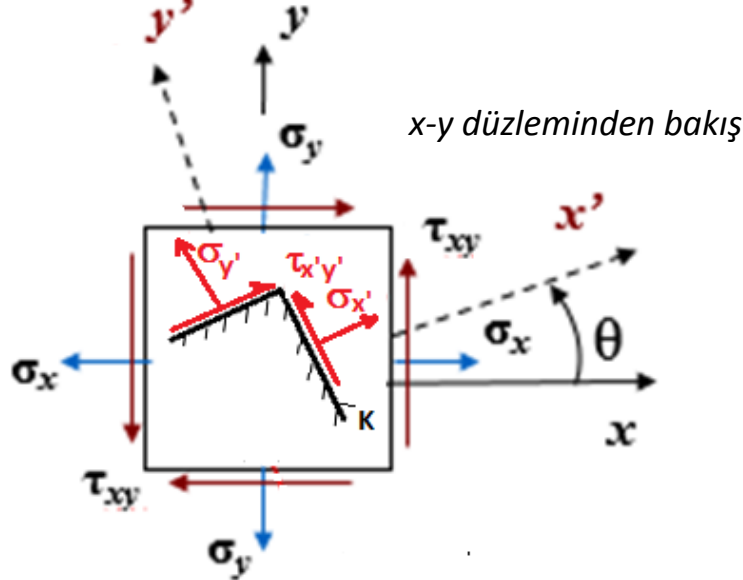
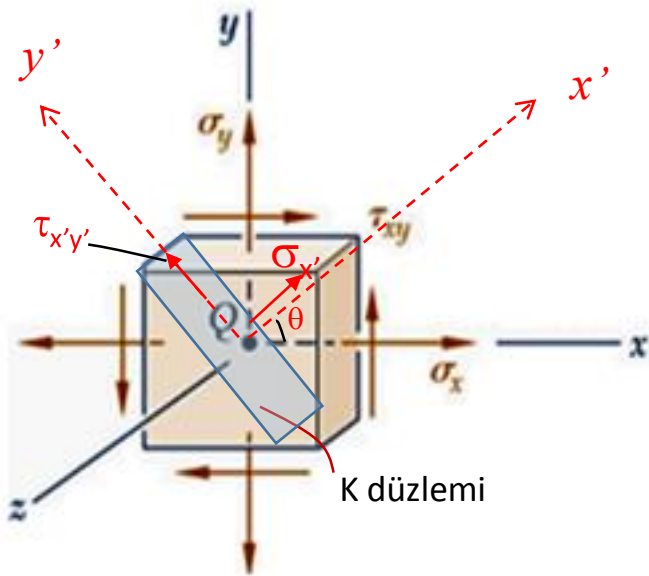
MUKAVEMET - Ders Notları - Prof.Dr. Mehmet Zor



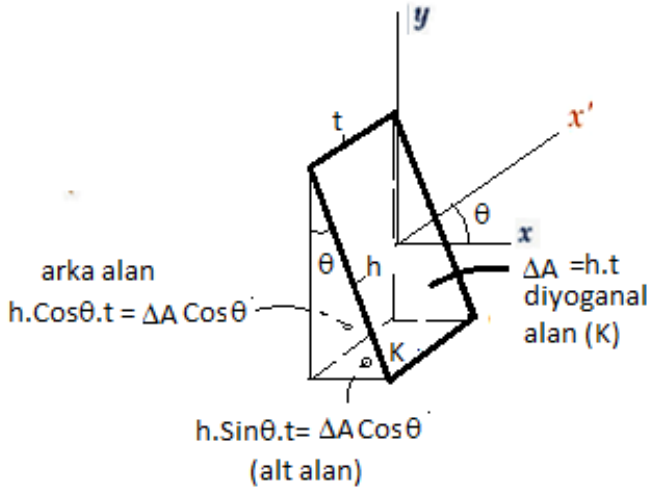
131

6.3 Düzlem Gerilme durumunda bir noktanın farklı düzlemindeki gerilme bileşenlerinin hesaplanması:

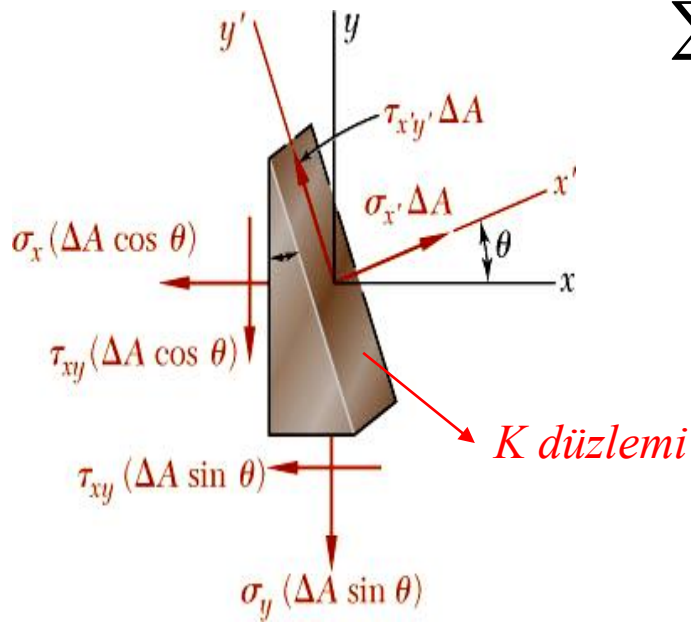
Amacımız bir noktada x-y düzleminde gerilmeler ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) belli iken, aynı noktada farklı bir düzlemdeki (normali x' olan ve +x eksenine ile θ açısı yapan K düzlemindeki) gerilme bileşenlerini ($\sigma_{x'}, \tau_{x'y'}$) bulmaktır.



Şimdi K düzleminde bir kesim yapıp çıkan parçanın alanlarını inceleyelim:



Şimdi çıkan parçanın statik dengesinden kuvvet dengelerini yazacağız:



$$\sum F_{x'} = 0 = \sigma_{x'} \Delta A - \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \cos \theta$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

K düzlemindeki normal gerilme

(I)

$$\sum F_{y'} = 0 = \tau_{x'y'} \Delta A + \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \cos \theta + \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \sin \theta$$

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

K düzlemindeki kayma gerilmesi

(II)

$\sigma_{x'}$ bağıntısında θ yerine $\theta+90$ yazılarak:

$$\begin{aligned} \cos(\theta + 90) &= -\sin \theta \\ \sin(\theta + 90) &= \cos \theta \end{aligned}$$

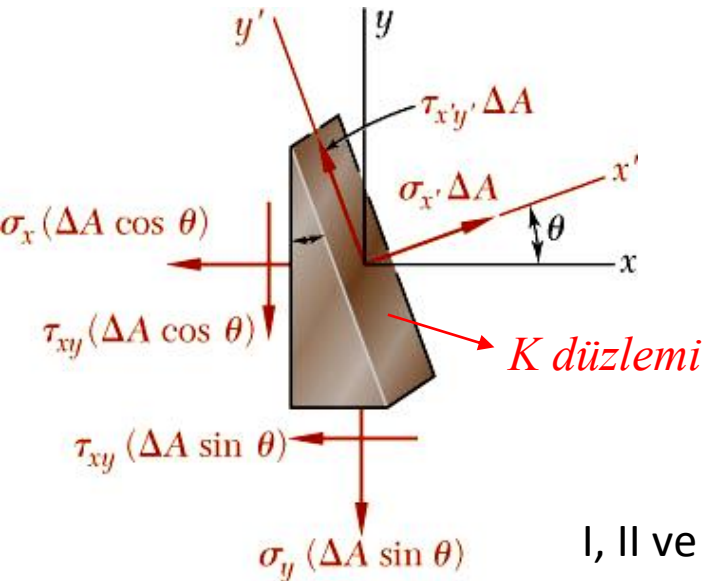
$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

K düzlemine dik düzlemdeki normal gerilme

(III)

Aslında bu formüllerle amacımıza ulaştık. Yani herhangi bir düzlemdeki gerilme bileşenlerinin elde ettik. Bundan sonra bu formülleri biraz daha düzgün formata getireceğiz ve bir geometrik ifade (Mohr Çemberi) elde edeceğiz.

Trigonometrik dönüşüm bağıntıları kullanılarak 2θ cinsinden denklemleri yazmaya çalışacağız.



$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

I, II ve III denklemlerinde yerine koyarsak;

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$
$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$
$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

(IV)

(V)

(VI)

I, II ve III denklemlerinin 2θ cinsinden ifadeleridir.

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

6.4 Mohr Çemberi:

Aslında bir noktada sonsuz tane düzlem vardır. Ancak bu düzlemlerin hepsi bir çember üzerinde ifade edilebilir ve bu çemberde gerilme bileşenleri bulunabilir. Şöyleki:

(IV)ve (VI) nolu denklemler yeniden düzenlenip kareleri alınarak taraf tarafa toplanırsa parametrik bir daire denklemini elde edilir.

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta\right)^2$$

$$(\tau_{x'y'})^2 = \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta\right)^2$$

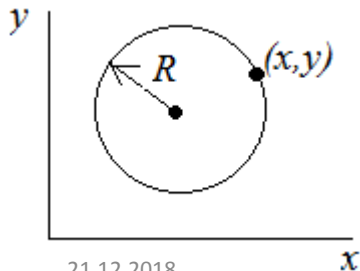
+

$$\underbrace{\left(\sigma_{x'} - \sigma_{ort}\right)^2 + (\tau_{x'y'})^2}_{R^2} = \underbrace{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}_{R^2}$$

$\downarrow$ x $\downarrow$ a $\downarrow$ y

Çember denklemi :

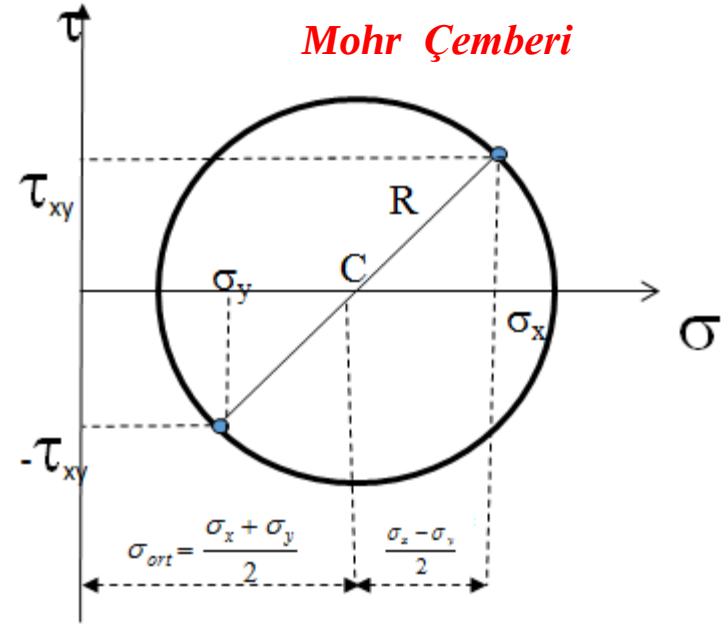
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$



21.12.2018

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{ort})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \longrightarrow$$

$$\sigma_{ort} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}; \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



x ekseninde bir çemberin denklemine benzetilebilir. (b=0)

6.4.1 Mohr Çemberinin Çizimi : Bir noktadaki tüm düzlemlerde gerilme durumunu gösteren geometridir.

- Ölçekli çizildiğinde herhangi bir düzlemdeki gerilme bileşenlerini ölçerek bulabiliriz.
- Veya ölçekli çizilmezse mohr çemberinden geometrik hesaplarla da bulabiliriz. (Veya mohr çemberi yerine daha önce çıkardığımız formüllerden de bulabiliriz.)

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ belli iken o noktada mohr çemberi çizilebilir.

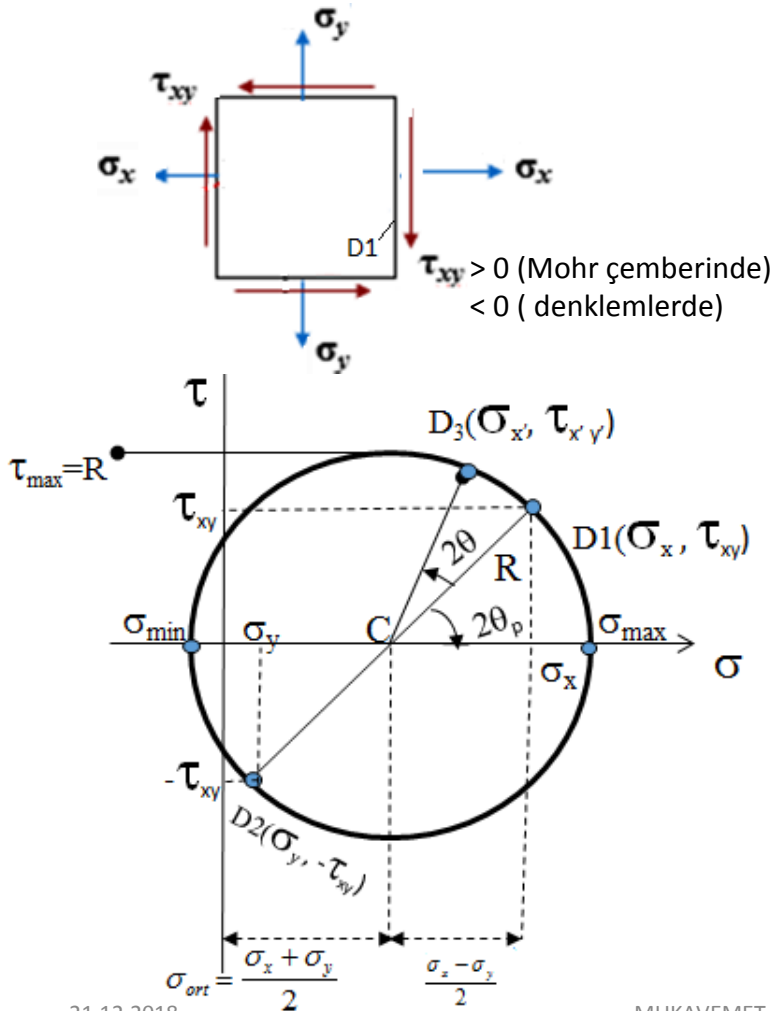
Mohr Çemberi Çizim Sırası:

- 1-D1 ($\sigma_x; \tau_{xy}$) noktası belirlenir.
- 2-D2 ($\sigma_y; -\tau_{xy}$) noktası belirlenir.
- 3- D1-D2 birleştirilir.
- 4-C merkezli çember çizilir.

Önemli noktalar:

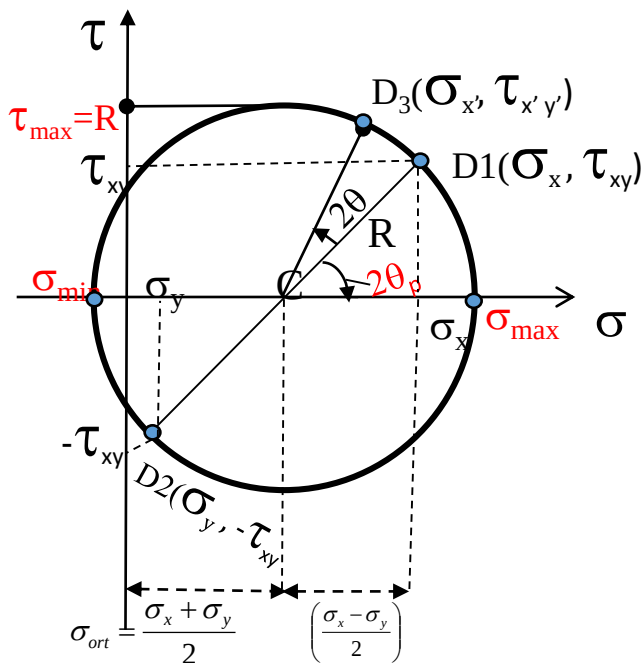
- 1-) Bulunduğumuz nokta D1 dir.
- 2-) Kayma gerilmesinin yönü sağ düzlemde aşağı doğru ise pozitifdir.
- 3-) Gerçekte normal $+x$ eksenini ile θ açısı yapan düzlem, Mohr çemberinde D3 noktasına karşılık gelir. D3 e ulaşmak için mohr çemberinde gerçektekiyle aynı yönde 2θ kadar bulunduğumuz nokta (D1) dan dönülür. D3 ün mohr çemberindeki koordinatları, o düzlemdeki

normal gerilmeyi ($\sigma_{x'}$) ve kayma gerilmesi $\tau_{x'y'}$ ni verir.



6.4.2. Asal Gerilmeler (Principle Stresses)

Mohr Çemberine dikkat edilirse +x eksenine θ_p açısı yapan düzlemde normal gerilme diğer düzlemlere göre maksimumdur ($\sigma_{\max}$) ve bu düzlemde kayma gerilmesi sıfırdır. Bu düzleme ulaşmak için bulunduğumuz noktadan (D1den) $2\theta_p$ kadar dönülür. Gerçekte bu düzlem dik (+90 derece) düzlemde ise normal gerilme minimumdur ($\sigma_{\min}$). Bu özel gerilmelere asal gerilmeler (principal stress) , düzlemlerine asal gerilme düzlemleri denir.



Asal Gerilmeler:

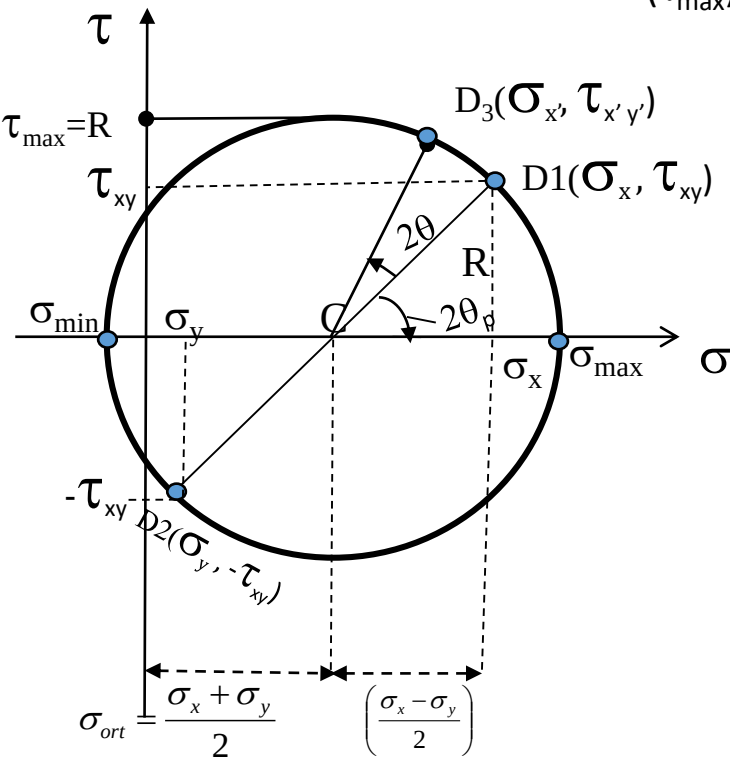
$$\sigma_{\max, \min} = \sigma_{ort} \pm R$$

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Asal gerilme düzlemleri:

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}$$

6.4.3 Maksimum kayma gerilmesi- $\tau_{\max}$: Asal gerilme düzlemleriyle gerçekte 45° , mohr çemberinde 90° açı yapan düzlemde ise kayma gerilmelerin maksimum değeri ($\tau_{\max}$) bulunur. Bu düzlemdeki normal gerilme ise σ_{ort} dır.



$$\tau_{\max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1)$$

veya Asal Gerilmeler cinsinden

$$\tau_{\max} = R = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (2)$$

Dikkat: düzlem gerilme durumunda (1) ve (2) formüllerinin kullanılabilmesi için

$\sigma_{\max} > 0, \quad \sigma_{\min} \leq 0$ Şartının sağlanması gerekir.

Bu şart sağlanmıyorsa $\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{2}$ formülüyle hesaplanmalıdır.

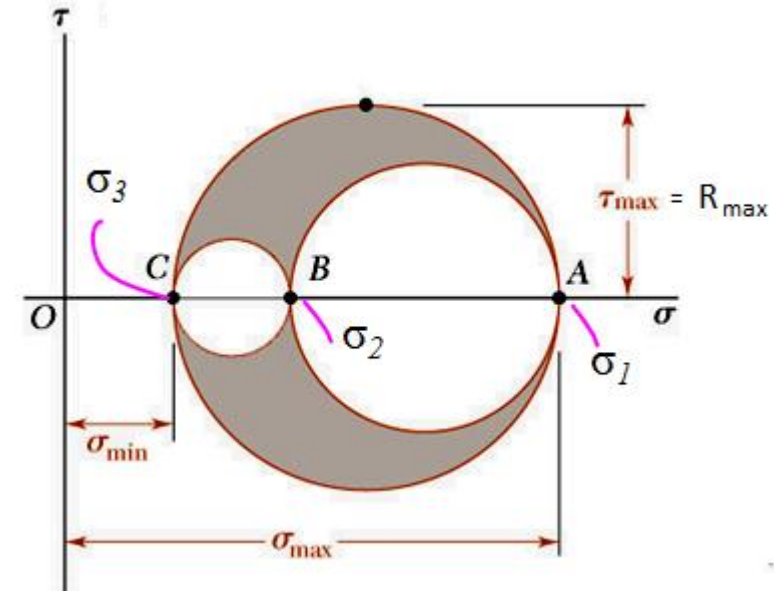
Bunun sebebini anlamak için bir sonraki sayfadaki 3 boyutlu mohr çemberini dikkatlice inceleyiniz.

6.4.4 Üç boyutlu durumda, Mohr Çemberi:

3 boyutlu gerilme durumunda, 3 tane asal gerilme vardır.

$$\begin{array}{ccc} \sigma_1 & > & \sigma_2 & > & \sigma_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \sigma_{\max} & > & \sigma_{\text{orta}} & > & \sigma_{\min} \end{array}$$

- Bu asal gerilmelerin arasında 3 çember çizilir.
- Büyük çemberin yarıçapı ($R_{\max}$) maksimum kayma gerilmesine eşittir.
- Herhangi bir düzlemdeki gerilme bileşenleri büyük çemberle diğer çemberlerin arasında kalan alandadır. (şekildeki koyu alan). Ancak hesap şekli burada gösterilmeyecektir.



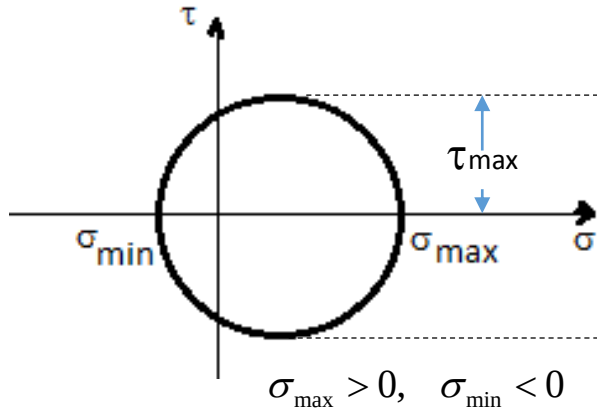
$$\tau_{\max} = R_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (I)$$

6.4.4 Üç boyutlu durumda, Mohr Çemberi -devam:

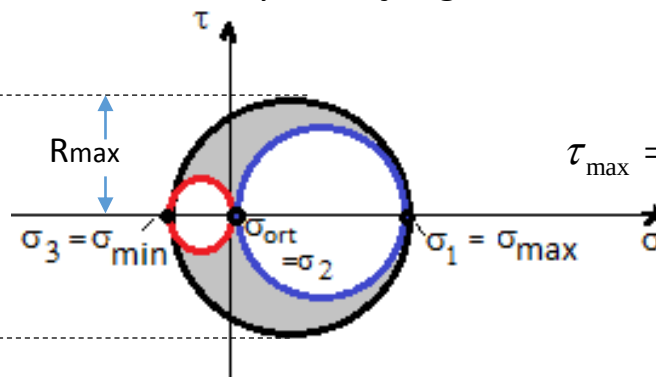
2 boyutlu durumda bulduğumuz mohr çemberinde, 3ncü asal gerilmenin daima sıfır olduğu düşünülmelidir. Buna göre iki boyuttaki mohr çemberinin üç boyuttaki eşdeğeri çizilir ve $\tau_{\max} = R_{\max}$ olarak bulunur. ($\sigma_{\max} = \sigma_1$ dir. Ancak 2 boyutta bulunan $\sigma_{\min}$ değeri Duruma göre σ_2 veya σ_3 olabilir.)

Örneğin

düzlem gerilme durumunda mohr çemberi :



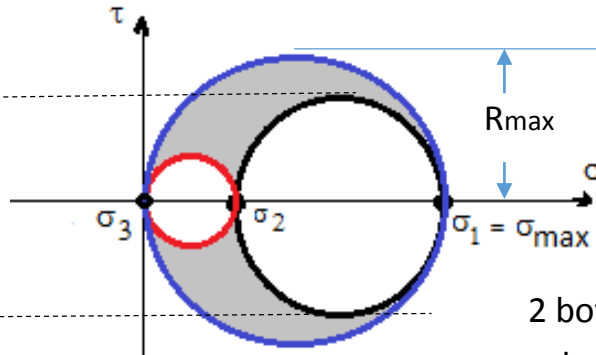
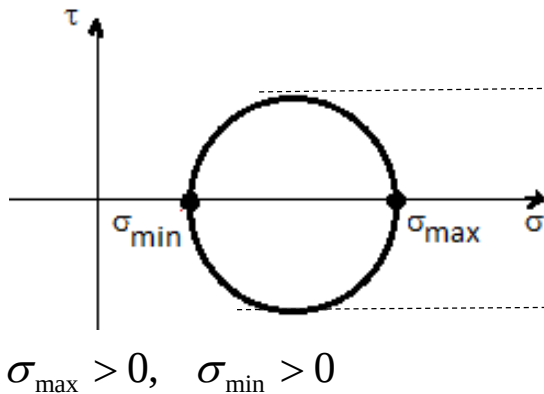
3 boyutta eşdeğeri



$$(\sigma_2=0)$$

$$\tau_{\max} = R_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

2 boyutta bulduğumuz $\sigma_{\min}$,
3 boyutta σ_3 e eşit çıkmıştır.



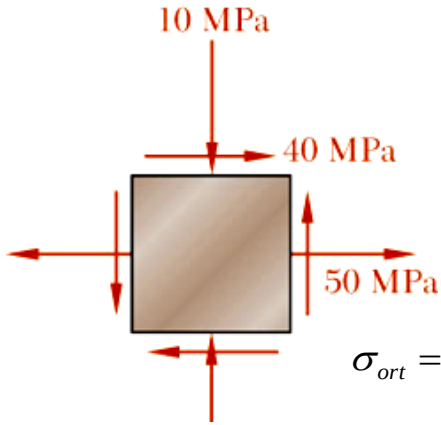
$$(\sigma_3=0)$$

$$\tau_{\max} = R_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{\max}}{2}$$

2 boyutta bulduğumuz $\sigma_{\min}$ 3 boyutta
ortanca gerilmeye (σ_2 ye)eşit çıkmıştır.

Örnek 6.1

Şekildeki düzlem gerilme durumu için **Mohr Çemberini** çizerek (a) asal gerilmeleri ve doğrultularını/düzlemlerini, (b) maksimum kayma gerilmesini bulunuz.



$$\sigma_{ort} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{(50) + (-10)}{2} = 20 \text{ MPa}$$

Yarıçap: $R = CD1 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$

$$\tau_{max} = R = 50 \text{ MPa}$$

Asal gerilmeler ve düzlemleri :

$$\sigma_{max,min} = \sigma_{ort} \pm R$$

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{max} = OA = OC + CA = 20 + 50$$

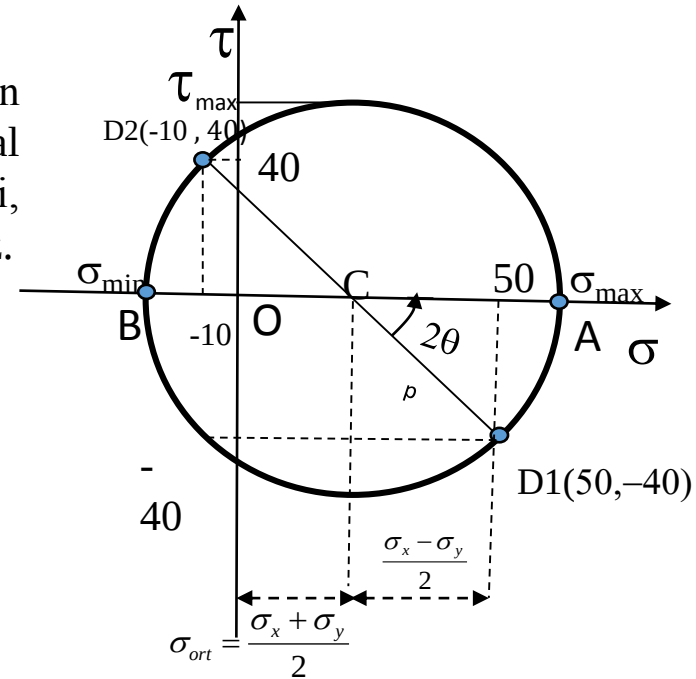
$$\sigma_{max} = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{min} = OB = OC - BC = 20 - 50$$

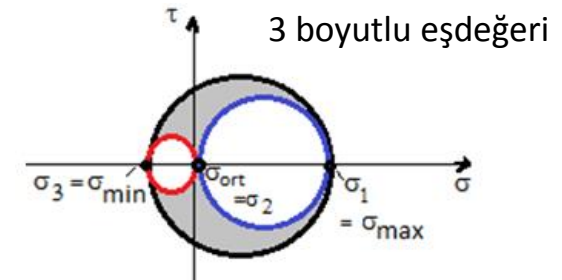
$$\sigma_{min} = -30 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{40}{30}$$

$$\theta_p = 26.6^\circ$$



b-) $\sigma_{max} > 0$, $\sigma_{min} < 0$ olduğu için

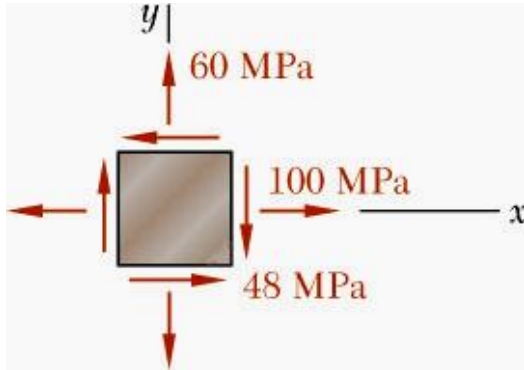


$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{70 - (-30)}{2}$$

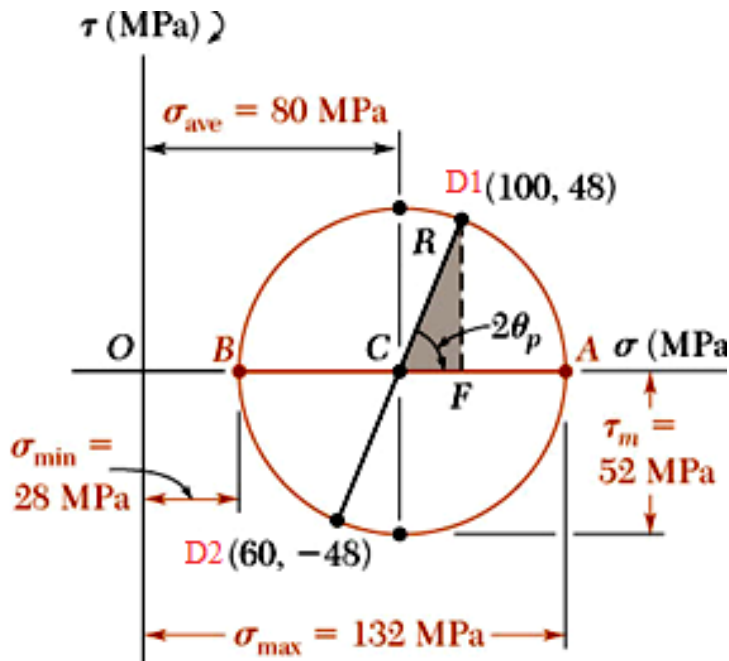
$$\rightarrow \tau_{max} = 50 \text{ MPa}$$

Örnek 6.2

Şekildeki düzlem gerilme durumu için ; a) Mohr Çemberini çiziniz. b) asal gerilmeleri ve doğrultularını bulunuz. c) normal +x eksenine 30 ° açı yapan yüzeydeki gerilmeleri bulunuz. d-) Maksimum kayma gerilmesini bulunuz.



a-) $\sigma_x = 100 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 60 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 48 \text{ MPa}$



b-)

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{100 + 60}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100 - 60}{2}\right)^2 + 48^2}$$

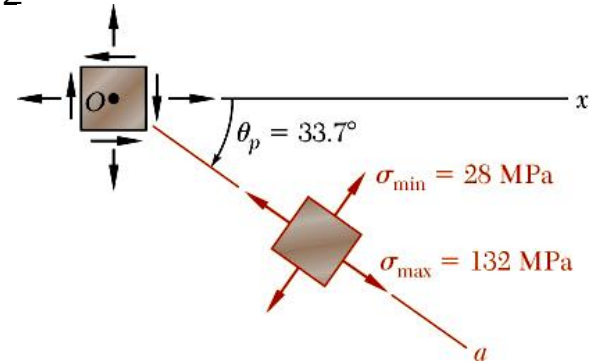
$$\sigma_{\max} = 80 + 52 = 132 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = 80 - 52 = 28 \text{ MPa}$$

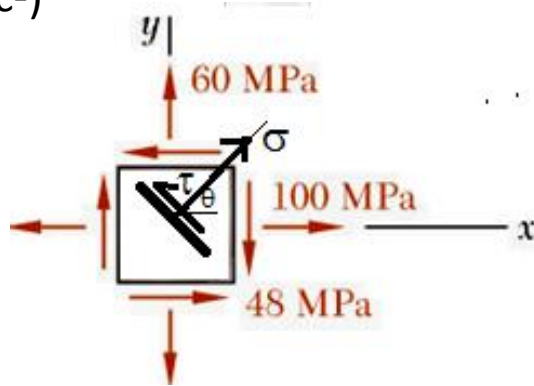
$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} = \frac{48}{\frac{100 - 60}{2}} = 2.4$$

$$\theta_p = 33.7^\circ$$

$$2\theta_p = 67.4^\circ$$



c-)

 **$\theta=30^\circ$ deki gerilmeler**

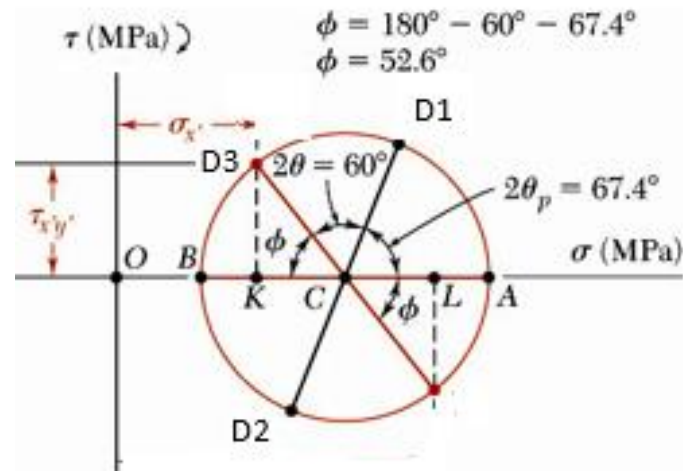
Analitik formüllerden (τ_{xy} aşağı doğru negatif alınır)

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta = 48.4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = 41.3 \text{ MPa}$$

Veya Mohr çemberinden geometrik olarak bulunabilir. (τ_{xy} aşağı doğru pozitif alınır)

Bulduğumuz nokta olan D1 den aynı yönde 2θ kadar aynı yönde döndüğümüzde mohr çemberi üstündeki D3 noktasının koordinatları o düzlemdeki gerilme bileşenlerini verecektir.



D2

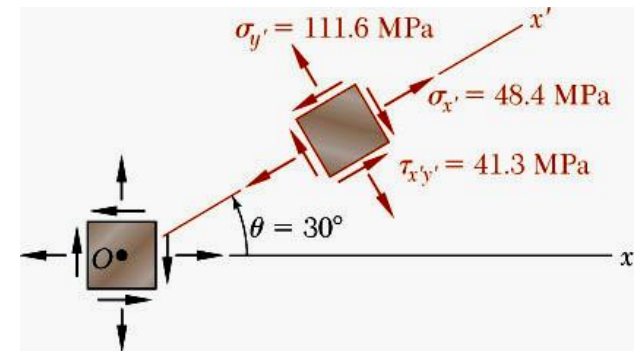
$$\phi = 180^\circ - 60^\circ - 67.4^\circ = 52.6^\circ$$

$$\sigma_{x'} = OK = OC - KC = 80 - 52 \cos 52.6^\circ$$

$$\tau_{x'y'} = KD3 = 52 \sin 52.6^\circ$$

$$\sigma_{x'} = +48.4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = 41.3 \text{ MPa}$$



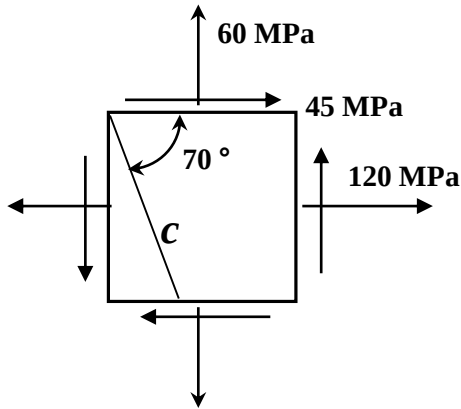
d-) Maksimum Kayma gerilmesi

$\sigma_{\max} > 0, \quad \sigma_{\min} > 0$ olduğu için,

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{2} = \frac{132}{2} = 66 \text{ MPa} .$$



Örnek 6.3*:



Yanda verilen gerilme durumu için;

a) Mohr çemberini çiziniz.

b-) Asal gerilmeler ve doğrultularını bulunuz

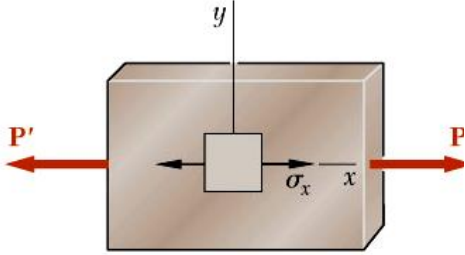
c-) Maksimum kayma gerilmesini bulunuz.

d-) c düzlemindeki normal ve kayma gerilmelerinin değerini hesaplayınız.

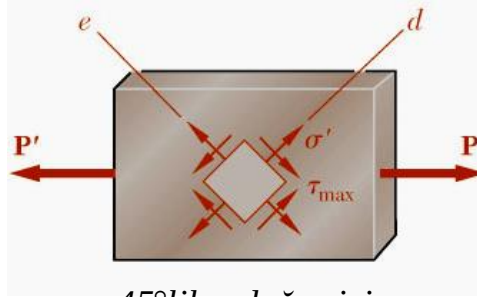
Cevaplar: b-) $\sigma_{\max} = 144 \text{ MPa}$, $\sigma_{\min} = 36 \text{ MPa}$, $\theta = 28.15^\circ$,

c-) $\tau_{\max} = 72 \text{ MPa}$, d-) $\sigma_{x'} = 142 \text{ MPa}$, $\tau_{x'y'} = 15.2 \text{ MPa}$,

6.4.5 Eksenel yükleme için Mohr çemberi

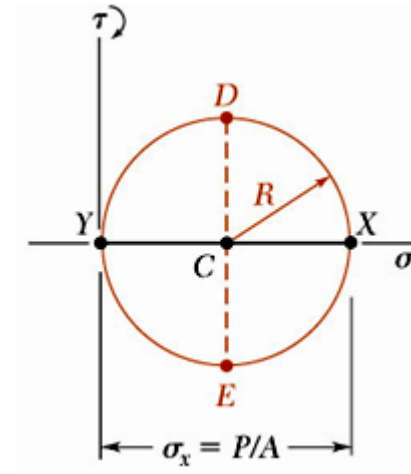


$$\sigma_x = \frac{P}{A}, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

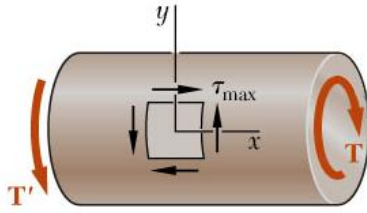


45°lik doğ. için

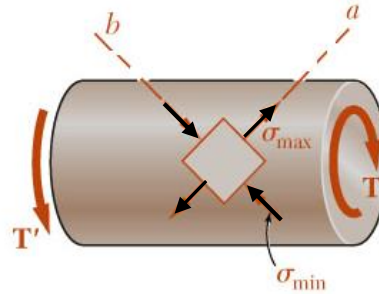
$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \frac{P}{2A}$$



6.4.6 Saf burulma (pure torsion) durumu için Mohr çemberi

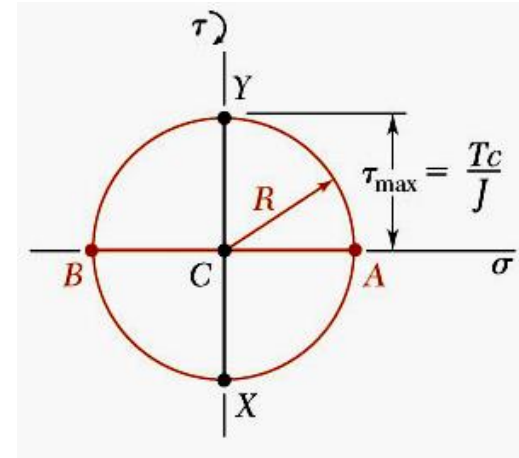


$$\sigma_x = \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = \frac{Tc}{J}$$

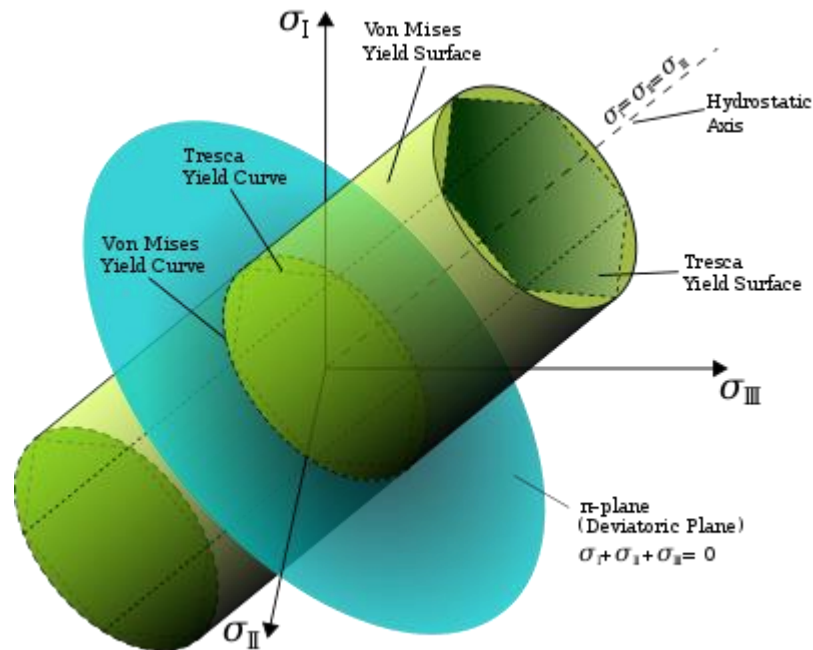


45°lik doğ. için

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{Tc}{J} \quad \tau_{xy} = 0$$



7. AKMA VE KIRILMA KRİTERLERİ



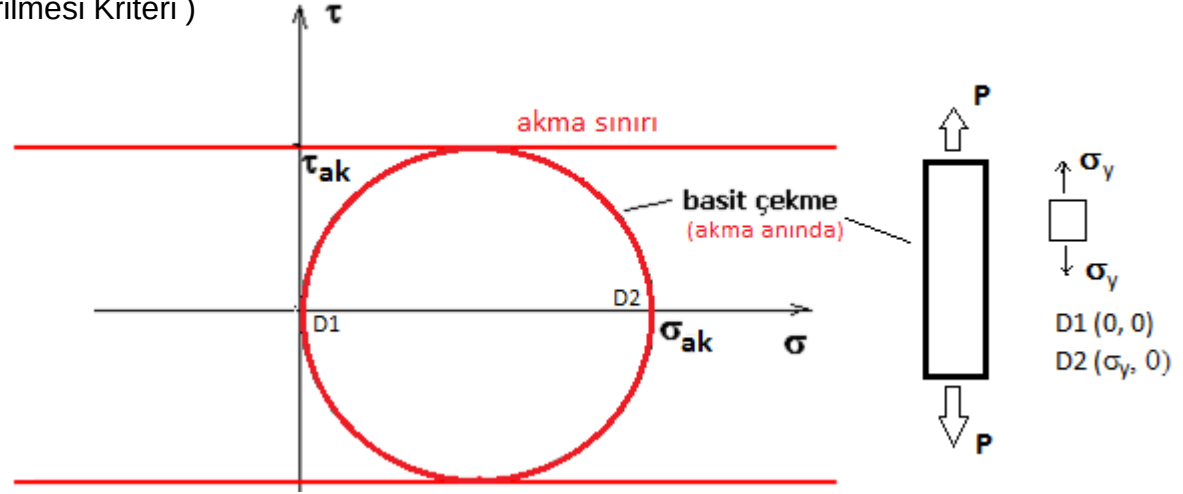
7. AKMA VE KIRILMA KRİTERLERİ NEDİR?, NİÇİN GEREKLİDİR?

- Şu ana kadar ki konularda, bir noktada sadece tek bir gerilme cinsi varken mukavemet hesapları yapılıyordu. Örneğin eksenel yükleme (çeki-bası) ve eğilmede sadece σ_x gerilmesi ortaya çıkmakta ve σ_{em} ile karşılaştırılmaktadır. Burulmada ve kesme yüklemesinde ise sadece τ_{xy} ortaya çıkmakta ve τ_{em} ile karşılaştırılmaktadır.
- Şimdi şu soruya cevap arıyoruz: Acaba bir noktada aynı anda birden fazla gerilme cinsi ($\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y$ vb) mevcutken hangisini σ_{em} veya τ_{em} karşılaştıracacağız.? Veya nasıl bir yol takip edeceğiz.
- İşte bu soruya cevap veren birden fazla kriter vardır.
- **Akma kriterleri** : Sünek malzemeler için akma olup olmadığını;
- **Kırılma kriterleri**: gevrek malzemeler için kırılma olup olmadığını kontrol etmemizi sağlar.
- Şimdi bu kriterlerden en önemli 4 tanesini inceleyeceğiz.

7.1 Sünek Malzemeler için Akma Kriterleri

7.1.1 Tresca Kriteri (Maksimum Kayma Gerilmesi Kriteri)

Bu kriter gere göre bir malzemenin herhangi bir noktasında akma olmasının şartı, o noktadaki maksimum kayma gerilmesinin, basit çekme halinde akma sınırındaki kayma gerilmesine eşit veya büyük olmasıdır.



$$\tau_{ak} = \frac{\sigma_{ak}}{2}$$

Akma olmasının şartı: $\tau_{max} \geq \tau_{ak}$

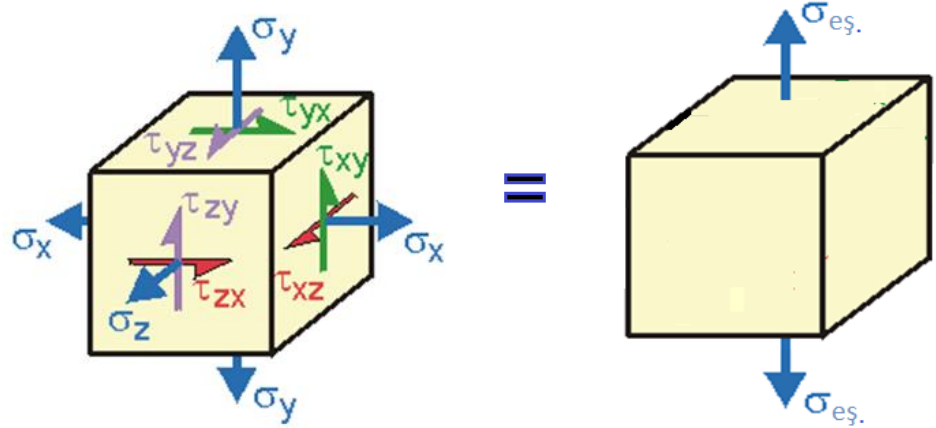
Bir başka ifadeyle bir noktadaki Mohr çemberi basit çekme halinde akma anındaki Mohr çemberinden büyük olursa o noktada akma olur.

Bu kriter sünek malzemelerin akması için çok iyi sonuçlar verir.

7.1 Sünek Malzemeler için Akma Kriterleri -devam

7.1.2 Von-Mises Kriteri (Eşdeğer Gerilme veya Maksimum Çarpılma Enerjisi Kriteri)

Bu kriter çok eksenli gerilme durumunu tek eksenli gerilme durumuna indirger. Tüm gerilmeler yerine 1 tane eşdeğer gerilme ($\sigma_{eş}$) tanımlanır. Bu eşdeğer gerilme akma gerilmesini aşarsa o noktada akma oluşur denir.



$$\sigma_{eş} = \sigma_{vm} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)]}$$

Asal gerilmeler cinsinden eşdeğer gerilme:

$$\sigma_{eş} = \sigma_{vm} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]}$$

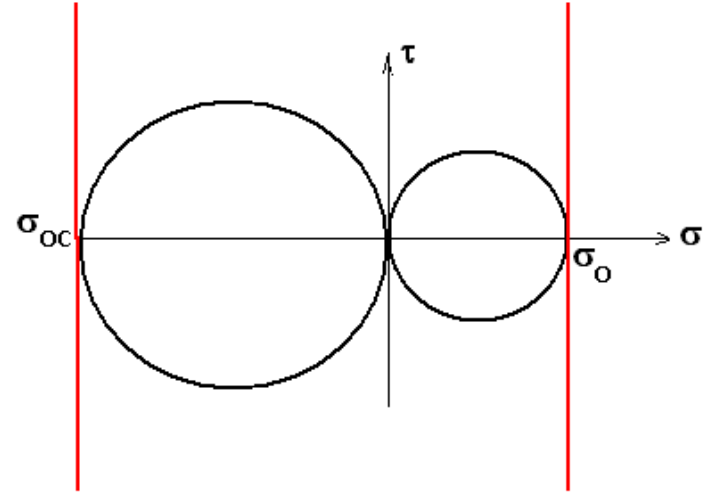
Akma Şartı: $\sigma_{eş} \geq \sigma_{ak}$

Bu kriter sünek malzemelerin akması için mükemmel sonuçlar verir.

7.2. Gevrek Malzemeler için Kırılma Kriterleri

7.2.1 Rankine Kriteri

Bu kriter gere göre bir malzemenin herhangi bir noktasında kırılma olması için o noktadaki maksimum asal gerilmenin malzemenin çekme gerilmesini veya minimum asal gerilmenin basıdaki kırılma mukavemetini geçmesini gerekir.



Kırılma şartları:

$$\sigma_1 \geq \sigma_o \quad \text{ve} \quad |\sigma_3| \geq |\sigma_{oc}|$$

Başka bir ifadeyle, bu kriter gere göre, bir noktada kırılma olmaması için o noktadaki Mohr çemberinin şekildeki kırmızı çizgiler içinde kalması gerekir.

Gevrek Malzemelerin kırılması için kısmen iyi sonuçlar veren bir kriterdir.

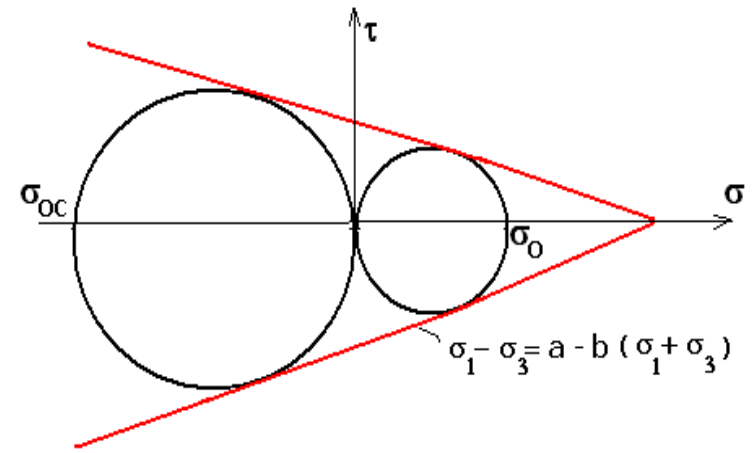
7.2. Gevrek Malzemeler için Kırılma Kriterleri – devam:

7.2.2 Columb Kriteri:

Gevrek malzemeler için çok iyi sonuç veren bu kritere göre bir malzemenin herhangi bir noktasında kırılma **olmamasının** şartı:

$$\frac{\sigma_1}{|\sigma_o|} - \frac{\sigma_3}{|\sigma_{oc}|} < 1$$

Başka bir ifadeyle bu kritere göre: basit çekme ve basit basma hallerinin en büyük Mohr çemberlerinin teğetleri dışında kalan yüklemelerde kırılma olur.



σ_1 = Maksimum asal gerilme

σ_3 = Minimum asal gerilme

σ_o = Çekme Mukavemeti

σ_{oc} = Basma Mukavemeti

Örnek : $\sigma_o=100\text{MPa}$ $\sigma_{oc}=400\text{MPa}$ olan bir malzemede herhangi a ve b gibi iki noktada asal gerilmeler,

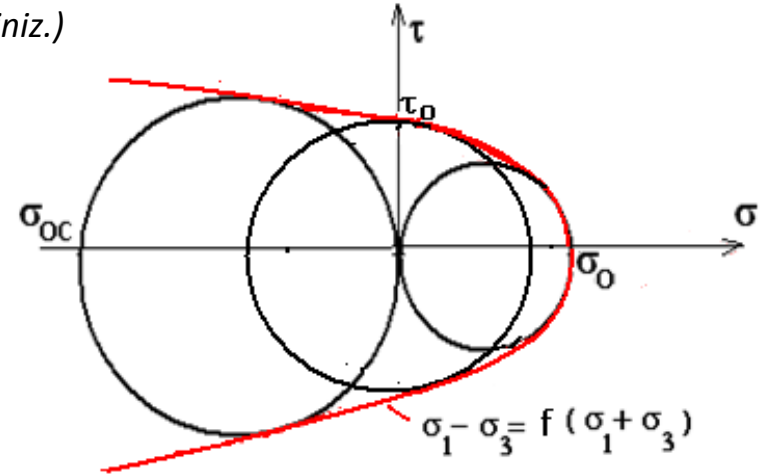
	σ_1	σ_3	$\frac{\sigma_1}{ \sigma_o } - \frac{\sigma_3}{ \sigma_{oc} }$
a	50	-100	$50/100 - (-100/400) = 0.75$
b	90	-100	$90/100 - (-100/400) = 1.15$

a ve b noktalarının her iksinde de Rankine kriterine göre kırılma olmayacağı söylenebilir. Columb kriterine göre ise a noktasında kırılma olmaz ancak b noktasında olur.

7.2. Gevrek Malzemeler için Kırılma Kriterleri – devam:

7.2.3. Mohr Kriteri *(Bilgi amaçlıdır. Sınavda sorumlu değilsiniz.)*

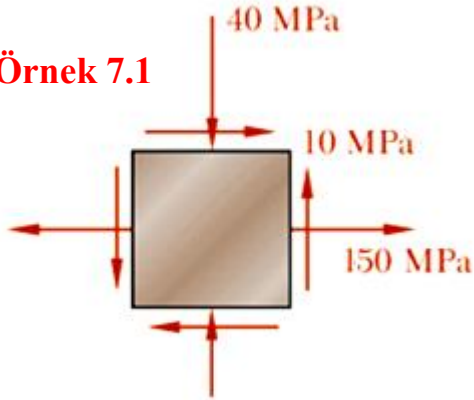
Bu kriter gere: basit çekme, basit basma ve tam kayma hallerinin en büyük Mohr çemberlerinin zarf eğrilerinin dışında kalınan yüklemelerde kırılma olur. Gevrek malzemeler için çok iyi sonuçlar veren bir kriterdir.



$$\sigma_1 \geq \sigma_o$$

*Görüldüğü gibi gevrek malzemelerde, her üç kriterde de asal gerilmelerin incelenmesi gerekliliği ortaya çıkmaktadır.

*Asal gerilmeler sonuçlarda görülmesine rağmen, Columb ve Mohr kriterleri için ayrı bir değerlendirme yapılması gerekebilir...

Örnek 7.1

$$R = CD1 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{150 - (-40)}{2}\right)^2 + 10^2} = 95.52$$

Maksimum kayma gerilmesi: $\tau_{\max} = R = 95.52 \text{ MPa}$

Asal gerilmeler

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{150 - 40}{2} \pm R = 55 \pm 95.52$$

$$\sigma_{\max} = 150.52 \text{ MPa} = \sigma_1 \quad \sigma_{\min} = -40.52 \text{ MPa} = \sigma_3$$

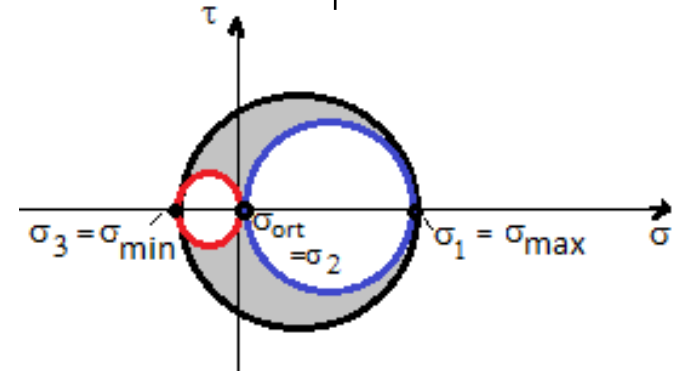
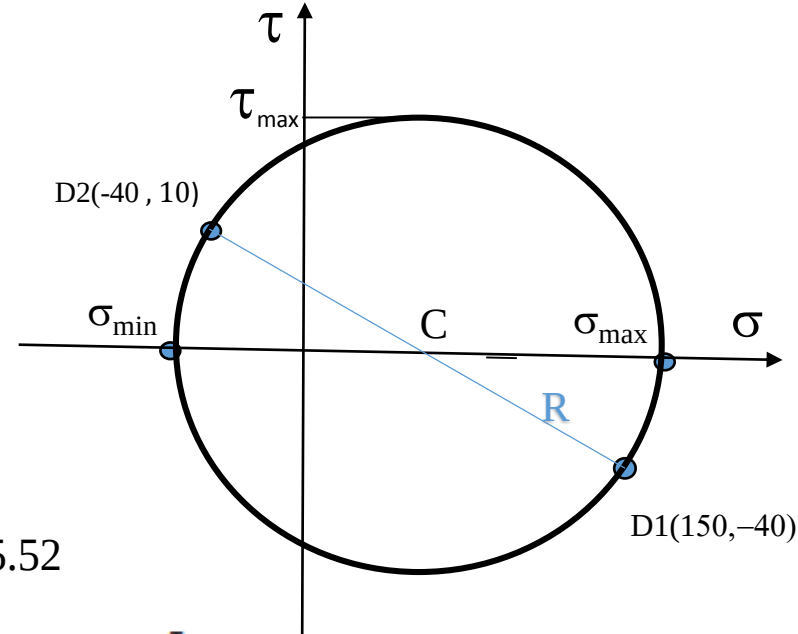
Mohr çemberinin 3 boyutlu eşdeğeri

Şekildeki düzlem gerilme durumu verilen noktada

a-) Alüminyum malzeme için, ($\sigma_{\text{akma}} = 200 \text{ MPa}$, $\tau_{\text{akma}} = 100 \text{ MPa}$)

b-) Tahta malzeme için, ($\sigma_{\text{çekir-kopma}} = \sigma_o = 160 \text{ MPa}$, $\sigma_{\text{basir-kopma}} = \sigma_{oc} = -400 \text{ MPa}$)

Hasar (akma veya kırılma) olup olmayacağını kontrolünü yapınız.



a-) Alüminyum sünek malzeme olduğu için akma kriterlerine göre kontrol yapılır.

1-) Tresca kriterine göre: $\tau_{\max} = 95.52 \text{ MPa}, \tau_{akma} = 100 \text{ MPa} \rightarrow \tau_{\max} < \tau_{akma}$ (akma olmaz)

2-) Von mises kriterine göre: $\sigma_{eş} = \sigma_{vm} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)]}$

$$\sigma_{eş} = \sigma_{vm} = \sqrt{\frac{1}{2}[(-40 - 0)^2 + (150 - 0)^2 + (150 - (-40))^2 + 6(0^2 + 0^2 + (-10)^2)]} = 174.36 \text{ MPa}$$

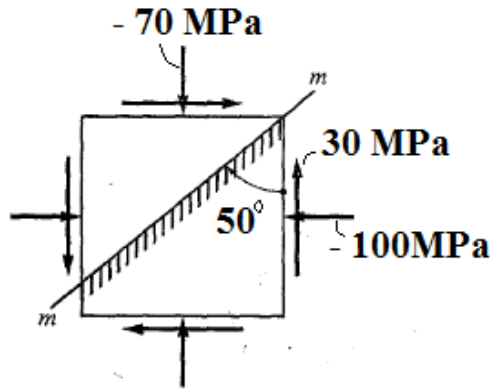
$$\sigma_{eş} = 174.36 \text{ MPa}, \sigma_{ak} = 200 \text{ MPa} \rightarrow \sigma_{eş} < \sigma_{ak} \text{ (akma olmaz)}$$

b-) Tahta gevrek malzeme olduğunda kırılma kriterlerine göre kontrol yapılır.

1-) Rankine kriterine göre:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} = 150.52 \text{ MPa}, \sigma_{\text{çeki-kopma}} = 160 \text{ MPa} \rightarrow \sigma_{\max} < \sigma_{\text{çeki-kopma}} \\ \sigma_{\min} = -40.52 \text{ MPa}, \sigma_{\text{bası-kopma}} = -400 \text{ MPa} \rightarrow |\sigma_{\min}| < \sigma_{\text{bası-kopma}} \end{array} \right\} \text{ (kırılma oluşmaz.)}$$

2-) Columb kriterine göre: $\frac{\sigma_1}{|\sigma_0|} - \frac{\sigma_3}{|\sigma_{0C}|} = \frac{150.52}{160} - \frac{-40.52}{400} = 1.042 > 1$ (kırılma oluşur)



Örnek (Soru) 7.2* (2017-Final) Düzlem gerilme durumu gösterilen nokta için, a-10) Mohr Çemberini çiziniz. b-5) Asal gerilmeleri ve doğrultularını belirleyiniz. c-10) Taralı m-m düzlemindeki gerilme bileşenlerini hesaplayınız. d-)Maksimum kayma gerilmesini tespit ediniz. e-10) Gevrek malzeme için bu noktada kırılma olup olmayacağını kontrol ediniz. (Çeki Mukavemeti: 200MPa, Bası Mukavemeti:400MPa, Kesme Mukavemeti:100MPa)

Cevaplar: **b-)** $\sigma_{\max} = -51.46 \text{ MPa}$, $\sigma_{\min} = -118.54 \text{ MPa}$, $\theta_p = 31.71^\circ$,

c-) $\sigma_{x'} = -111.93 \text{ MPa}$, $\tau_{x'y'} = 19.98 \text{ MPa}$, **d-)** $\tau_{\max} = 59.27 \text{ MPa}$, **e-)** Kırılma olmaz.

8- BİLEŞİK YÜKLEME DURUMLARI



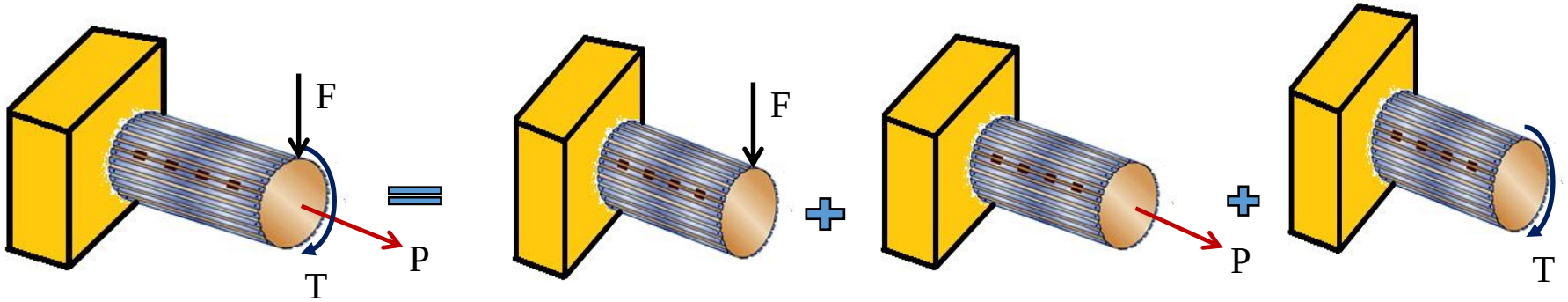
8.1 Bileşik Yükleme Nedir?

Bir elemana, burulma, eğilme, çekme, kesme gibi farklı yükleme tiplerinden iki veya daha fazlası aynı anda uygulanabilir. Bu yükleme tipine bileşik yükleme denir.

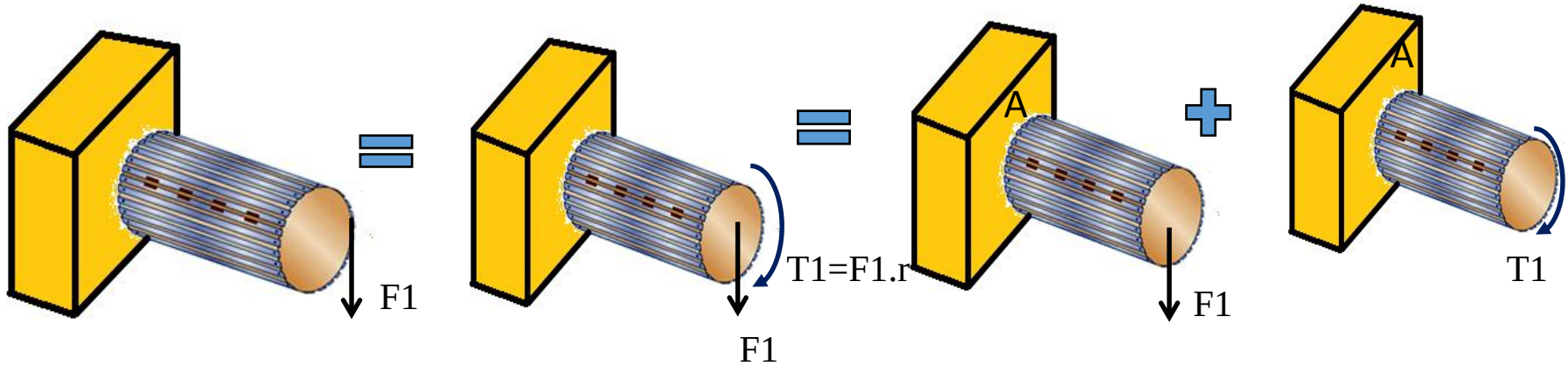
Gerilme veya Şekil Değiştirme hesapları için elastik sınırlar içinde kalmak şartıyla süperpozisyon yöntemi uygulanabilir.

Yani her bir yük ayrı ayrı uygulanarak gerilmeler elde edilir.

Sonuçta bileşik yükleme halinde (tüm yükler aynı anda varken) oluşan gerilmeler, yükler ayrı ayrı uygulandığındaki oluşan gerilmelerin toplamına eşittir.



Bazı durumlarda tek bir yük bileşik yükleme durumu oluşturabilir.

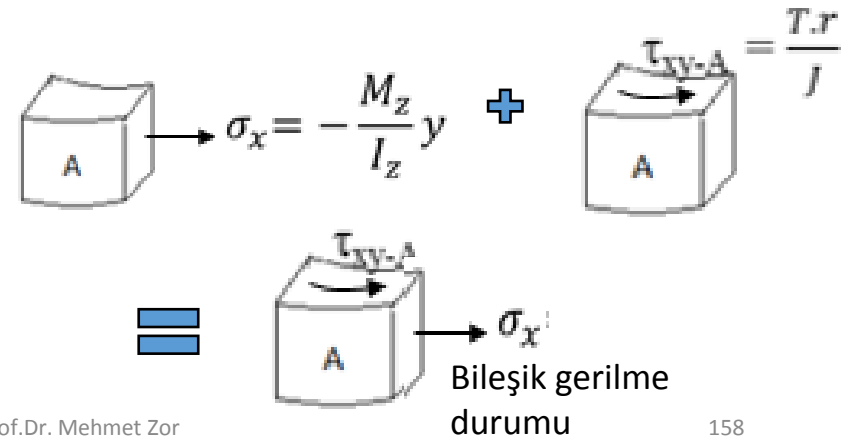


Tek Yük,
Bileşik Yükleme
(Eğilme+Burulma+Kesme)

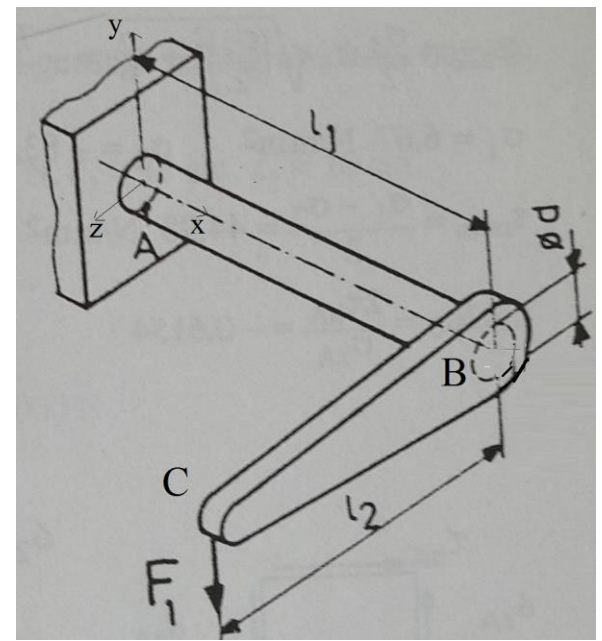
Kuvvet Merkeze
Taşınmış. Burulma
momenti ile birlikte

Tek Yük: Eğilme
+Kesme

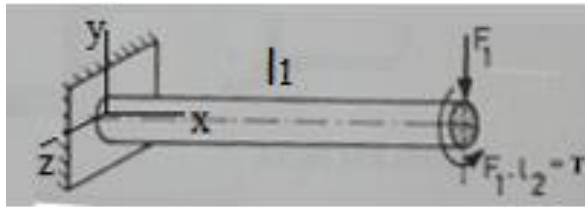
Tek moment:
Burulma



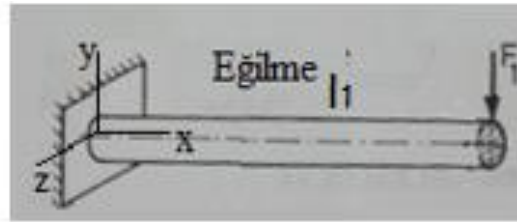
Örnek 8.1: A ucundan ankastre olan alaşımlı çelikten imal edilmiş AB miline, BC kolunun C noktasından düşey F_1 uygulanacaktır. Buna göre milde akma olup olmayacağını belirleyiniz. ($\sigma_{akma} = 400\text{MPa}$, $\tau_{akma} = 200\text{MPa}$
 $F_1 = 2.5\text{kN}$, $l_1 = 50\text{cm}$, $l_2 = 40\text{cm}$, $d = 6\text{cm}$)



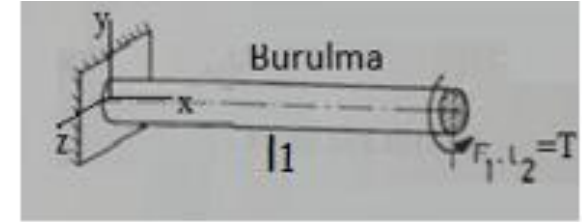
Çözüm: F_1 kuvvetini B noktasına mometi ile birlikte taşırsak:



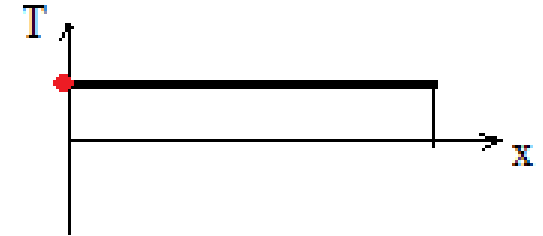
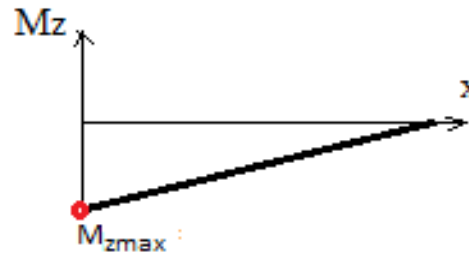
=



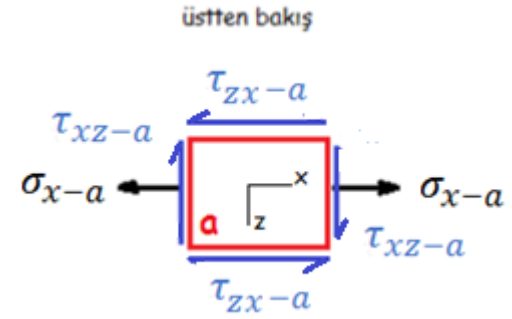
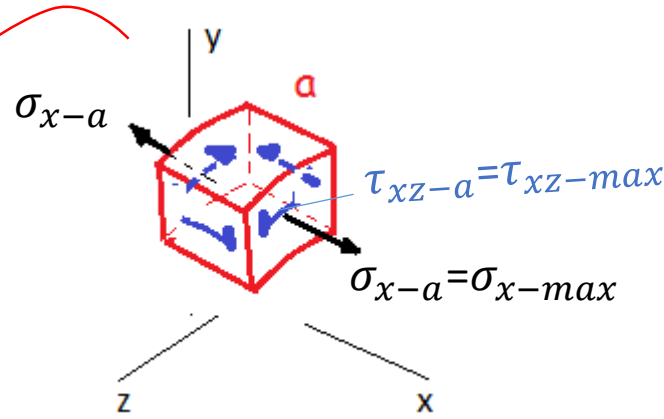
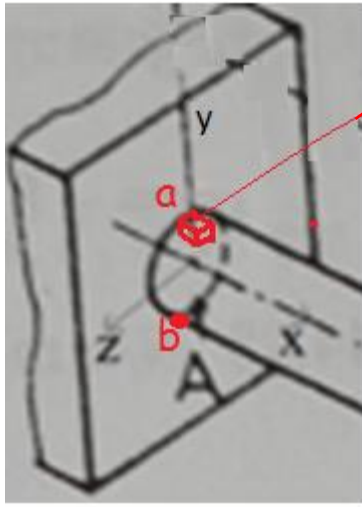
+



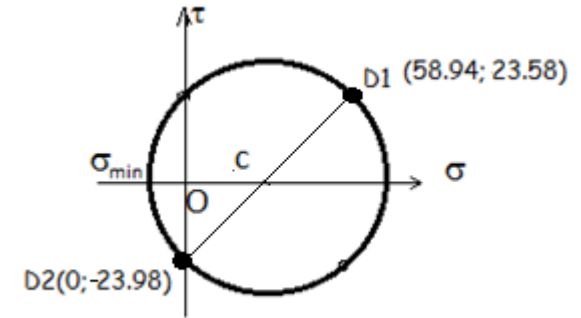
Moment diyagramlarını incelersek en tehlikeli kesitin ankastre kesit olacağını görürüz.



$$M_{zmax} = -F_1 \cdot l_1 = -2.5 \times 50 = -125 \text{ kNcm} = -125 \times 10^4 \text{ Nmm} \quad T = F_1 \cdot l_2 = 2.5 \times 40 = 100 \text{ kNcm} = 100 \times 10^4 \text{ Nmm}$$



Mohr çemberi



Daha önce mohr çemberini x-y düzleminde çizmiştik. Burada x-z düzleminde çiziyoruz. Dikkat edilirse değişen gerilme indislerinde y yerine z gelecek olmasıdır. (τ_{xy} yerine τ_{xz} ve σ_y yerine σ_z kullanılır.)

En kritik kesit olan ankastre kesitte en kritik noktalar ise normal ve kayma gerilmelerinin şiddetçe en yüksek değerde olduğu en üst ve en alt (a ve b) noktalarıdır. Kesit z eksenine göre simetrik olduğu için $\rho_a = \rho_b = d/2$ ve $y_a = -y_b = d/2$ dir ve dolayısıyla her iki noktada da gerilmeler şiddet olarak eşit çıkar. Sünek malzemelerde çeki ve basıdaki akma mukavemeti eşit olduğundan noktalardan birisini incelemek yeterli olur. Biz burada a noktasını inceleyeceğiz.

$$\tau_{xz-a} = \frac{T \cdot \rho_a}{J} = \frac{100 \cdot 10^4 \cdot \frac{d}{2}}{\frac{\pi \cdot d^4}{32}} = \frac{100 \cdot 10^4}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{100 \cdot 10^4}{\frac{\pi \cdot 60^3}{16}} = 23.58 \text{ MPa} = \tau_{xz-b}$$

$$\sigma_{x-a} = -\frac{M_z}{I_z} y_a = -\frac{-125 \cdot 10^4}{\frac{\pi \cdot d^4}{64}} \frac{d}{2} = -\frac{-125 \cdot 10^4}{\frac{\pi \cdot 60^3}{32}} = 58.94 \text{ MPa} = -\sigma_{x-b}$$

a noktasını incelemeye devam ediyoruz. Bu noktadaki mohr çemberinden;

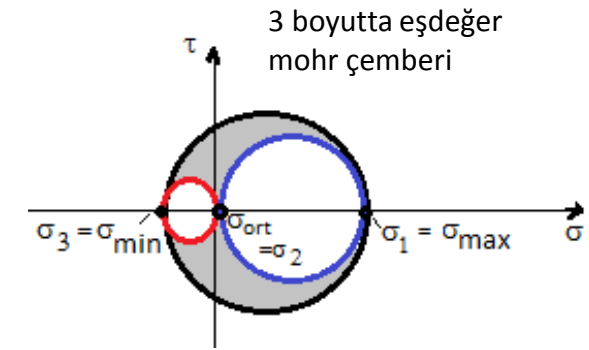
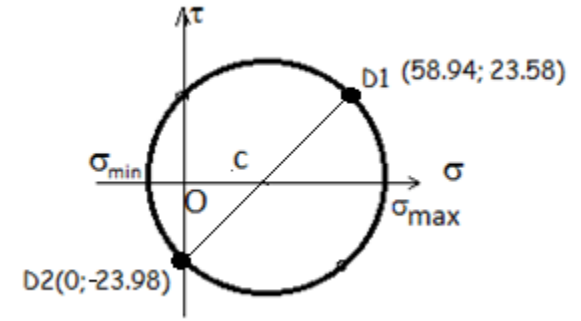
$$R = CD_1 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{58.94 - 0}{2}\right)^2 + 23.58^2} = 37.74$$

Maksimum kayma gerilmesi: $\tau_{\max} = R = 37.74 \text{ MPa}$

Asal gerilmeler

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm R = \frac{58.94 + 0}{2} \pm 37.74$$

$$\sigma_{\max} = 67.21 \text{ MPa} = \sigma_1 \quad \sigma_{\min} = -8.27 \text{ MPa} = \sigma_3$$



Alaşımlı çelik sünek bir malzemedir ve akma kriterlerine göre kontrol yapılmalıdır.

Tresca kriterine göre kontrol: $\tau_{\max} = 37.74 \text{ MPa}$, $\tau_{akma} = 200 \text{ MPa} \rightarrow \tau_{\max} < \tau_{akma}$ (akma olmaz)

Von mises kriterine göre kontrol: $\sigma_{eş} = \sigma_{vm} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)]}$

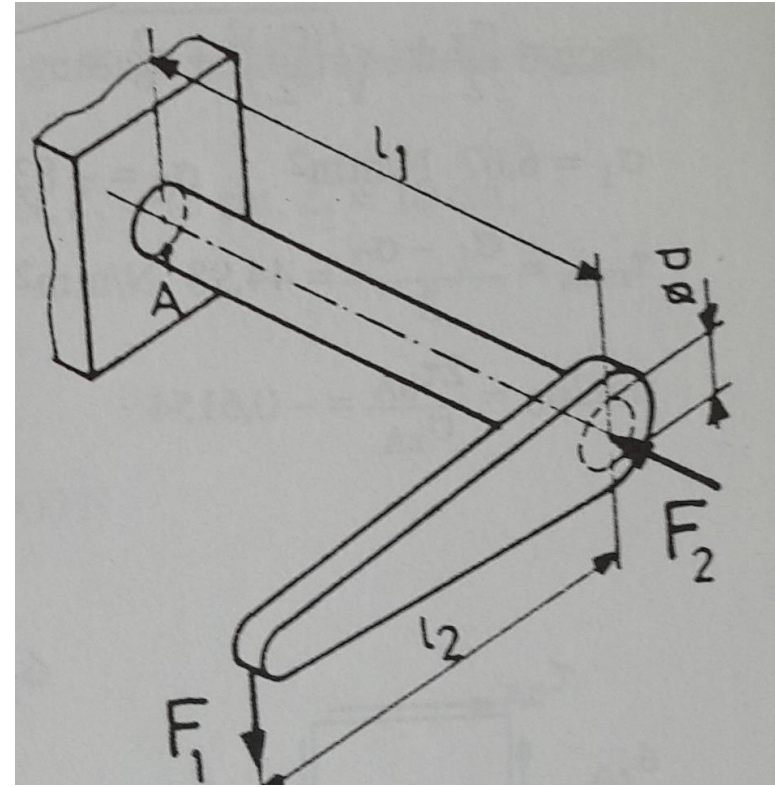
$$\sigma_{eş} = \sigma_{vm} = \sqrt{\frac{1}{2}[(0 - 0)^2 + (58.94 - 0)^2 + (58.94 - 0)^2 + 6(0^2 + 23.58^2 + 0^2)]} = 71.70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{eş} = 71.70 \text{ MPa}, \quad \sigma_{ak} = 400 \text{ MPa} \rightarrow \sigma_{eş} < \sigma_{ak} \text{ (akma olmaz)}$$

Örnek (Soru) 8.2 Bir önceki soruda ilaveten aksenal yönde bir $F_2=50\text{kN}$ luk bir bası kuvveti gelirse, AB kirişinde en kritik noktadaki normal ve kayma gerilmelerini belirleyiniz.

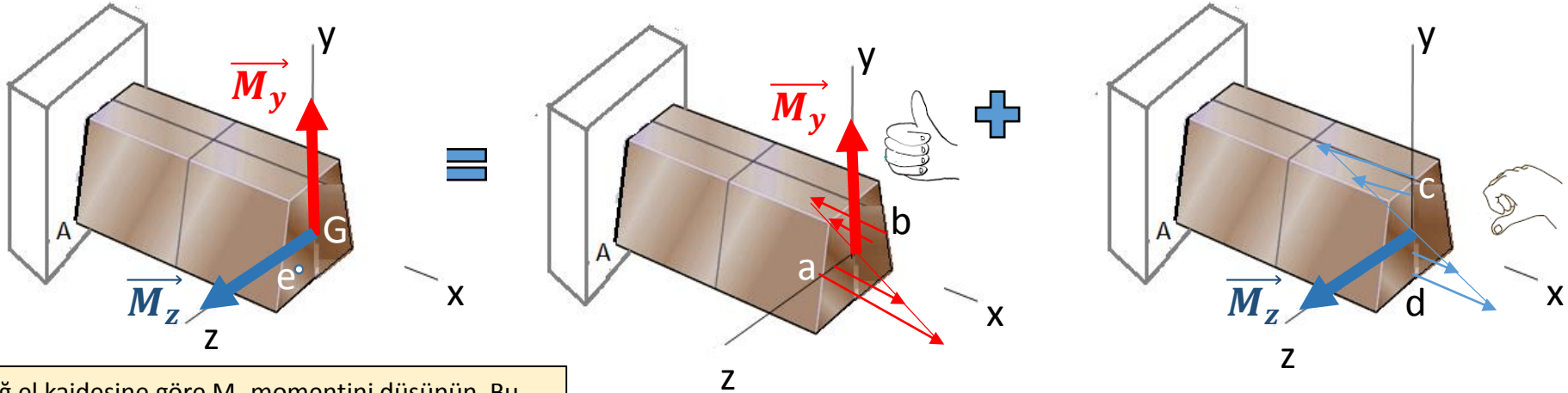
($F_1 = 2.5\text{kN}$, $l_1 = 50\text{cm}$, $l_2 = 40\text{cm}$, $d = 6\text{cm}$)

Cevap: $\sigma_{x-\min} = - 76.63\text{MPa}$, $\tau_{xz-\max} = 23.58\text{MPa}$



8.2 Simetrik kesitlerde Eğik Eğilme

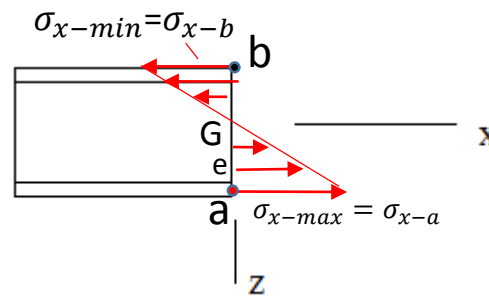
Simetrik kesitlerde kesitte aynı anda 2 eksende eğilme momenti varsa buna eğik eğilme denir (bkz. 4.3). Bu durumda eğik eğilme de bir bileşik yükleme olarak değerlendirilebilir. Süperpozisyon yöntemine göre gerilmeler hesaplanabilir.



Sağ el kaidesine göre M_y momentini düşünün. Bu moment +z tarafındaki lifleri uzatır, -z tarafındakileri kısaltır. Aynı kesitte gerilmeler z ye göre değişir. M_z momentine aynı mantıkla düşünürsek, +y tarafındaki lifler kısalıp - y tarafındakiler uzayacaktır. Aynı kesitte gerilmeler y ye göre değişir. Şunları fark etmeye çalışın:

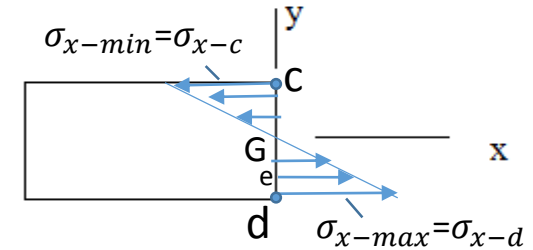
- a ve b noktalarında M_z den kaynaklanan gerilme sıfırdır.
- c ve d noktalarında M_y den kaynaklanan gerilme sıfırdır.
- Kesitin ortasında bir e noktasındaki gerilme hesabı:

$$\sigma_{x-e} = \frac{M_y}{I_y} z_e - \frac{M_z}{I_z} y_e \quad (D.8.1)$$



$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$$

Soru: Niçin bu denklemde - (eksi) işareti yoktur? Düşünün..



$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y$$

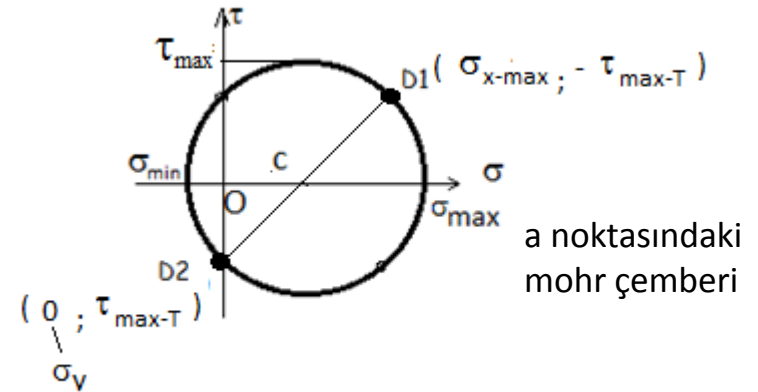
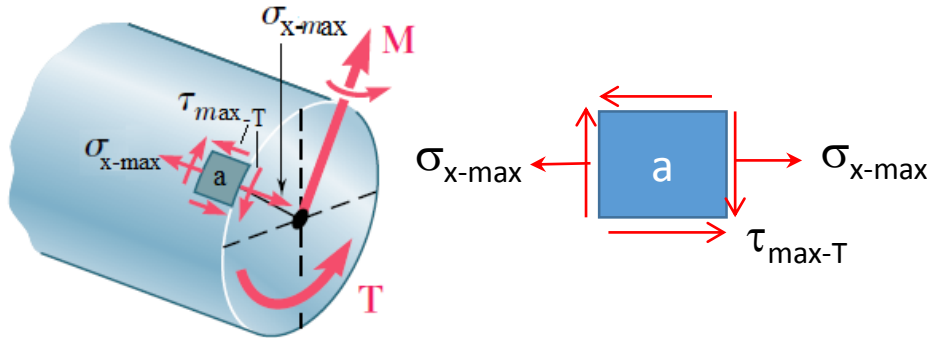
8.3 Dairesel Kesitlerde Eğik Eğilme + Burulma

Dairesel kesitli elemanların (ve özellikle güç ileten millerin) herhangi bir kesitinde aynı anda M_z , M_y eğilme momentleri ve T burulma momenti oluşabilir.

Dairesel kesitler de simetrik olduğu için Eğilmeden kaynaklanan normal gerilmeler aslında D.8.1 denkleminde elde edilebilir. Kayma gerilmesi ise $\tau = \frac{T}{J} \rho$ denkleminde bulunabilir ve kritik nokta için akma-kırılma kriterleri örnek 8.1 deki gibi uygulanabilir. Ancak bu işlemler burada daha basitleştirilecektir.

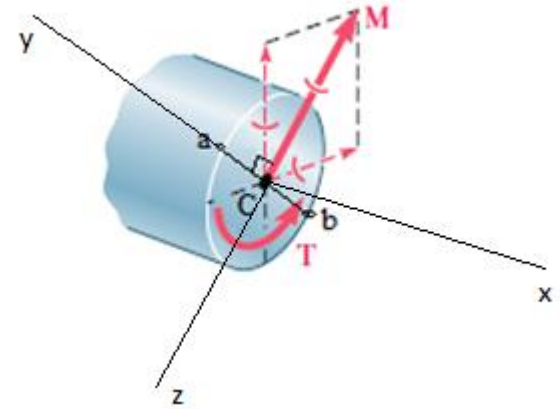
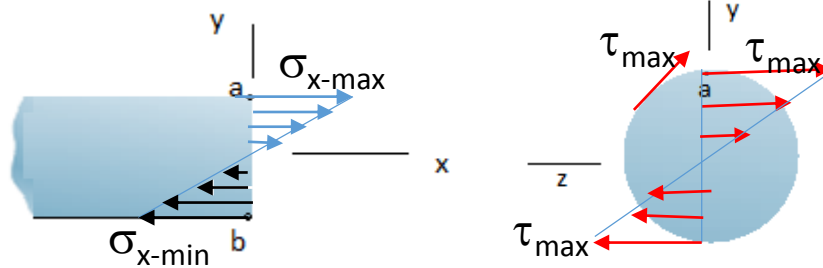
Kesit daireysel olduğu için eğilme momentlerinin bileşkesini alabiliriz. Ve sanki tek eğilme momenti varmış gibi düşünebiliriz. $M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$

Eğilme açısından en büyük gerilmeler a ve b noktalarında çıkacaktır. (Sağ el kaidesine göre baş parmağınız M yönünde ise M' e dik doğrultuda üstteki liflerin çekildiğini, alttaki liflerin basıldığını anlamaya çalışın). a ve b aynı zamanda çevre noktalar olduğu için burulma momentinden kaynaklanan kayma gerilmesi bu noktalarda (ve diğer çevre noktalarda da) maksimumdur ($\tau_{\max-T}$)



8.3 Dairesel Kesitlerde Eğik Eğilme + Burulma - (devam)

Artık eksen takımını şu şekilde düşünmemiz mümkün. (z eksenini -M yönünde, x eksenini kesit normaline paralel alırız. y ise bu iki eksene göre yerleştirilirse a noktasından geçecektir.)



a noktasındaki mohr çemberinden maksimum kayma gerilme hesabını yaparsak:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - 0}{2}\right)^2 + \tau_a^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{\max-T}^2}$$

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y_a = -\frac{M}{I_z} \cdot r$$

$$\tau_a = \tau_{\max-T} = \frac{T}{J} \rho_a = \frac{T}{J} \cdot r$$

$$J = \frac{\pi r^4}{4} \quad , \quad I_z = \frac{\pi r^4}{8} \quad \longrightarrow \quad I_z = \frac{J}{2}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(-\frac{M}{2 \cdot \frac{J}{2}} \cdot r\right)^2 + \left(\frac{T}{J} \cdot r\right)^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{J} \cdot r \quad (D.8.2)$$

Eğilme + Burulmaya maruz millerde bir kesitteki en büyük maksimum kayma gerilmesi

Bu denklem millerin akma kontrolünü Tresca kriterine göre yaparken pratiklik sağlar.

8.3 Dairesel Kesitlerde Eğik Eğilme + Burulma - (devam)

Von-Mises kriterine göre basitleştirme yapacak olursak;

$$\sigma_{eş} = \sigma_{vm} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)]}$$

$$\sigma_{eş} = \sqrt{\frac{1}{2}[(0-0)^2 + (\sigma_x - 0)^2 + (\sigma_x - 0)^2 + 6(0 + \tau_{xz}^2 + 0)]}$$

$$\sigma_{eş} = \sqrt{\frac{1}{2}[2\sigma_x^2 + 6\tau_{xz}^2]} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xz}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{M}{I}y\right)^2 + 3\left(\frac{T}{J}r\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{I}r\right)^2 + 3\left(\frac{T}{2I}r\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{M}{I}r\right)^2 + 3\left(\frac{T}{2I}r\right)^2} = \frac{r}{I} \sqrt{M^2 + \frac{3}{4}T^2}$$

$$\sigma_{eş} = \frac{\sqrt{M^2 + \frac{3}{4}T^2}}{I} r \quad (D.8.3)$$

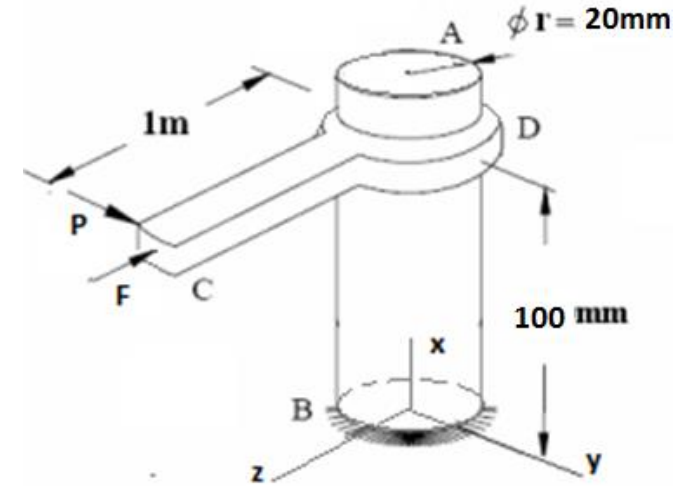
Eğilme + Burulmaya maruz millerde bir kesitte en kritik noktadaki eşdeğer gerilme

Bu denklem millerin akma kontrolünü Von-Mises kriterine göre yaparken pratiklik sağlar.

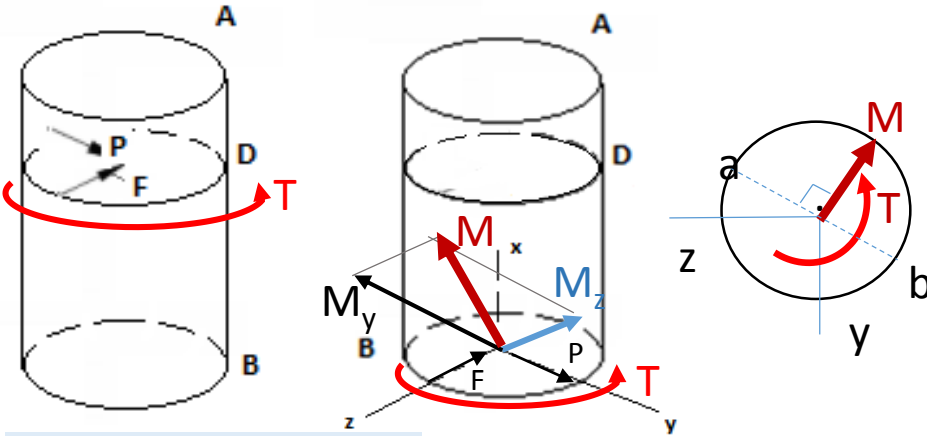
Püf noktaları

- Güç ileten millerde akma kriterlerini uygulamadan önce en kritik kesit belirlenmelidir.
- Daha sonra D.8.2 ile $\tau_{\max}$ veya D.8.3 ile $\sigma_{eş-\max}$ hesaplanıp emniyet gerilmesi ile karşılaştırılmalıdır.
- D.8.2 ve D.8.3 denklemlerinin uygulanabilmesi için kesitte çeki veya bası kuvveti olmamalıdır. Kritik noktaya etkisi olmadığı için kesme kuvvetinin olması önemli değildir.
- D.8.2 ve D.8.3 denklemleri tek eğilme momenti + burulma için de uygulanabilir.

Örnek 8.3: 44cm yarıçapındaki içi dolu alüminyum AB miline rijit DC anahtarı takılmıştır. DC elemanına C ucundan +y eksenı yönünde $P = 3\text{kN}$, -z yönünde $F = 4\text{kN}$ luk kuvvetler uygulanmıştır. Borunun emniyet kontrolünü tresca kriterine göre yapınız. $\tau_{em} = 80\text{MPa}$, $\sigma_{em} = 160\text{MPa}$



En kritik kesit ankastre kesittir. Bunu moment diyagramlarını çizerek görebilirsiniz. P ve F yüklerini önce D kesitine sonra B kesitine taşıyalım.



Ankastre kesitte F ve P kesme gerilmesi oluşturur. Ancak bu etki merkezde maksimum çevre noktalarda sıfırdır. Momentlerin etkisi ise merkezde sıfır çevre noktalarda maksimumdur ve daha büyüktür. Çevre noktalar daha kritik olduğu için F ve P nin kesme etkisi gözle alınmaz.

$$T = P \cdot 1 = 3 \cdot 1 = 3\text{kNm} = 300\text{kNmm}$$

$$M_z = -P \cdot 100 = 3 \cdot 100 = -300\text{kNmm}$$

$$M_y = -F \cdot 100 = 4 \cdot 100 = -400\text{kNmm}$$

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = 500\text{kNmm}$$

Tresca kriterine göre:

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{J} \cdot r = \frac{\sqrt{(500 \times 10^3)^2 + (300 \times 10^3)^2}}{\frac{\pi \cdot 20^4}{4}} \cdot 20$$

$$\rightarrow \tau_{\max} = 92.8\text{MPa} \rightarrow \tau_{\max} > \tau_{em} \text{ emniyetsiz.}$$

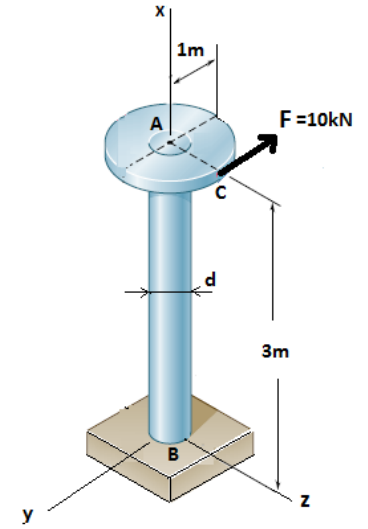
Soru: $\tau_{\max}$ hangi nokta için hesaplanmıştır? Cevabını aranızda tartışınız.

Von-Mises kriterine göre:

$$\sigma_{eş} = \frac{\sqrt{M^2 + \frac{3}{4}T^2}}{I} \cdot r = \frac{\sqrt{(500 \times 10^3)^2 + \frac{3}{4}(300 \times 10^3)^2}}{\frac{\pi \cdot 20^4}{8}} \cdot 20$$

$$\sigma_{eş} = 179.36\text{MPa} \rightarrow \sigma_{eş} > \sigma_{em} \text{ emniyetsiz.}$$

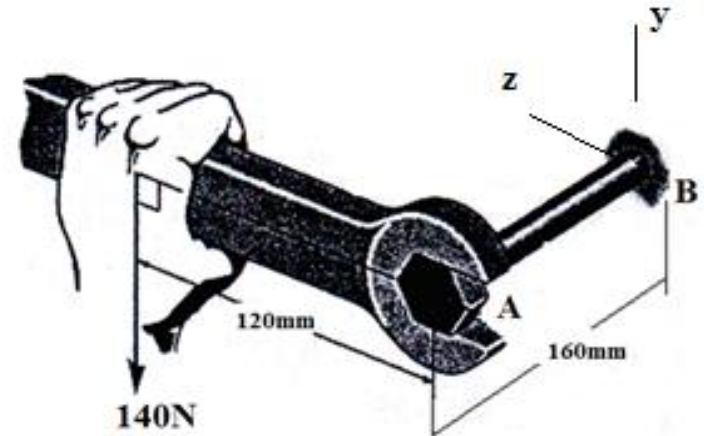
Örnek (Soru) 8.4 (2017-Final): d çapında, içi dolu, düşey AB mili A ucundan 1m yarıçaplı bir diske sıkı geçirilmiş, B ucundan ise zemine sabitlenmiştir. Diskin C noktasından $-y$ eksenine paralel $F = 10\text{kN}$ luk bir kuvvet uygulanacaktır. AB milinin bu kuvveti emniyet sınırları içinde taşıması isteniyor. Buna göre AB milinin emniyetli çap değerini tresca ve von-mises kriterlerine göre belirleyiniz. (Sıkı geçme sebebiyle mil, diskteki delik içinde serbestçe dönemez. Emniyet katsayısı $n=2$ Mil malzemesinin Çeki ve Basıdaki akma mukavemeti 300MPa , Kesme mukavemeti 150MPa)



Cevap: Tresca'ya göre: 129mm ; Von-mises'e göre: 128.47mm

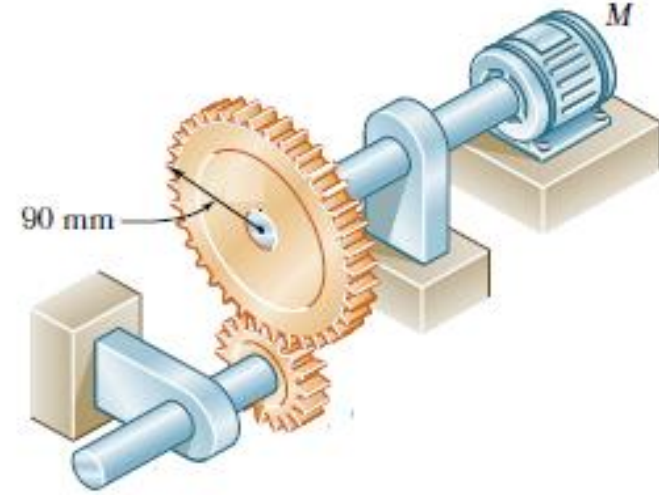
Örnek (Soru) 8.5* (2017-yaz-Final)

Bir ingiliz anahtarına uygulanan 140N luk bir el kuvvetiyle çelik AB civatası sıkılıyor. Buna göre, AB civatasının emniyetli çap değerini hesaplayınız. Civatanın üzerindeki dişleri ihmal ederek civatayı içi dolu dairesel kesitli kabul ediniz. $\tau_{em} = 100\text{MPa}$, Cevap: 13.45mm



8.4 Güç ileten Millerin Hesapları:

- Dairesel Kesitlerde Eğik Eğilme+Burulma yüklemesinin çok önemli bir uygulaması güç ileten millerin hesabıdır.
- Endüstriyel birçok makinada güç ileten dişli, kayış-kasnak gibi mekanizmalar kullanılır.
- Bu mekanizmalarda güç iletim elemanları dairesele kesitli çubuklara yani millere bağlıdır.
- Bu mekanizmaların ve millerin üretilmeden önce hesaplarının yapılması ve optimum boyutlarının elde edilmesi son derece önemlidir.
- Aksi taktirde üretim sırasında kırılma, kalıcı deformasyon gibi istenmeyen problemlerle karşılaşılması veya çok büyük boyutlarda emniyetli yapıldığında ekonomik olmaması söz konusu olacaktır.
- Bu mekanizmalar hareketli sistemlerdir. Ancak sabit hızla merkezi etrafında dönen veya ötelenen parçalara statik denge denklemleri uygulanabilir ve dolayısıyla mukavemet hesapları aynı şekilde yapılabilir(Bknz 3.5). Nitekim güç iletim mekanizmalarında parçaların bir çoğu bu şekilde hareket etmektedir.
- Bu miller genellikle sünek metalik malzemelerden imal edildiği için hesaplamalar akma kriterlerine göre yapılır.
- Şu ana kadar ki bilgilerimizle aslında gerilme hesaplamalarını yapabiliriz. Bundan sonra ise bu hesaplamalarda kullanılan formülleri, tresca ve von-mises kriterleri için biraz daha basitleştireceğiz ve çok daha hızlı sonuca gidebileceğiz.



8.4.1 Statik denge denklemleri hareketli sistemlerde de kullanılabilir mi?

Newton'un 2nci kanunu bize der ki: Bir cismin üzerine etkiyen net kuvvet ve moment sıfır ise o cisim hareketsiz ise hareketsizliğini korur; Sabit hızla hareket ediyorsa hareketine devam eder.

O halde statik denge denklemleri durağan haldeki cisimler veya sistemler dışında, mekanizmalardaki sabit hızla ötelenen veya sabit açısal hızla ağırlık merkezi etrafında dönen parçalara da uygulanabilir. Zira bu parçalar için de bileşke kuvvet ve bileşke moment sıfırdır.

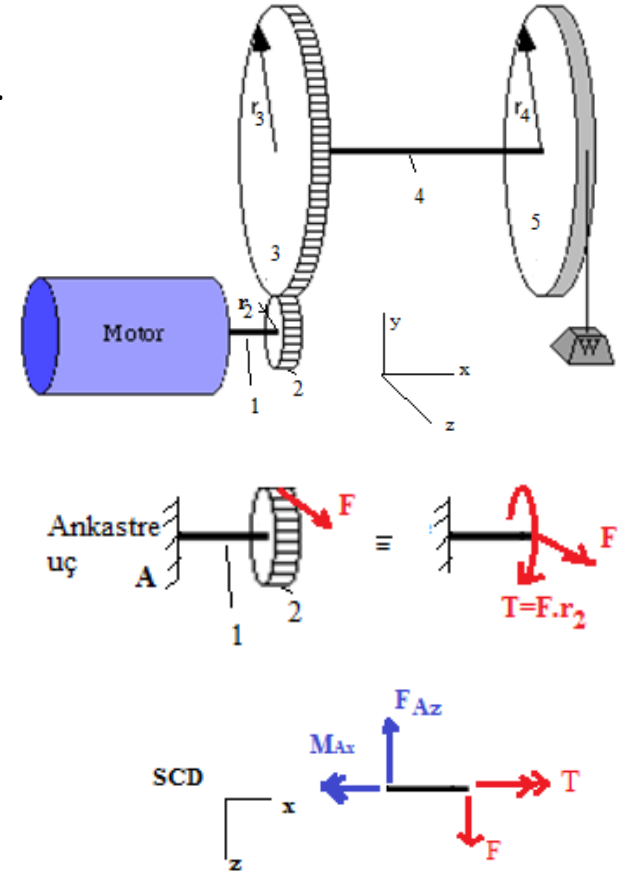
Uygulamalarda bir çok mekanizma parçası sabit hızla hareket eder. Bu durumda, bu parçalara gelen kuvvetler statik denge denklemleri ile aynı şekilde bulunabilir.

Örneğin, yandaki sistemde, gerek 1 nolu mil (motora bağlı tahrik mili), gerekse 4 nolu mil sabit hızla kendi eksenleri etrafında döner. Dolayısıyla bu miller için de statik denge denklemleri uygulanır. Aynı şekilde 2, 3 ve 5 nolu dişlilerde kendi ağırlık merkezleri etrafında sabit hızla dönecektir. Bunlar için de statik denge denklemleri geçerlidir.

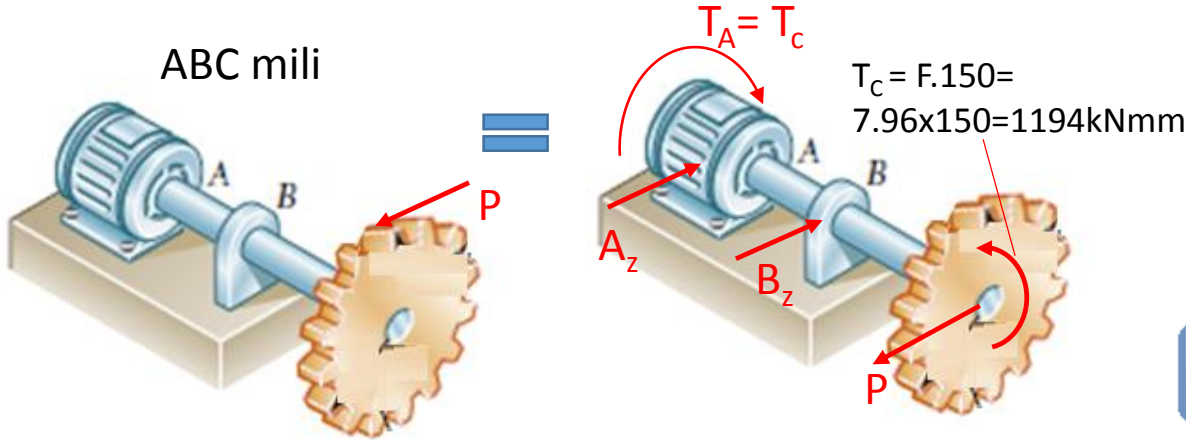
Soru: 1 nolu milin serbest cisim diyagramı nasıl çizilir?

Motora bağlı uç ankastre kabul edilir. 2 nolu dişliye gelen kuvvet mil eksenine taşınır. Böylece o an için statik denge sağlanmış olur. Sabit açısal hızla dönme hareket olduğu için hareketin herbir anında bu denge geçerlidir. Yandaki şekli dikkatlice inceleyiniz.

Dikkat: Ağırlık merkezi dışında bir nokta etrafında dönen cisimler için statik denge denklemleri uygulanamaz. Daha ayrıntılı bilgi için [tıklayınız](#).



Örnek 8.6: Motordan tahrik alan ABC miline bağlı C dişlisi ile üstündeki D dişlisinin temas noktalarından birbirlerine $P = 7.96\text{kN}$ luk kuvvet uyguladıkları tespit edilmiştir. Bu durumda dişlilerin bağlı olduğu millerin emniyetli çap değerlerini tresca kriterine göre hesaplayınız. $\tau_{em} = 50\text{MPa}$

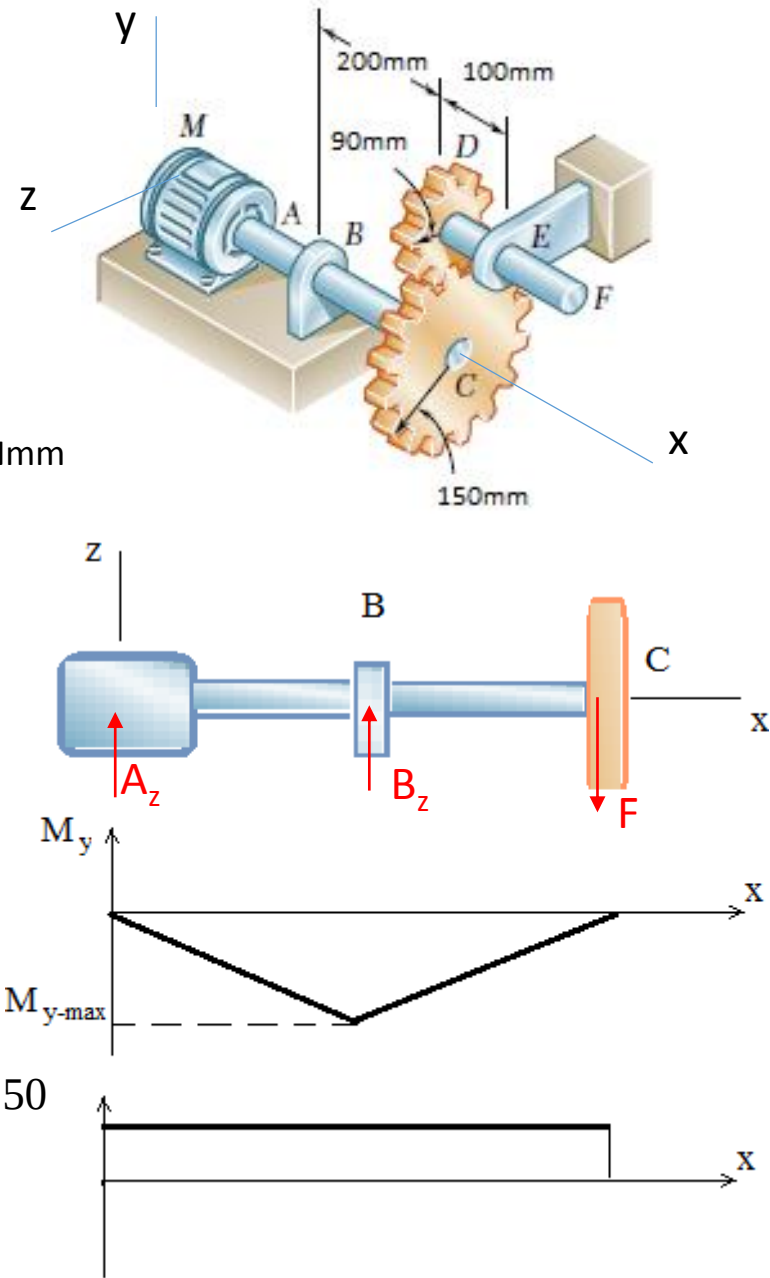


$$M_z = 0 \quad M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} \rightarrow M = M_y$$

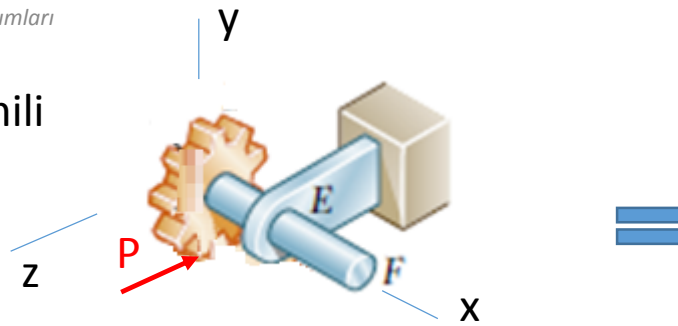
$$M_{y-\max} = P \cdot 200 = 7.96 \times 200 = 1592\text{kNmm}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{J} \cdot r = \frac{\sqrt{(1592 \times 10^3)^2 + (1194 \times 10^3)^2}}{\frac{\pi \cdot d^4}{32}} \cdot \frac{d}{2} = \tau_{em} = 50$$

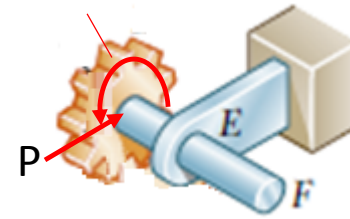
$$\rightarrow d_{em-ABC} = 58.8\text{mm}$$



DEF mili



$$T_E = 7.96 \times 90 = 716.4 \text{ kNm} = T$$



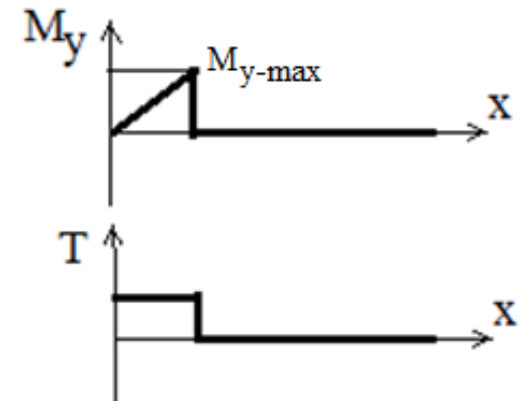
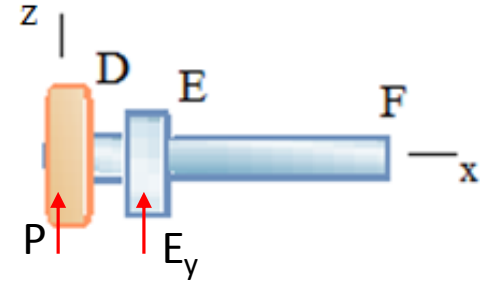
$$M_z = 0 \longrightarrow M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{M_y^2 + 0^2} = M_y$$

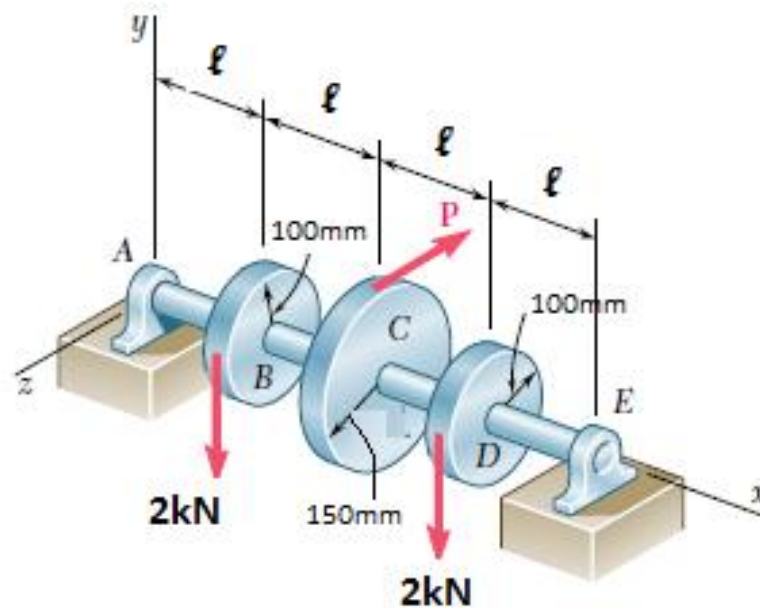
$$M_{y-\max} = P \cdot 100 = 7.96 \times 100 = 796 \text{ kNm}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{J} \cdot r$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{(796 \times 10^3)^2 + (716.4 \times 10^3)^2}}{\frac{\pi \cdot d^4}{32}} \cdot \frac{d}{2} = \tau_{em} = 50$$

$$\rightarrow d_{em-DEF} = 47.8 \text{ mm}$$





Örnek (Soru) 8.7 Şekildeki kayış kasnak mekanizmasında kasnakların bağlı olduğu ABCDE milinin emniyetli çap değerini Tresca kriterine göre hesaplayınız. $\tau_{em} = 80\text{MPa}$. $\ell = 180\text{mm}$ (A ve E yatakları x ekseninde hem dönmeye hem ötelenmeye izin vermektedir ve z, y eksenlerindeki moment tepkileri ihmal edilebilir. Statik dengeden önce P kuvvetini hesaplamanız gerekir.) Cevap: 38.8mm