Eğrilerle ilgili temel bilgiler:

2. Dönem
18.02.2026
1. Hafta

Eğri: I, $\mathbb{R}$ uzayında bir aralık olmak üzere,

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^n$ dönüşümü

I aralığının her noktasında parçalı sürekli ise, α'ya E^n uzayında bir eğri denir.

$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ------, \alpha_n(t))$

biçiminde yazılır.

Ayrıca $\alpha : [a,b] \to E^n$ dönüşümü için;

$\alpha(a) = \alpha(b)$ ise α eğrisine "kapalı eğri" denir.

Örneğin çember kapalı eğridir.

Birebir Eğri: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^n$ bir eğri olsun.

$\alpha(t_1) = \alpha(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$ koşulu sağlanıyorsa; α eğrisine "birebir eğri" denir.

Kendisi ile ortak noktası olmayan, yani kendisini kesmeyen eğri birebirdir.

 → Birebir olmayan eğri örneği

Hatırlatma: Eğrileri kartezyen denklemlede ifade etmek mümkündür.

$\alpha(t) = (3\cos t, 2\sin t)$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \to \text{elips denklemi}$$

denklemleri elipsin parametrik ve kartezyen denklemleridir.

Periyodik Eğri: Bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^n$ eğrisinde;

her $t \in I$ için, $\alpha(p+t) = \alpha(t)$

eşitliğini sağlayan bir p pozitif sayısı varsa α'ya periyodik eğri ve en küçük p değerine "periyot" denir.

Örneğin α kapalı eğri ise;

$\alpha : \mathbb{R} \to E^n$ biçiminde periyodik bir parametrik gösterime sahiptir.

$\alpha(p+t) = \alpha(t)$ olacak şekilde p pozitif tam sayısı olmalıdır.

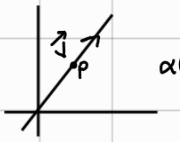
$\alpha(t) = (3\cos t, 2\sin t)$ elipsi, periyodu 2π olan bir eğridir.

$\alpha(2\pi + t) = \alpha(t)$

19.02.2026
1.Hafta

Eğrilerin Parametrelendirilmesine Örnekler

E^1 uzayında $\alpha(t) = p + t\vec{v}$ eğrisi verilsin. Bu p noktasından geçen $\vec{v}$ vektörüne paralel olan doğrunun parametrik gösterimidir.



$\alpha(t) = p + t\vec{v}$

Örneğin E^3 uzayında

$\alpha(t) = (2-2t, 3t, 4t+1)$

eğrisinin paralel olduğu doğruyu bulalım.

$x = 2-2t$
$y = 3t$
$z = 4t+1$

$\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4} \rightarrow$ kartezyen

$\vec{u} = (-2, 3, 4) \rightarrow$ doğrultmanına paralel olan vektör bunun katları

* Düzlemde merkezi $M = (c_1, c_2)$ olan ve r yarıçaplı

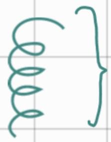
$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = r^2$ çemberi

$\gamma(t) = (c_1 + r\cos t, c_2 + r\sin t)$

parametrik denklemiyle verilir.

* Helis Eğrisi

$\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t, bt)$



Helis

* Merkezi $M = (c_1, c_2)$ olan elipsin kartezyen denklemi

$$\frac{(x-c_1)^2}{a^2} + \frac{(y-c_2)^2}{b^2} = 1$$

$\gamma(t) = (c_1 + a\cos t, c_2 + b\sin t)$

* Düzlemde merkezi $M = (c_1, c_2)$ olan yatay hiperbolün denklemi

$\frac{(x-c_1)^2}{a^2} - \frac{(y-c_2)^2}{b^2} = 1 \rightarrow$ kartezyen denklem

$\gamma(t) = (c_1 + a\cos t, c_2 + b\sin t)$

* Parabol eğrisi $y = ax^2 + bx + c$ formundaki eğrilerdir. Örneğin E^2 uzayında $y = x^2$ parabolü bir eğridir. $y = x^2$ eğrinin kartezyen denklemidir.

$\gamma(t) = (t, t^2)$

Eğrinin Hız Vektörü

eğrinin 1. türevi hız

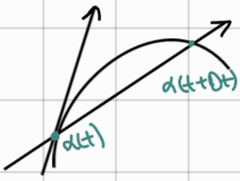
eğrinin 2. türevi ivme

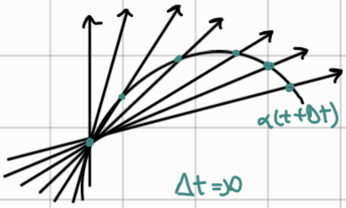
$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^n$

$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))$

$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \ldots, \alpha_n'(t))$

vektörüne α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir. Bu vektör α eğrisine $\alpha(t)$ noktasında teğet olan vektördür.





Türev tanımından

$$\lim \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} = \alpha'(t)$$

Δt'yi limit durumunda 0'a götürürsek; α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki teğet vektörü elde ederiz.

Birim Hızlı Eğri:

Bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^n$ eğrisinin her $t \in I$ noktasındaki hız vektörü olan $\alpha'(t)$ vektörü birim vektör ise, yani $\|\alpha'(t)\| = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri denir.

Örnek: $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ birim hızlı bir eğridir.

$\alpha(t) = (\cos \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2}, 2.at)$

eğrisinin birim hızlı olması için $a = ?$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\sin t\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{t}{2}\right)^2 + 0^2 + a^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\left(\sin^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2}\right) + a^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + a^2}$$

$\sqrt{\frac{1}{4} + a^2} = 1$ olmalı

$\frac{1}{4} + a^2 = 1$

$a^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \mp \frac{\sqrt{3}}{2}$

Örnek: $\alpha : (0, 2\pi) \to E^3$

$\alpha(t) = (\cos 2t, 1 - \cos 2t - \sin 2t, -\sin 2t)$

eğrisinin $t = \frac{\pi}{4}$ noktasındaki hız vektörünü bulunuz.

$\alpha'(t) = (-2\sin 2t, 2\sin 2t - 2\cos 2t, -2\cos \frac{\pi}{2})$

$\alpha'(t) = (-2\sin\frac{\pi}{2}, 2\sin\frac{\pi}{2} - 2\cos\frac{\pi}{2}, -2\cos\frac{\pi}{2})$

$\alpha'(\frac{\pi}{4}) = (-2, 2, 0)$

Skaler Hız Fonksiyonu ve Skaler Hız

E^n'de bir eğri (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$\|\alpha'\| : I \to \mathbb{R}$

$t \to \|\alpha'(t)\|$ olarak tanımlı fonksiyon bu eğrinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki skaler hızıdır.

Not: $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))$ olmak üzere,

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d\alpha_i}{dt}\right)^2}$$

$$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \ldots, \alpha_n'(t))$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\alpha_1'(t)^2 + \alpha_2'(t)^2, \ldots + \alpha_n'(t)}$$

Örnek: $\alpha'(t) = (1, 2t)$ olmak üzere, $t = (0, 1, 2)$ için skaler hızları bulunuz.

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1^2 + (2t)^2} = \sqrt{1 + 4t^2}$$

$$\|\alpha'(0)\| = 1$$

$$\|\alpha'(1)\| = \sqrt{5}$$

$$\|\alpha'(2)\| = \sqrt{17}$$

ÖDEV: E^2 uzayında birim çember dışında birim hızlı bir eğri bulunuz.

✗ **Örnek:** E^3'de $\alpha(t) = (\sin t, \sin 2t, t - \cos t)$

eğrisi boyunca hareket eden bir parçacığın, $\alpha(\pi)$ anındaki $\underline{\text{hızını}}$ hesaplayınız

↳ sayı
hız vektörü derse $\Rightarrow (-1, -2, 1)$

$$\alpha'(t) = (\cos t, 2\cos 2t, 1 + \sin t)$$

$$\alpha'(\pi) = (-1, -2, 1)$$

$$\|\alpha'(\pi)\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2) + 1^2} = \sqrt{6}$$

25.02.26

2. Hafta

Örnek: $\gamma(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}t\right)$

a) eğrisi birim hızlı mıdır?

b) Hız vektörünü bulunuz ve $\frac{\pi}{2}$'deki skaler hızı?

$$\gamma'(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

a) $\|\gamma'(t)\| \overset{?}{=} 1 = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\sin^2 t+\frac{1}{2}\cos^2 t+\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1 \text{ birim hızlıdır.}$$

b) $\gamma'(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \, . \, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \, . \, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\|\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right)\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+0^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$ //

Örnek: $\gamma(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}t^2, \frac{1}{\sqrt{3}}t^3 \, . \, \frac{1}{3}\right)$ eğrisinin $t=2$ noktasındaki skaler hızını bulunuz.

$\gamma'(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}t, \frac{3}{\sqrt{3}}t^2, 0\right)$

$\gamma'(2) = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{12}{\sqrt{3}}, 0\right)$

$\|\gamma'(2)\| = \sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{3}+\frac{144}{3}} = \sqrt{\frac{160}{3}}$

Bir Eğri Boyunca Yöne Göre Türev → 1 soru kesin

Bir f dif-bilir fonksiyonunun bir $\vec{v_p}$ tanjant vektörü yönündeki türevini:

$$\vec{v_p}[f] = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+t\vec{v}) - f(0)}{t}$$

şeklinde tanımlamıştık. Bu tanımda $\alpha(t) = p+t\vec{v}$ diyelim. Bu bir doğru denklemidir.

ve $\alpha'(0) = \vec{v_p}$ ve $\alpha'(0) = \vec{v_p}$ ve $\alpha(0) = p$ eşitlikleri vardır.

Yöne göre türev tanımına göre;

$f: E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun E^n uzayında $\vec{v_p}$ yönündeki türevini almak için. f fonksiyonu E^n uzayındaki $\alpha(t) = p+t\vec{v_p}$ eğrisine (ki bu bir doğru denklemi) kısıtlanır ve t'ye göre türev alınır. Türevin $t=0$ 'daki değeri $\vec{v_p}$ yönündeki türevini verir.

Bir fonksiyonun bir $\vec{v_p}$ vektörü yönündeki türevi demek, bu fonksiyonun türevi $\vec{v_p}$ olan dif-bilir parametrik bir eğriye kısıtlanarak elde edilen bir tek t değişkenine bağlı fonksiyonun $t=0$ noktasındaki türevinin alınması demektir.

Bu durumda ortaya şu sorular çıkabilir:

1- f fonksiyonu neden $\alpha(t) = p + t\vec{v}$ doğrusuna kısıtlanıyor. Başka bir eğriye kısıtlanamaz mıydı?

2- f fonksiyonu $\alpha(t) = p + t\vec{v}$ doğrusuna kısıtlanıp türev alındıktan sonra $\vec{v}_p[f]$ değerini bulmak için neden bu türevin $t=0$ noktasındaki değeri hesaplanmaktadır? $t=1$ diyebilir miydik?

3- Vektör alanlarının bir teğet vektör yönündeki türevi içinde benzer mantık kurulabilir mi?

Eğri ve Yöne Göre Türev

Teorem: $f: E^n \to \mathbb{R}$ dif-bilir fonksiyon α, E^n uzayında bir eğri olmak üzere,

$\alpha'(0)[f] = (f\circ\alpha)'(0)$ biçiminde tanımlanır.

Örnek: $\vec{v}_p = (2,1,1)$, $p = (3,1,1)$ ve $f(x,y,z) = xyz^2$ olarak veriliyor.

a) $\vec{v}_p[f]$

b) $\alpha'(0) = \vec{v}_p$ ve $\alpha(0) = p$ olacak şekilde iki farklı α_1, α_2 eğrisi bulunuz. Her iki eğri içinde

$\vec{v}_p[f] = (f\circ\alpha)'(0) = (f\circ\alpha_2)'(0)$

olduğunu gösterelim.

c) $\gamma'(1) = \vec{v}_p$ ve $\gamma(1) = p$ olacak şekilde bir α eğrisi bulunuz.

Çözüm:

a) $v_p[f] = \langle v_p, (1,3,6)\rangle = \langle (2,1,1)(1,3,6)\rangle$

$= 2+3+6 = 11$

$(f\circ\alpha_2)'$

$\alpha_2(t) = (t^2+2t+3,\ 1+\sin t,\ t+\cos t)$

b) $(f\circ\alpha_1)'(0) = 11$?

$(f\circ\alpha_2)'(0) = 11$?

$\alpha_1(t) = p + t\vec{v}$ olsun.

$\alpha_1(t) = (3,1,1) + t(2,1,1)$

$= (3+2t, 1+t, 1+t)$

$\alpha_1'(0) = (2,1,1)$

türev al

$(f\circ\alpha_1) = f(\alpha_1) = (3+2t)(1+t)(1+t)^2 = (3+2t)(1+t)^3$

$(f\circ\alpha_1)'(0) = 11$ //

c) (t^2+2, t, t)

(t^2+2, t, t)

$(t^2+2)\,t^4$

$t^6 + 2t^4$

$6t^5 + 8t^3$

Sonuç: $\vec{V}_p = (2,1,1)$ ve $p=(3,1,1)$ olacak şekilde

$\alpha(t) = (2t+3,\ t+1,\ t+1)$

$\beta(t) = (t^2+2t+3,\ 1+\sin t,\ 1+\cos t)$

$\gamma(t) = (t^2+2,\ t,\ t)$

eğrileri için

$p = \alpha(0) = \beta(0) = \gamma(1)$

$\vec{V}_p = \alpha'(0) = \beta'(0) = \gamma'(1)$

$\vec{V}_p[f] = (f\circ\alpha)'(0) = (f\circ\beta)'(0) = (f\circ\alpha)'(1)$

26.02.26
2. Hafta

Sonuç: Bir $f: E^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonun p noktasındaki türevini bir α eğrisi boyunca bulmak demek, α eğrisinin p noktasındaki teğeti boyunca yöne göre türevin hesaplanması demektir.

Buna göre eğri boyunca yöne göre türev tanımını şu şekilde verebiliriz. E^n uzayında verilen dif-bilir bir $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \to E^n$ eğrisiyle, dif-bilir $f: E^n \to \mathbb{R}$ fonk. için

$\alpha'[f] = D_{\alpha'}[f] = \alpha'(t)[f]$

$= (f\circ\alpha)'(t)$

biçiminde tanımlanan türeve f fonksiyonunun α eğrisi boyunca yönlü türevi veya kovaryant türevi denir.

Örnek: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x+y^2$ fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyonun $p=(2,4)$ noktasındaki türevini $y=x^2$ eğrisi boyunca hesaplayınız.

Çözüm: $y=x^2$ olduğundan eğriyi parametrik olarak:

$\alpha(t) = (t, t^2)$

$\vec{V} = \alpha'(t) = (1, 2t)$ ve $p=(2,4)$, $t=2$'dir.

$\vec{V}_p[f] = \frac{d}{dt} f(p+t\vec{v})\Big|_{t=0}$

$p+t\vec{v} = (2,4)+t + 2(1+2t)$

$= (2+t,\ 4+4t)$

$f(p+t\vec{v}) = (2+t) + (4+4t)^2$

$= 2+t+16+32t+16t^2$

$\frac{d}{dt}(p+t\vec{v}) = 0+1+0+32+32t$

$= 1+32+32t$

$\frac{d}{dt}(p+t\vec{v})\Big|_{t=0} = 1+32$

$= 33$

$(f\circ\alpha)(t) = f(\alpha(t))$

$= f(t, t^2)$

$= t + (t^2)^2 = t + t^4$

$(f\circ\alpha)'(t) = 1+4t^3$

$(f\circ\alpha)'(2) = 1+4\cdot 2^3$

$= 1+32$

$= 33$ olur.

ÖDEV: E^3 uzayında $f(x,y,z)=xyz$ fonksiyonunun türevini $\alpha(t)=(\sin t, \cos t, t)$ eğrisi boyunca hesaplayınız. Bu fonksiyonun $p=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ noktasındaki türevini $\alpha(t)$ eğrisi boyunca hesaplayınız.

Not: Bir fonksiyonu bir tanjant vektör yönündeki türevini de benzer şekilde yorumlayabiliriz. $p \in E^n$ olmak üzere Bir W vektör alanının $\vec{V}_p$ tanjant vektörü yönündeki türevini bulabilmek için W vektör alanı $\alpha'(0)=\vec{V}_p$ ve $\alpha(0)=p$ olacak şekilde bir $\alpha(t)$ eğrisine kısıtlanır. $\mathbb{R}^n$ uzayında bu şekildeki en kolay eğri $\alpha(t)=p+t\vec{v}$'dir. Sonra da t'ye göre türevi alınıp $t=0$'daki değerini bulunuz. Bu değer W vektör alanının bir $\vec{V}_p$ tanjant vektör yönündeki türevidir. Ve $D_{\vec{V}_p}W=\vec{V}_p[W]$ ile gösterilir.

Yani $D_{\vec{V}_p}W$ türevi $p=\alpha(0)$ olmak üzere, hız vektörü $\vec{V}_p$ olacak şekilde bir dif-bilir α eğrisi boyunca W vektör alanının anlık değişim oranını ifade eder.

Eğri Boyunca Vektör Alanının Türevi (Kovaryant Türev)

E^n uzayında dif-bilir bir $W \in \mathcal{X}(E^n)$ vektör alanı ile dif-bilir bir $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to E^n$ eğrisi için;
$\alpha'(t)[W] = D_{\alpha'(t)}W = (W\circ\alpha)'(t) = W(\alpha'(t))$ türevine W vektör alanının α eğrisi boyunca kovaryant türevi denir.

Kısaca bir vektör alanının bir eğri boyunca kovaryant türevi demek, vektör alanının bir eğriye kısıtlanarak eğrinin parametresine göre t türevinin alınması demektir.

Buna göre

$\alpha(t)=(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))$ eğrisinin

$T=\alpha'(t)=\left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \ldots, \frac{d\alpha_n}{dt}\right)$ hız (teğet) vektör alanı ile

$W=(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathcal{X}(E^n)$ vektör alanı için;

W vektör alanının α eğrisi boyunca kovaryant türevi

$$D_T W = D_{\alpha'(t)}W = (W\circ\alpha)'(t)$$

$$(W\circ\alpha)'(t) = (T[w_1], T[w_2], \ldots, T[w_n])$$

eşitliğiyle verilir.

Not: $\langle T, \overset{\text{Grad}}{\nabla w_1(\alpha(t))} \rangle, \langle T, \overset{\text{Grad}}{\nabla(\alpha(t))} \rangle, \ldots, \langle T, \overset{\text{Grad}}{\nabla(\alpha(t))} \rangle$

Örnek: $W = xy\frac{\partial}{\partial x} + zy^2\frac{\partial}{\partial y} + xz\frac{\partial}{\partial z} \in \mathcal{X}(E^3)$ vektör alanının kovaryant türevini $\alpha(t)=(\cos t, \sin t, 2t)$ eğrisi boyunca hesaplayınız.

$W=(xy, zy^2, xz)$ ve $\alpha(t)=(\underbrace{\cos t}_{x}, \underbrace{\sin t}_{y}, \underbrace{2t}_{z})$

$T = \alpha'(t) = (-\sin t,\ \cos t,\ 2)$

$W_1(\alpha(t)) = xy \Rightarrow (y, x, 0)$

$w_2(\alpha(t)) = zy^2 \Rightarrow (0, 2yz, y^2)$

$w_3(\alpha(t)) = xz \Rightarrow (z, 0, x)$

$T[W_1] = \langle T, \overset{\text{Grad}}{\nabla}(\alpha(t)) \rangle$

$= \langle (-\sin t, \cos t, 2)(y, x, 0) \rangle \big|_{\alpha(t)}$

$= \langle (-\sin t, \cos t, 2)(\sin t, \cos t, 0) \rangle$

$= -\sin^2 t + \cos^2 t = \boxed{\cos^2 t}$

$T[W_2] = \langle T, \overset{\text{Grad}}{\nabla} w_2(\alpha(t)) \rangle \big|_{\alpha(t)}$

$= \langle (-\sin t, \cos t, 2)(0, 2zy, y^2) \rangle \big|_{\alpha(t)}$

$= 0 + 2(2t)(\sin t)(\cos t) + 2(\sin^2 t)$

$= \boxed{4t \sin t \cos t + 2\sin^2 t}$

$T[W_3] = \langle T, \overset{\text{Grad}}{\nabla} w_3(\alpha(t)) \rangle \big|_{\alpha(t)}$

$= \langle (-\sin t, \cos t, 2)(z, 0, x) \rangle \big|_{\alpha(t)}$

$= -z \cdot \sin t + 0 + 2x \big|_{\alpha(t)}$

$= -(2t)\sin t + 2\cos t)$

$= \boxed{-2t \sin t + 2\cos t}$

04.03.26
3.Hafta

Teorem: E^n uzayında dif-bilir bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^n$ eğrisi verilsin.

$T_\alpha(t) = \alpha'(t)$ olmak üzere,

a) $D_{T_\alpha}(t) = \alpha'(t)$

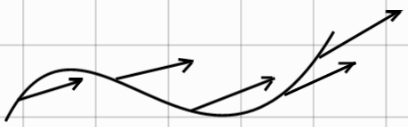
b) $D_T T = \alpha''(t)$

Paralel Vektör Alanı: E^n uzayında dif-bilir bir $\alpha : I \to E^n$ eğrisi verilsin. α eğrisinin hız vektör alanı T olmak üzere; W vektör alanının α eğrisi boyunca kovaryant türevi 0 ise, yani $D_T W = 0$ ise, W vektör alanına α eğrisi boyunca paralel vektör alanı denir.

E^n uzayında bir W vektör alanının bir α eğrisi boyunca paralel olması demek;

W vektör alanının α boyunca değişmemesi demektir.

Geometrik olarak W vektör alanının α boyunca paralel görülmesidir. → özellikleri bil tanımı bil



Örnek: $V = (x-z)\frac{\partial}{\partial x} + (2y - x + 1)\frac{\partial}{\partial y} + (z - 2y)\frac{\partial}{\partial z}$

$W = 2z\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial z}$

vektör alanlarının $\alpha(t) = (2t-1, t-2, 2t-3)$ eğrisi boyunca paralel olup olmadığını inceleyiniz.

a) $D_T V \overset{?}{=} 0 \qquad V = (x-z, 2y-x+1, z-2y)$

$\overset{\alpha'(t)}{T}[V] = (V \circ \alpha)'(t)$

$(V \circ \alpha)(t) = V(\alpha(t))$

$= 2t-1-2t+3,\ 2t-4-2t+1+1,\ 2t-3-2t+4)$

$= (2, -2, +1)$

$D_T V = (V \circ \alpha)'(t) = (0, 0, 0)$

b) $D_T W \overset{?}{=} 0 \qquad W = (2z, -y, 2x)$

$T[W] = (W \circ \alpha)'(t)$

$(W \circ \alpha)(t) = W(\alpha(t))$

$= (4t-6, -t+2, 4t-2)$

$(W \circ \alpha)'(t) = (4, -1, 4) \neq (0, 0, 0)$

$D_T W \neq 0$ → paralel değil

Örnek: $w=(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}+(z-2x+2)\frac{\partial}{\partial y}+(4y^2+z^2)\frac{\partial}{\partial z}$ vektör alanının

$\alpha(t)=(\cos t, \sin t, 2\cos t)$ eğrisi boyunca paralel olup olmadığını gösteriniz.

$D_T w \overset{?}{=} 0 \qquad w=(x^2+y^2,\ z-2x+2,\ 4y^2+z^2)$

$T[w]=(w\circ\alpha)'(t)$

$w\circ\alpha = w(\alpha(t)) = (\underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{1},\ \underbrace{2\cos t-2\cos t}_{0},\ \underbrace{4\sin^2 t+4\cos^2 t}_{4})$

$= (1, 0, 4)$

$(w\circ\alpha)'(t)=(0,0,0)$

$\Rightarrow D_T w = 0$'dır.

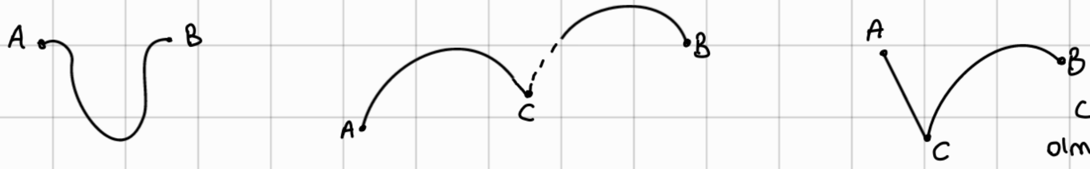
Geodezik Eğri: E^n uzayında dif-bilir bir $\alpha: I \to E^n$ eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere, T vektör alanının α eğrisi boyunca kovaryant türevi sıfır ise yani $D_T T=0$ ise α eğrisine geodezik eğri denir.

Geodezik eğriler düzlemde doğrular, küre üzerinde ise büyük çemberdir.

İntegral Eğrisi: W, E^n uzayında bir vektör alanı ve $p\in E^n$ olmak üzere; her $t\in I$ için $\alpha(t_0)=p$, $\alpha'(t)=W(\alpha(t))$ koşullarını sağlayan $\alpha: I\to E^n$ eğrisine W vektör alanının "integral doğrusu" denir.

Reguler Eğri: I, $\mathbb{R}$ uzayının bir açık aralığı olmak üzere;

$\alpha: I\to E^n$ eğrisinde eğer her $t\in I$ için, $\alpha'(t)\neq 0$ bu eğriye reguler eğri denir.



C noktasının türevi olmadığından reguler değil.

Burada verilen regulerlik tanımı, daha önce tanımladığımız reguler dönüşüm ile örtüşür.

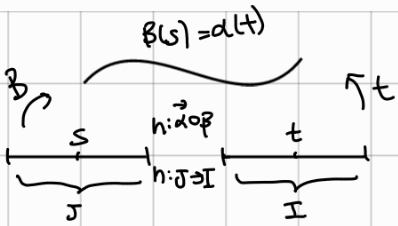
Reguler dönüşümün tanımı göz önüne alınırsa;

$J(\alpha(t))=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$ matrisinin rankının tanım uzayının boyutuna yani 1'e eşit olması gerekir.

Bu da $\alpha(t)$'nin sıfırdan farklı olmasıyla eşdeğerdir.

Yay parametresi: E^n'de bir M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. M'nin her noktasındaki hız vektörü birim ise yani $\|\alpha'(t)\|=1$ ise $\forall t\in I$ için M'ye birim hızlı eğri denir. Bu durumda $t\in I$ parametresine de yay parametresi denir.

Parametre Değişimi: E^n'de bir M eğrisinin (I,α), (J,β) gibi iki koordinat komşuluğu verilsin. $h: \vec{\alpha}^{-1}\circ\beta : J\to I$ dif-bilir fonksiyonuna M'nin bir parametre değişimi daha doğrusu, bu eğrinin I'daki parametresinin J'deki parametre ile değişimi denir.



Örnek: $I : \{t : 0 < t < 4\}$

$J : \{s : 0 < s < 2\}$

$\alpha : I \longrightarrow E^4$

$t \longrightarrow \alpha(t) = (\sqrt{t}, t\sqrt{t}, 1, -t)$ ve

$\beta : J \longrightarrow E^4$

$s \longrightarrow \beta(s) = (s, s^3, 1, -s^2)$

β, α'nın bir yeniden parametrelendirilmesi mi?

Buradaki parametre değişim fonksiyonu $h(s) = s^2$ olarak alalım.

$h : J \longrightarrow I$

$s \longrightarrow h(s) = s^2 = t$

$\beta(s) = \alpha \circ h(s)$

$= \alpha(h(s))$

$= \alpha(s^2)$

$= (\sqrt{s^2}, s^2\sqrt{s^2}, 1, -s^2)$

$= (s, s^3, 1, -s^2)$

Örnek: $\alpha : (0,2) \longrightarrow E^3$

$t \longrightarrow \alpha(t) = (\sqrt{4-t^2}, 4-t^2, 1)$

eğrisini yeniden parametrelendiriniz.

$4 - t^2 = s^2$ olsun.

$t^2 = 4 - s^2$

$t = \sqrt{4-s^2}$

$t \in (0,2)$, $J \in (0,2)$

$\beta(s) = \alpha \circ h(s)$

$= \alpha(h(s))$

$= (s, s^2, 1)$

ÖDEV: Bu soruyu farklı iki parametre ile yaz. (sin)

05.03.26
3.Hafta

$\alpha(t) = (\sqrt{4+t^2}, 4-t^2, 1)$

$\alpha_1(s) = (s, s^2, 1)$

2. parametre seçimi:

$h(s) = t = 2\sin s$ alalım.

$$\left.\begin{array}{l} t=0 \text{ için } s=0 \\ t=2 \text{ için } s=\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} J(0, \tfrac{\pi}{2}) \text{ olacaktır.}$$

$$\alpha o h(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(2\sin s)$$

$$= (\sqrt{4-4\sin^2 s}, 4-4\sin^2 s, 1)$$

$$= (\sqrt{4\underbrace{(1-\sin^2 s)}_{\cos^2 s}}, 4\underbrace{(1-\sin^2 s)}_{\cos^2 s}, 1)$$

$$= (2\cos^2 s, 4\cos^2 s, 1)$$

$\alpha_2(s) = (2\cos s, 4\cos^2 s, 1)$

Bu örnekte;

$\alpha : (0,2) \to E^3 \qquad \alpha(t) = (\sqrt{4-t^2}, 4-t^2, 1)$

$\alpha_1 : (0,2) \to E^3 \qquad \alpha_1(s) = (s, s^2, 1)$

$\alpha_2 : (0, \frac{\pi}{2}) \to E^3 \qquad \alpha_2(s) = (2\cos s, 4\cos^2 s, 1)$

eğrilerin tamamı aynı eğrinin farklı gösterimleridir.

Örnek: $\alpha : (4,9) \to E^3$

$\alpha(t) = (t\sqrt{t}, t-2t^2, 3\sqrt{t})$ verilsin.

$h : J \to I$

$s \to h(s)$

parametre değişimi ile yeniden parametrelendirelim.

$\beta(s) = \alpha o h(s) = \alpha(h(s))$

$\beta(s) = (s^2\sqrt{s^2}, s^2 - 2\cdot(s^2)^2, 3\sqrt{s^2})$

$\beta(s) = (s^3, s^2 - 2s^4, 3s)$

Yay Uzunluğu: E^n'de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu verilsin. $a, b \in I$ olmak üzere; M eğrisinin a'dan b'ye yay uzunluğu, eğrinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki eğri boyunca uzaklığa karşılık tutulan

$$yay(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt, \quad t \in \mathbb{R}$$

reel sayısına eşittir.

Not: Düzlemde dik koordinat sisteminde verilen (E^2 uzayında bir eğrinin yay uzunluğu)

$y=f(x)$ eğrisinin $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ noktaları arasındaki eğri yayının uzunluğu

$$yay(f(x)) = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

Kutupsal Koordinat Sistemine Yay uzunluğu

Düzlemde kutupsal koordinat sisteminde verilen $r=r(\theta_1)$, $r=r(\theta_2)$ noktaları arasındaki eğri uzunluğu

$$yay(r(\theta)) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta$$

ile bulunur.

* Parametrik olarak verilen eğriler için yay uzunluğu; düzlemde $\alpha(t)=(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$

parametrizasyonu ile verilen α eğrisinin $\alpha(t_1)$, $\alpha(t_2)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu,

$$yay(\alpha(t)) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\alpha_1'(t))^2+(\alpha_2'(t))^2}\,dt$$

şeklindedir.

Örnek: $\alpha(t) = \sqrt{\left(\frac{t^2}{2}, \ln t, t\sqrt{2}\right)}$ eğrisinin $\alpha(1)$ ve $\alpha(2)$ noktaları arasındaki yay uzunluğunu hesaplayınız.

$$\alpha'(t) = \left(t, \frac{1}{t}, \sqrt{2}\right)$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(t)^2+\left(\frac{1}{t}\right)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{1+\frac{1}{t^2}+2}$$

$$= \left|t+\frac{1}{t}\right|$$

$$yay(\alpha(t)) = \int_1^2 \left(t+\frac{1}{t}\right)dt$$

$$= \frac{t^2}{2}\Big|_1^2 + \ln\Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right) + (\ln 2 - \ln 1)$$

$$= \frac{3}{2} + \ln 2$$

Örnek: $\alpha : (0,5) \longrightarrow E^3$

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$$

a) α eğrisinin $\alpha(1)$ ve $\alpha(3)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu bulunuz.

b) Yay uzunluğu fonksiyonu yeniden parametrelendiriniz.

(**Not!** Yay uzunluğu fonksiyonu $\int_0^t \|\alpha'(t)\|\,dt$)

a) $yay(\alpha(t)) = \int_1^3 \|\alpha'(t)\|\,dt$

$$\alpha'(t) = (-\sin s, \cos s, 2)$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sin^2 s + \cos^2 s + 4}$$

$$= \sqrt{5}$$

$$Yay(\alpha(t)) = \int_1^3 \sqrt{5}\,dt = \sqrt{5}\,t\Big|_1^3 = 3\sqrt{5}-\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

b) $\int_0^t \sqrt{5}\,dt = \sqrt{5}\,dt \rightarrow$ Yay uzunluğu fonksiyonu

$$\sqrt{5}\,t = s \qquad t = \frac{s}{\sqrt{5}} \qquad \beta(s) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{5}}, \sin\frac{s}{\sqrt{5}}, \frac{2s}{\sqrt{5}}\right)$$

Örnek: $\alpha(0,\frac{\pi}{2}) \longrightarrow E^2$

$\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$

eğrinin yay uzunluğunu bulunuz.

$\alpha_1(t) = \cos^3 t$

$\alpha_2(t) = \sin^3 t$

$$yay(\alpha(t)) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\alpha_1'(t)^2 + \alpha_2'(t)^2}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\sin^2 t \cos^2 t \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1}}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t}\, dt = \int_0^{\pi/2} 3\sin t\cos t\, dt$$

$\sin t = u$
$\cos t\, dt = du$

$$= \int_0^{\pi/2} 3u\, du = 3\int_0^{1} u\, du$$

$$= 3\frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = 3\cdot\frac{1}{2} - 0 = 3/2$$

Örnek: $\alpha : (-1,1) \longrightarrow E^2$

$\alpha(t) = (t^2, \frac{t^3}{3})$ cevap $= \frac{1}{4}$

eğrisinin yay uzunluğunu bulunuz.

$$yay(\alpha(t)) = \sqrt{\alpha_1'(t)^2 + \alpha_2'(t)}$$

$\alpha_1'(t) = 2t$

$\alpha_2'(t) = t^2$

$$yay(\alpha(t)) = \int_{-1}^{1} \sqrt{\underbrace{4t^2 + t^4}_{t^2(4+t^2)}}$$

$$= \int_{-1}^{1} |t| \sqrt{4+t^2}\, dt$$

$\left[\begin{array}{l} u = 4+t^2 \\ du = 2t \\ t = \frac{du}{2} \end{array}\right]$ yap

Sınav buraya kadar

4.Hafta
4.03.26

Çatı Alanları

Tanım(~~Noktasal çarpım~~): E^3'de $P=(p_1,p_2,p_3)$ ve $Q=(q_1,q_2,q_3)$ noktası verilsin. P ile Q'nun noktasal çarpımı $P\cdot Q = p_1\cdot q_1 + p_2\cdot q_2 + p_3\cdot q_3$ sayısına denir.

Noktasal çarpım E^3'de bir iç çarpım

i) $\forall P,Q \in E^3$ ve $a,b \in \mathbb{R}$ için;

$(aP + bQ)R = aPR + bQR$

$P\cdot(aQ + bR) = aPQ + bPR$ (2 lineerlik)

ii) $\forall P,Q \in E^3$ için $P\cdot Q = Q\cdot P$ (simetri özelliği)

iii) $\forall P \in E^3$ için $P\cdot P \geq 0$;
$P\cdot P = 0 \iff P = 0$
} pozitif tanımlılık

Tanım: Norm: $P=(p_1,p_2,p_3)\in E^3$ noktası için

$$\|P\| = (P\cdot P)^{1/2} = \sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^3}$$

reel sayısına P noktasının **normu** denir.

Sonuç: $\forall a,b\in\mathbb{R}$ için ve $\forall P,Q\in E^3$ için

i) $\|P+Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$ (Üçgen eşitsizliği)

ii) $\|aP\| = \|a\|\cdot\|P\|$ 'dır.

Tanım: Uzaklık: E^3'de P ve Q noktaları arasındaki uzaklık;

$d(P,Q) = \|P-Q\|$ ile tanımlanır.

Sonuç: Eğer $P=(p_1,p_2,p_3)$ ve $Q=(q_1,q_2,q_3)$ iseler,

$$P-Q = (p_1-q_1,\ p_2-q_2,\ p_3-q_3)$$

$$d(P,Q) = \sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2+(p_3-q_3)^2}$$

P ile Q arasındaki uzaklık E^3'de dikdörtgenler prizmasının köşegenidir.

Tanım: Bir Noktanın ε komşuluğu: $P\in E^3$ noktası $\varepsilon>0$ sayısı verilsin. $d(P,Q)<\varepsilon$ olacak şekilde $Q\in E^3$ noktalarının kümesine P'nin "ε komşuluğu" denir. O halde P noktasının ε komşuluğu E^3'de P merkezli ε yarıçaplı kürenin iç noktasıdır.

Tanım: Açık Küme: $U\subset E^3$ alt kümesi verilsin. $\forall P\in U$ için P'nin $V_\varepsilon\subset U$ olacak şekilde en az bir V_ε komşuluğu varsa U'ya E^3'de bir açık küme dur.

Tanım: E^3'de P noktasındaki iki tanjant vektör $\vec{v}_P$ ve $\vec{w}_P$ olsun. Bunların noktasal çarpımı;

$\vec{v}_P\cdot\vec{w}_P = v\cdot w$ sayısıdır. Yani iki tanjant vektörünün noktasal çarpımı yalnızca vektör kısımlarının noktasal çarpımıdır.

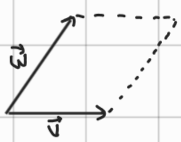
Örneğin $\left.\begin{array}{l}\vec{v}_P=(2,0,5)_P\\ w_P=(1,1,-2)_P\end{array}\right\}$ $\vec{v}_P\cdot\vec{w}_P = (2\cdot1+0\cdot1+5\cdot(-2))_P = -8$

Sonuç: Bir $\vec{v}_P$ tanjant vektörünün normu (uzunluğu) $\|\vec{v}_P\| = v$ sayısıdır.

Sonuç: $\vec{v}_P$ ve $\vec{w}_P$ $P\in E^3$ noktasındaki iki tanjant vektör ise;

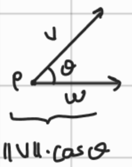
i) $\|v\cdot w\| \leq \|v\|\cdot\|w\|$

ii) $v\cdot w = \|v\|\,\|w\|\cdot\cos\theta$



$$\cos\theta = \frac{v\cdot w}{\|v\|\,\|w\|}$$

θ, v ve w vektörlerinin arasındaki açıdır.



$$\cos\theta = \frac{v\cdot w}{\|v\|\,\|w\|}, \quad 0<\theta<\pi$$

Tanım: Noktasal çarpımları "0" olan vektörlere ortogonel "dik" vektörler denir.

Tanım: Uzunlukları 1 br olan vektörlere birim vektörler denir.

Tanım: E^3'de p noktasında karşılıklı olarak birbirine ortogonal olan $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ birim vektörlerinin kümesine $p \in E^3$'de bir çatı denir.

FRENET VEKTÖR ALANLARI VE FRENET FORMULLERİ

1. türevinin

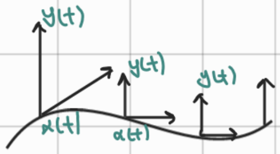
Tanım: $\beta : I \longrightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri olsun. O halde her $s \in I$ için $\|\beta'(s)\| = 1$'dir.

- $T(s) = \beta'(s)$ vektör alanına β eğrisi boyunca "birim teğet vektör alanı" denir.

$\|T(s)\| = \|\beta'(s)\| = 1$

Tanım: Birim teğet vektör alanının türevi, $T'(s) = \beta''(s)$ vektör alanına eğri boyunca eğrilik vektör alanı denir.

Not: Eğri boyunca vektör alanı bir $\alpha : I \longrightarrow E^3$, $t \longrightarrow \alpha(t)$ eğrisi verilsin. $\forall t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasına bir tanjant vektörü karşılık getiren bir Y fonksiyonuna α eğrisi boyunca bir vektör alanı denir.



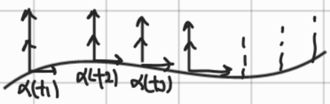
Örneğin α eğrisinin hız vektörü bu tanıma uygun bir vektör alanıdır. $\forall t \in I$ noktasında $\alpha'(t)$ hız tanjant vektörüne karşılık gelir.

Tanım: Bir α eğrisinin α' hız vektörünün türevine bu eğrinin ivme vektörü denir.

$\alpha' \longrightarrow$ hız vektörü

$\alpha'' \longrightarrow$ ivme

Tanım: Bir α eğrisi üzerindeki Y vektör alanlarının tüm değerleri (tanjant vektörleri) paralel ise; Y vektör alanına "Paralel vektör alanı" denir.



* Bir α eğrisi boyunca paralel vektör alanı Y ise; Bu durumda

$\forall t \in I$ için $Y(t) = (c_1, c_2, c_3)_{\alpha(t)}$ sabit olduğundan

$Y'(t) = 0$

Teorem: Bir α eğrisinin sabit olması için gerek ve yeter şart α' hız vektörünün sıfır olmasıdır.

$(\alpha'(t) = 0)$

- Sabit olmayan bir eğrinin bir doğru olması için $\Leftrightarrow$ ivmesinin 0 olmasıdır. $(\alpha''(t) = 0)$
- Bir eğri üzerindeki Y vektör alanının paralel olması için $\Leftrightarrow$ $Y' = 0$ olmasıdır.

12.03.26

4. Hafta

Tanım: $\forall s \in I$ için $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ ile tanımlı κ reel değerli fonksiyonuna β eğrisi boyunca "eğrilik fonksiyonu" denir. $s \in I$ için $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ sayısına eğrinin eğriliği denir.

κ ne kadar büyük olursa, eğrinin dönmesi (bükülmesi) o kadar keskindir.

Sonuç: $\|T(s)\| = 1$ olduğunu biliyoruz.

Hatırlatma: (p_1, p_2) $(p_1 \cdot p_2) = p_1 \cdot p_1 + p_2 \cdot p_2 = p_1^2 + p_2^2$

$T \cdot T = 1$ (iç çarpımları)

Her iki tarafın türevini alırsak

$T' \cdot T + T \cdot T' = 0$

$\Rightarrow 2 \cdot T \cdot T' = 0$

$\Rightarrow T \cdot T' = 0$

$T \cdot T' = 0$ olması $T \perp T$ demektir. Yani eğrilik vektör alanı eğriye diktir.

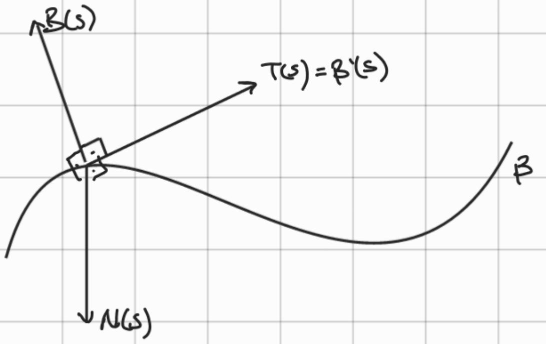
Not: $\kappa = \|T'\|$ olduğundan $\kappa > 0$ 'dır.

* Bundan sonraki çalışmalarımızda eğrinin eğriliğini $\kappa > 0$ kabul edeceğiz.

Tanım: $N(s) = \dfrac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \dfrac{T'(s)}{\kappa(s)}$

ile tanımlı birim vektör alanına β boyunca "asal normal vektör alanı" denir. Normuna böldüğümüz için sonuç olarak birim vektör elde ederiz.

$N(s)$ vektörü β eğrisinin hangi yönde döndüğünü gösterir.



$T(s) = \beta'(s)$

$N(s) = \dfrac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$

$B(s) = T(s) \times N(s)$

$\Big\}$ T, N, B çatısı

$B(s) = T(s) \times N(s)$

vektör alanına β eğrisinin binormal vektör alanı denir.

Teorem: β, E^3'de $\kappa>0$ eğrilikli birim hızlı bir eğri olsun. Bu taktirde $\{T,N,B\}$ kümesi β eğrisi boyunca (üzerinde) bir çatı alanıdır.

Alan çatı şartı bu

$\|T(s)\|=1$
$\|N(s)\|=1$
$\|B(s)\|=1$
$T\cdot N=0$
$T\cdot B=0$
$N\cdot B=0$

İspat: β birim hızlı bir eğri olduğundan $\|\beta'(s)\|=1=\|T(s)\|=1$'dir.

- $\kappa(s)=\|T'(s)\|>0$ tanım gereğince

$=\|\beta''(s)\|>0$ tanım gereğince

$\|T(s)\|=1$

$\|T(s)\|^2=1$

$T(s)\cdot T(s)=1$

Her iki tarafın türevini alırsak;

$T'(s)\cdot T(s)+T(s)\cdot T'(s)=0$

$2\cdot T(s)\,T'(s)=0 \quad \longrightarrow \quad T(s)\cdot N(s)=0$

$T(s)\cdot T'(s)=0$ yani $T(s)\perp N(s)$'dir.

$T(s)\cdot N(s)\cdot \underbrace{\|T'(s)\|}_{1}=0$

$B(s)=T(s)\times N(s)$

$T(s)=\beta'(s)$

$N(s)=\dfrac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$

$N(s)=\dfrac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$

$=\dfrac{T'(s)}{\kappa(s)}$

$\Rightarrow \|N(s)\|=\dfrac{\|T'(s)\|}{\|\kappa(s)\|}=\dfrac{\kappa(s)}{\kappa(s)}=1$'dir.

$\kappa(s)>0 \in \mathbb{R}$

- $B(s)=T(s)\times N(s)$

Yani $B(s)$, hem $T(s)$'ye hem de $N(s)$'ye dik bir vektör alandır.

$B(s)\perp T(s)$ $\qquad$ $B(s)\perp N(s)$

$B(s)\cdot T(s)=0$ $\qquad$ $B(s)\cdot N(s)=0$ $\qquad$ $\Rightarrow \|B(s)\|=1$

$\|B(s)\|=\underline{\|T(s)\times N(s)\|}$

$=\underbrace{\|T(s)\|}_{1}\,\underbrace{\|N(s)\|}_{1}\,\underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{1}$

Sonuç olarak $\{T,N,B\}$ ortonormaldir.

Yani $\{T,N,B\}$ sistemi β eğrisi üzerinde bir çatı alanıdır.

Tanım: β eğrisi boyunca tanımlanan $\{T,N,B\}$ çatı alanına "Frenet Çatı Alanı" denir.

Örnek: $\alpha : I \to E^3$

$\alpha(t) = \left(3\cos\frac{s}{5},\ 3\sin\frac{s}{5},\ \frac{4s}{5}\right)$

eğrisinin Frenet vektör alanlarını bulunuz. $\{T,N,B\}$

- $T(s) = \alpha'(t)$

$$= \left(-\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5},\ \frac{3}{5}\cos\frac{s}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \|T(s)\| = \sqrt{\frac{9}{25}\sin^2\frac{s}{5} + \frac{9}{25}\cos^2\frac{s}{5} + \frac{16}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}} = 1 \quad \text{birim hızlıdır.}$$

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$$

$$T'(s) = \alpha''(s)$$

$$= \left(-\frac{3}{25}\cos\frac{s}{5},\ -\frac{3}{25}\sin\frac{s}{5},\ 0\right)$$

$$\Rightarrow \|T'(s)\| = \sqrt{\left(-\frac{3}{25}\right)^2} = \frac{3}{25}$$

$$N(s) = \frac{\left(-\frac{3}{25}\cos\frac{s}{5},\ -\frac{3}{25}\sin\frac{s}{5},\ 0\right)}{\frac{3}{25}}$$

$$= \left(-\cos\frac{s}{5},\ -\sin\frac{s}{5},\ 0\right)$$

$$B(s) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -3\sin\frac{s}{5} & 3\cos\frac{s}{5} & 4 \\ -\cos\frac{s}{5} & -\sin\frac{s}{5} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= e_1\begin{vmatrix} 3\cos\frac{s}{5} & 4 \\ -\sin\frac{s}{5} & 0\end{vmatrix} - e_2\begin{vmatrix} -3\sin\frac{s}{5} & 4 \\ -\cos\frac{s}{5} & 0\end{vmatrix} - e_3\begin{vmatrix} -3\sin\frac{s}{5} & 4 \\ -\cos\frac{s}{5} & 0\end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\left(e_1 \cdot 4\sin\frac{s}{5} - e_2\, 4\cdot\cos\frac{s}{5},\ 3\right)$$

$$= \left(\frac{4}{5}\sin\frac{s}{5},\ -\frac{4}{5}\cos\frac{s}{5},\ \frac{3}{5}\right)$$

25.03.26
6. Hafta

* $\{T,N,B\}$ çatı alanı bir taban olduğundan (E^3'ün bir tabanı) E^3'deki tüm vektör alanları gibi T', N', B' türevleri de Frenet çatı alanının bir lineer toplamı şeklinde yazılır.

Buna göre B binormal vektör alanının B' türev vektörünü Frenet çatısı yardımıyla yazacak olursak;

$B' = (B'T)\,T + (B'N)\,N + (B'B)\,B \ldots\ldots (*)$ şeklinde ifade edilir. B ile T birbirine dik vektörler olduğundan $B\cdot T = 0$'dır. Her iki tarafın türevini alırsak; $(BT)' = 0$ olur.

$\Rightarrow B'T = -B\underbrace{T'}_{\kappa N}$ $\qquad$ B ile N de birbirine dik olduğundan $B\cdot N = 0$'dır.

$\Rightarrow B'T = -\kappa\cdot\underbrace{B\cdot N}_{0}$ $\qquad$ $\Rightarrow B'T = 0$ elde edilir.

B binormal vektör alanı birim vektör olduğundan $B \cdot B = 1$ 'dir. Yine her iki tarafın türevini alırsak;

$(B, B') = 0$

$\Rightarrow B' \cdot B + B \cdot B' = 0$

$= 2 \cdot B \cdot B' = 0$

$\Rightarrow B \cdot B' = 0$ 'dır.

Bulunan değerler * denkleminde yerine yazılırsa;

$B' = 0 \cdot T + (B'N) N + 0 \cdot B$

$\Rightarrow B' = (\underbrace{B'N}_{\in \mathbb{R}}) N$

Elde edilen bu denklemlerden bir tanım yapacak olursak.

Tanım: $B' = -\tau \cdot N$ ile tanımlı reel değerli τ fonksiyonuna B eğrisinin burulması (torsiyonu) denir.

Sonuç: Bir eğrinin herhangi bir noktasındaki eğriliği ve burulması için $K \geq 0$ iken $\tau \in \mathbb{R}$ 'dir. Yani K daima pozitif değerler alır. τ ise pozitif veya negatif değerler alabilir.

Teorem: $B : I \to E^3$, $K > 0$ eğrilikli ve τ burulmalı birim hızlı bir eğri ise bu durumda;

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ T' = K \cdot N \\ 2)\ N' = -K \cdot T + \tau \cdot B \\ 3)\ B' = -\tau \cdot N \end{array}\right\}$$ Bu formullere frenet formulleri denir.

İspat: 1. ve 3. esitlikler sırasıyla K ve τ' nun tanımından var olduğundan sadece 2. esitliği ispatlayalım.

$N' = (N'T) T + (N'N) N + (N'B) B$ ---- (*) seklinde ifade edilir.

T ile N birbirine dik olduğundan $T \cdot N = 0$ 'dır. Her iki tarafın türevini alırsak

$(T \cdot N)' = 0$

$\Rightarrow T'N + T \cdot N' = 0$ 'dır.

$\Rightarrow K \cdot N \cdot N + T \cdot N' = 0$

$N \cdot N = 1$ olduğundan

$K + T \cdot N' = 0$

$\Rightarrow N' \cdot T = -K$

$\|N\| = 1$ olduğunu biliyoruz.

$\Rightarrow N \cdot N = 1$ 'dir. Her iki tarafın türevini alırsak;

$(N \cdot N)' = 0$

$\Rightarrow N'N + NN' = 0$

$\Rightarrow 2N \cdot N' = 0$

$\Rightarrow N \cdot N' = 0$ 'dır.

B ile N vektörü birbirine dik olduğundan $B \cdot N = 0$'dır. Yine her iki tarafın türevini alırsak;

$(BN)' = 0$

$\Rightarrow B'N + BN' = 0$

$\Rightarrow -\tau \underbrace{N \cdot N}_{1} + BN' = 0$

$\Rightarrow BN' = \tau$ elde edilir.

Bulunan değerler (*) denkleminde yerine yazılırsa;

$N' = -\kappa \cdot T + \tau B$

elde edilir.

Örnek: $\beta : I \to E^3$. $\beta(s) = (\cos 45 \cdot \sin s, \sin 45 \cdot \sin s, \cos s)$

eğrisinin birim hızlı olduğunu gösteriniz. Frenet vektör alanlarını, eğrilik ve burulma fonksiyonlarını bulunuz.

$\beta(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin s, \cos s\right)$

$\beta'(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos s, -\sin s\right)$

$\|\beta'(s)\| = \sqrt{\frac{2}{4}\cos^2 s + \frac{2}{4}\cos^2 s + \sin^2 s}$

$= \sqrt{\cos^2 s + \sin^2 s} = \sqrt{1} = 1$ birim hızlıdır.

$T(s) = \beta'(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos s, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos s, -\sin s\right)$

$N(s) = \dfrac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$

$T'(s) = \beta''(s) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s . \frac{\sqrt{2}}{2}\sin s, -\cos s\right)$

$\|T'(s)\| = \sqrt{\frac{2}{4}\sin^2 s + \frac{2}{4}\sin^2 s + \cos^2 s}$

$= \sqrt{1} = 1$

T, N, B, κ, τ

$\Rightarrow \bullet\ N(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin s, -\cos s\right)$

$\Rightarrow \bullet\ \kappa = \|T'(s)\| = 1$

$B(s) = T(s) \times N(s)$

$$B(s)=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\sqrt2}{2}\cos s & \frac{\sqrt2}{2}\cos s & -\sin s \\ -\frac{\sqrt2}{2}\sin s & -\frac{\sqrt2}{2}\sin s & -\cos s \end{vmatrix} = e_1\begin{vmatrix} \frac{\sqrt2}{2}\cos s & -\sin s \\ -\frac{\sqrt2}{2}\sin s & -\cos s\end{vmatrix} - e_2\begin{vmatrix} \frac{\sqrt2}{2}\cos s & -\sin s \\ \frac{\sqrt2}{2}\sin s & -\cos s\end{vmatrix} - e_3\begin{vmatrix} \frac{\sqrt2}{2}\cos s & \frac{\sqrt2}{2}\cos s \\ -\frac{\sqrt2}{2}\sin s & -\frac{\sqrt2}{2}\sin s\end{vmatrix}$$

$$= e_1\underbrace{\left(-\frac{\sqrt2}{2}\cos^2 s\cdot\frac{\sqrt2}{2}\sin^2 s\right)}_{-\sqrt2/2} - e_2\underbrace{\left(-\frac{\sqrt2}{2}\cos^2 s-\frac{\sqrt2}{2}\sin^2 s\right)}_{\sqrt2/2} + e_3\underbrace{\left(\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)^2\cos s\cdot\sin s+\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2\cos s\sin s\right)}_{0}$$

$$= \left(-\frac{\sqrt2}{2}, +\frac{\sqrt2}{2}, 0\right)$$

ÖDEV !

① $c=\sqrt{a^2+b^2}$ ve $a>0$ olmak üzere, $\beta(s) = \left(a.\cos\frac{s}{c},\ a.\sin\frac{s}{c},\ b.\frac{s}{c}\right)$

birim hızlı eğrisinin frenet vektörleriyle, eğrilik burulmasını bulunuz.

② $\beta(s) = (\cos s,\ \sin s,\ 0)$

01.04.26
7. Hafta

Uygulama

① Aşağıdakilerden hangisi reguler bir eğri değildir.

a) $\alpha: \mathbb{R}\to E^3$ $\quad \alpha(t) = (t, t^2, t^3) \to \alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, $\alpha(t)\neq\vec0$ bozdu

b) $\alpha: \mathbb{R}^+\to E^3$ $\quad \alpha(t) = (t^2, t^2, t^3) \to \alpha'(t) = (2t, 2t, 3t^2)$, $\forall t\in\mathbb{R}^+$ için $\alpha'(t)\neq\vec0$ ↳ reguler.

c) $\alpha: \mathbb{R}\to E^2$ $\quad \alpha(t) = (t, t) \to \alpha'(t) = (1,1)$, $\forall t\in\mathbb{R}$ için $\alpha'(t)\neq\vec0$ → reguler

d) $\alpha: (-1,+1)\to E^3$ $\quad \alpha(t) = (t^3, t^2, 2t) \to \alpha'(t) = (3t^2, 2t, 2)$, $\forall t\in I$ için $\alpha'(t)\neq\vec0$

e) $\alpha: \mathbb{R}\to E^2$ $\quad \alpha(t) = (t^2, t^3) \to \alpha'(t) = (2t, 3t^2)$, $\forall t\in\mathbb{R}$ için $0\in\mathbb{R}$ $t=0$ için $\alpha'(t)=(0,0)$

② $\alpha: I\to E^4$ $\quad \alpha(t) = (1, 2t, t+2, 2t-1)$ eğrisini birim hızlı olacak şekilde yeniden parametrelendiriniz.

↳ sınavda birim hızlı sorar.

$\alpha'(t) = (0, 2, 1, 2)$

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{0^2+2^2+1^2+2^2} = \sqrt3$

$s(t) = \int_0^t \underbrace{\|\alpha'(t)\|}_{\text{yay uzunluğu}} dt = \int_0^t 3\,dt = 3t\Big|_0^t = 3t$

$t=h(s)$

$s(t) = 3t$

$\frac{s}{3} = t$

$t = h(s) = \frac{s}{3}$ parametre değişimi yapılır.

$\beta(s) = (\alpha\circ h)(s)$

$= \alpha(h(s))$

$= \alpha\left(\frac{s}{3}\right)$

$= \left(1,\ 2\frac{s}{3},\ \frac{s}{3}+2,\ 2\frac{s}{3}-1\right)$

③ $\alpha:(0,2)\rightarrow E^3$

$\alpha(t)=\left(2+3t^2,\ 2-t^2,\ \frac{3t^2}{2}-1\right)$

verilen eğriyi birim hızlı olacak şekilde yeniden parametrelendiriniz.

$\alpha'(t)=(6t,\ 2t,\ 3t)$

$\|\alpha'(t)\|=\sqrt{36t^2+4t^2+9t^2}=\sqrt{49t^2}=7t$

$s(t)=\int_0^t 7t\,dt=\frac{7t^2}{2}\Big|_0^t=\frac{7t^2}{2}$

$h(s)=t$

$s=\frac{7t^2}{2}$

$t^2=\frac{2s}{7}$

$t=\sqrt{\frac{2s}{7}}$

$h(s)=\sqrt{\frac{2s}{7}}$ parametresi uygulanır.

$\beta(s)=(\alpha\circ h)(s)$

$=\alpha(h(s))$

$=\alpha\left(\sqrt{\frac{2s}{7}}\right)$

$\beta(s)=\left(2+3\cdot\frac{2s}{7},\ 2-\frac{2s}{7},\ \frac{3\cdot\cancel{2}s}{\cancel{2}\cdot 7}-1\right)$

$=2+\frac{6s}{7},\ 2-\frac{2s}{7},\ \frac{3s}{7}-1$

④ $\alpha:(0,5)\rightarrow E^3$

$\alpha(t)=(2\sin 3t,\ -2\cos 3t,\ 6t)$

verilen eğriyi birim hızlı olacak şekilde yeniden parametrelendiriniz.

$\alpha'(t)=(6\cos(3t),\ 6\sin(3t),\ 6)$

$\|\alpha'(t)\|=\sqrt{36\cos^2(3t)+36\sin^2(3t)+36}=\sqrt{36(\cos^2(3t)+\sin^2(3t)+36}$

$=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

$s(t)=\int_0^t\|\alpha'(t)\|\,dt=\int_0^t 6\sqrt{2}\,dt=6\sqrt{2}(t)\Big|_0^t=6\sqrt{2}\cdot t$

$s(t)=6\sqrt{2}\cdot t$

$\frac{s}{6\sqrt{2}}=t$

$(\alpha\circ h)(s)=\alpha(h(s))\Rightarrow\alpha(s)=\left(2\sin\frac{3s}{6\sqrt{2}},\ -2\cos\frac{3s}{6\sqrt{2}},\ \frac{6s}{6\sqrt{2}}\right)$

$\alpha(s)=\left(2\sin\frac{s}{2\sqrt{2}},\ -2\cos\frac{s}{2\sqrt{2}},\ \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$ //

⑤ $\alpha(t)=(\cos t^2,\ \sin t^2,\ t^2)$ eğrisinin yay uzunluğu fonk. bulunuz. Bu eğriyi birim hızlı olacak şekilde yeniden parametrelendiriniz.

$\alpha'(t)=(-2t\sin t^2,\ 2t\cos t^2,\ 2t)$

$\|\alpha'(t)\|=\sqrt{4t^2\sin^2t^2+4t^2\cos^2t^2+4t^2}$

$=2\sqrt{2}t$

$s(t)=\int_0^t 2\sqrt{2}\,dt=\sqrt{2}t^2\Big|_0^t=2t^2$

$h(s)=t$

$s=\sqrt{2}t^2$

$t^2=\frac{s}{\sqrt{2}}$

$t=\sqrt{\frac{s}{\sqrt{2}}}$

$\beta(s)=(\alpha\circ h)(s)=\alpha(h(s))$

$=\left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}},\ \sin\frac{s}{\sqrt{2}},\ \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$

⑥ Bir α eğrisi için $\|\alpha'(t)\| = 3t^2 + 2t + 1$ olduğuna göre bu eğrinin $\alpha(0)$ ve $\alpha(1)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu kaç br'dir?

$$yay = \int_0^1 (3t^2+2t+1)\,dt$$

$$\|\alpha'(t)\| = 3t^2+2t+1$$

$$= (t^3+t^2+t)\Big|_0^1$$

$$= 1+1+1 = 3$$

Alıştırma Soruları

① Kutupsal koordinat sisteminde denklemi $r = 2\cos\theta$ olan eğrinin $\theta = 0$ ile $\theta = \pi$ arasındaki uzunluğu kaç br'dir?

② $\alpha(t) = (\cos 2t, \sin 2t, t)$ eğrisinin $\alpha(0)$ ve $\alpha(\pi)$ arasındaki uzunluğu kaç br'dir.

③ Aşağıdaki eğrilerin birebir olup olmadığını gösteriniz

i) $\alpha: (0,\pi) \to E^2$, $\alpha(t) = (\sin t, \cos 2t)$

ii) $\alpha: \mathbb{R} \to E^2$ $\alpha(t) = (t, \sin t)$

iii) $\alpha: \mathbb{R} \to E^3$, $\alpha(t) = (t^2, 2, t^4-1)$

④ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ fonksiyonunun

$\alpha: I \to E^3$, $\alpha(t) = (\cos \pi t, t^2+2, e^{t+1})$

eğrisinin $\alpha(1)$ noktasındaki hız vektörü yönündeki türevini bulunuz.