

BÖLÜM 4

Sadeleştirme Teknikleri

Doç. Dr. Fatih Evran
Elektrik-Elektronik Mühendisliği
Düzce Üniversitesi
Email: fatih evran@duzce.edu.tr

Sadeleştirme Teknikleri

Bu bölümde, karmaşık bir Boole fonksiyonunu basitleştirmek veya en aza indirmek için Boole cebri yasalarının ve teoremlerinin uygulanması dışındaki yöntemleri inceleyeceğiz. Tüm sadeleştirme işlemlerinin ana amacı, en az sayıda terime sahip bir ifade elde etmektir. İncelenecek yöntemler şunlardır:

- (a) Karnaugh harita yöntemi
- (b) Quine–McCluskey tablo yöntemi
- (c) Petrick yöntemi

Karnaugh Haritası Yapısının İncelenmesi

- Bir n değişkenli Karnaugh haritası 2^n kareye (hücre ya da dörtgen) sahiptir ve her minterime bir kare atanır. Minterimlerden oluşan Karnaugh haritasında, fonksiyonu "1" yapan minterimler karelere "1" olarak yerleştirilir ve fonksiyonu "0" yapan minterimler ise karelere "0" olarak yerleştirilir.
- 'don't care-belirsiz (tanımlanmamış) değerler' koşullarına karşılık gelen karelere bir 'X ya da Φ ' yerleştirilir.
- Dörtten fazla değişkene yönelik haritaların kullanımı, dört veya daha az değişkene yönelik haritalar kadar basit değildir. Beş değişkenli bir harita 32 kareye ihtiyaç duyar ve altı değişkenli bir harita 64 kareye ihtiyaç duyar.
- Dörtten fazla değişken için haritaların kullanımı zordur ve burada ele alınmayacaktır.

Doğruluk Tablosundan Karnaough Haritasına Yerleştirme:

Bir doğruluk tablosundaki minterimleri bir Karnaough haritasına atayabiliriz.

İki girişli bir fonksiyon için Karnaough diyagramının biçimi: $F(A,B)$

Örnek: $F(A,B)$

Doğruluk tablosu

Num	A	B	F
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	1
3	1	1	0

Bu sütunlar sırasıyla B' ve B 'ye karşılık gelir.

Girişler

Minterimler

Karnaough haritası:

		B	
		$\bar{B}$	B
A	$\bar{A}$	0	1
	A	1	0

ya da

B	A	
	$\bar{A}$	A
$\bar{B}$	0	1
B	1	0

A: satır, B: sütun

A: sütun, B: satır

Bu satırlar sırasıyla A' ve A 'ya karşılık gelir.

Sütunlara veya satırlara farklı değişkenler yerleştirebiliriz.

Doğruluk Tablosundan Karnaough Haritasına Yerleştirme (devam)

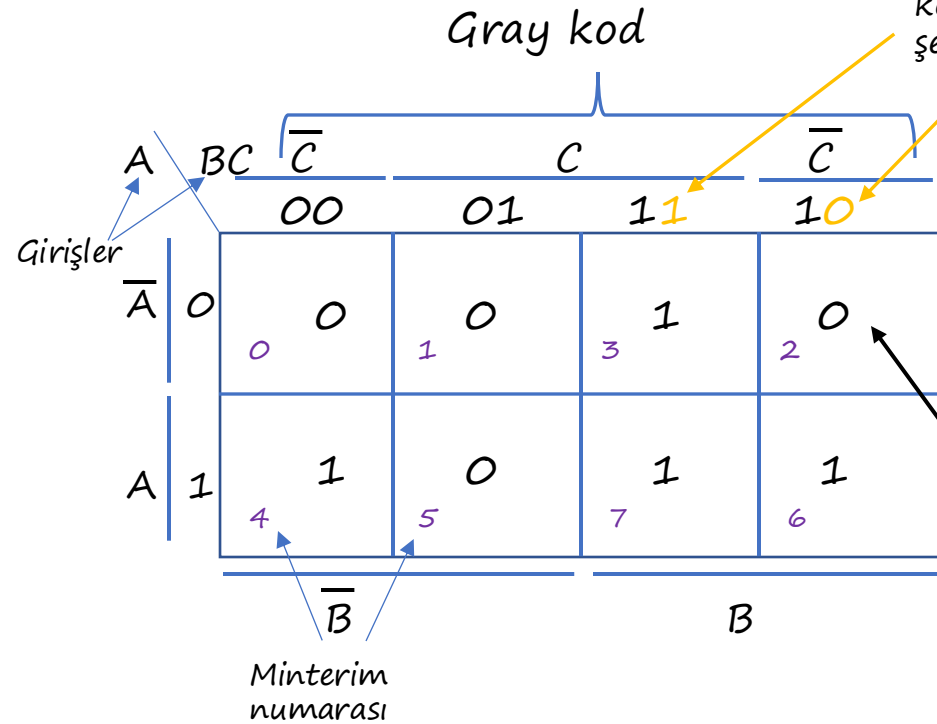
Satır ve sütunlar Gray kod özelliğine göre etiketlenir, böylece haritanın bitişik karelerinde (yatay ve dikey) bulunan bir değişken diğerlerinden farklılık gösterir.

İki girişli bir fonksiyon için Karnaugh diyagramının biçimi: $F(A,B,C)$

Örnek: $F(A, B, C)$

Doğruluk tablosu

Num.	A	B	C	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1



Bitişik karelerde bulunan B ve C giriş kodlarında, yalnızca bir bitin farklı olacak şekilde girilmesi gerektiğine dikkat edin.

Örneğin, buraya $ABC=010$ giriş kombinasyonu için üretilen çıkış değerini yazıyoruz.

4 girişli bir fonksiyonun Karnaugh haritasının formatı: $F(A,B,C,D)$

Örnek: Aşağıdaki fonksiyon için Karnaugh haritasını çizin.

$$F(A,B,C,D) = \Sigma(0,2,5,8,9,10,11,12,13,14,15)$$

Gray kod

		Gray kod				
		$\bar{C}$	C			
AB	CD	00	01	11	10	
$\bar{A}$	00	1 0	0 1	0 3	1 2	$\bar{B}$
	01	0 4	1 5	0 7	0 6	B
A	11	1 12	1 13	1 15	1 14	
	10	1 8	1 9	1 11	1 10	$\bar{B}$
		$\bar{D}$	D	$\bar{D}$		

Gray kod

Karnaugh Haritası-Basitleştirme Kuralları

Karnaugh haritası, aşağıdakileri içeren bitişik kareleri gruplayarak fonksiyonların basitleştirilmesi için aşağıdaki kuralları kullanır.

- Gruplar sadece 1'ler veya 0'lar içermelidir.

A B

1	1
0	0

yanlış

A B

1	1
0	0

doğru

- Gruplar yatay veya dikey olabilir, ancak çapraz olamaz.

A B

1	0
0	1

yanlış

A B

1	1
0	1

doğru

- Gruplar 1, 2, 4, 8, 16 veya genel olarak 2^n kare içermelidir.

A B

1	0
1	0

İkili grup

doğru

A B

1	1
1	1

Dörtlü grup

doğru

BC

	00	01	11	10
A 0	0	1	1	1
1	0	0	0	0

Üçlü grup

yanlış

Karnaugh Haritası-Basitleştirme Kuralları (devam)

- Her grup mümkün olduğunca büyük olmalıdır.

A \ BC	00	01	11	10
	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1

doğru

A \ BC	00	01	11	10
	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1

yanlış

Boole yasası ihlal edilmedi, ancak fonksiyon yeterince sadeleşmedi.

- '1' içeren her kare en az bir grupta olmalıdır.

A \ BC	00	01	11	10
	0	1	1	1
0	0	0	1	1
1	0	0	0	1

'1' içeren kare en az bir grupta mevcut

Grup I

Grup II

- Gruplar örtüşebilir.

A \ BC	00	01	11	10
	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1

doğru

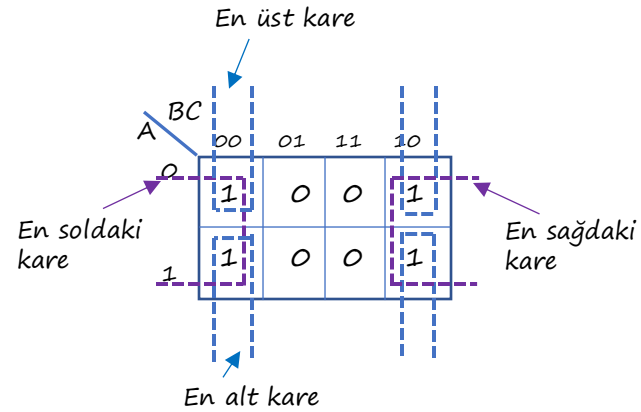
A \ BC	00	01	11	10
	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1

yanlış

Gruplar örtüşmüyor (fonksiyon yeterince sadeleşmedi).

Karnaugh Haritası-Basitleştirme Kuralları (devam)

- Karşılıklı kenardaki kareler birbirleri ile grup oluşturabilir.



Karnough Haritasında Sadeleştirme:

- Doğruluk tablosundan 1'ler ve 0'lar haritaya yerleştirilir.
- Ardından Boole fonksiyonunu basitleştirmek için basit bir teorem kullanılır.
- Kullanılan teorem, bitişik karelerde yalnızca bir değişkenin farklılık göstermesi ile ilişkilidir.
- Yani bitişik kareler $BC.(A+\bar{A})$ özelliğini sağlamaktadır (burada bitişik karelerde sadece A girişi değişmektedir).
- Böylece bitişik kareleri sadeleştirdiğimizde BC sonucunu elde etmiş oluruz.

Karnough Haritasında Sadeleştirme (devam)

A \ BC		$\bar{C}$		C		$\bar{C}$	
		00	01	11	10	00	01
$\bar{A}$	0	0	0	1	0	0	0
A	1	0	0	1	1	0	0
		$\bar{B}$		B			

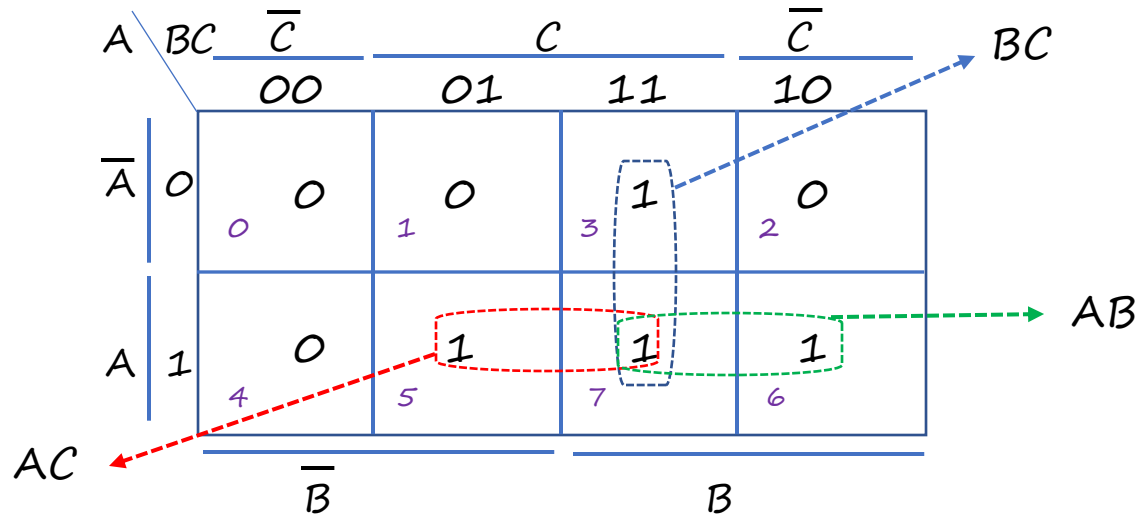
A dashed blue oval groups the two '1's in the column where $BC = 11$ (cells 3 and 7). A dashed blue arrow points from this group to the label BC on the right.

Komşu kareleri gruplandığımızda, ABC ve $A'BC$ terimlerinin bulunduğu bitişik karelerde yalnızca A değişmektedir. Dolayısıyla sadeleştirme işlemi BC olmaktadır.

Gruplama Örnekleri

$$F(A, B, C) = A'BC + AB'C + ABC' + ABC = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

- 1'lerden oluşan grupları olabildiğince büyük seçiniz.



- Sadeleştirilmiş Boole denklemi, grubun her birine karşılık gelen tüm terimleri toplayan bir denklemdir:

$$F(A, B, C) = AC + BC + AB$$

Gruplama Örnekleri (devam)

Aşağıdaki Boole fonksiyonunu sadeleştiriniz.

$$F(A, B, C) = \Sigma(0, 2, 4, 5, 6)$$

A \ BC	$\bar{C}$		C	
	00	01	11	10
$\bar{A}$ 0	0 1 0	1 0 1	0 0 3	1 1 2
A 1	1 1 4	1 1 5	0 0 7	1 1 6
$\bar{B}$		B		

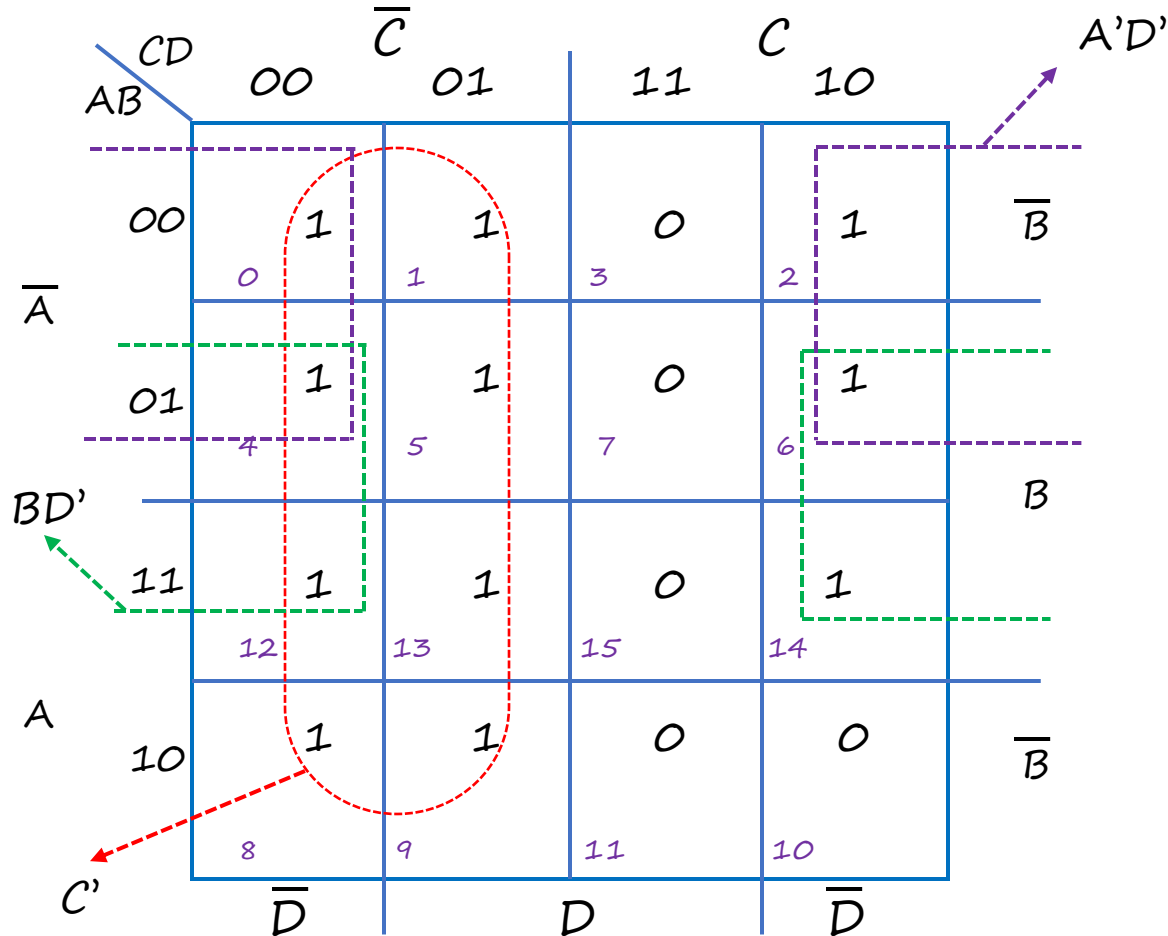
Diagram illustrating the Karnaugh map for the function $F(A, B, C) = \Sigma(0, 2, 4, 5, 6)$. The map is a 2x4 grid with rows labeled $\bar{A}$ and A , and columns labeled $\bar{B}$ and B . The cells contain values 0 or 1, with minterm numbers (0-7) in the bottom right corner. A red dashed box highlights the group of cells (1, 5) and (4, 5), which corresponds to the term AB' . A purple dashed box highlights the group of cells (0, 2), (1, 2), (4, 2), and (5, 2), which corresponds to the term C' .

Sadeleştirilmiş fonksiyon:

$$F = C' + AB'$$

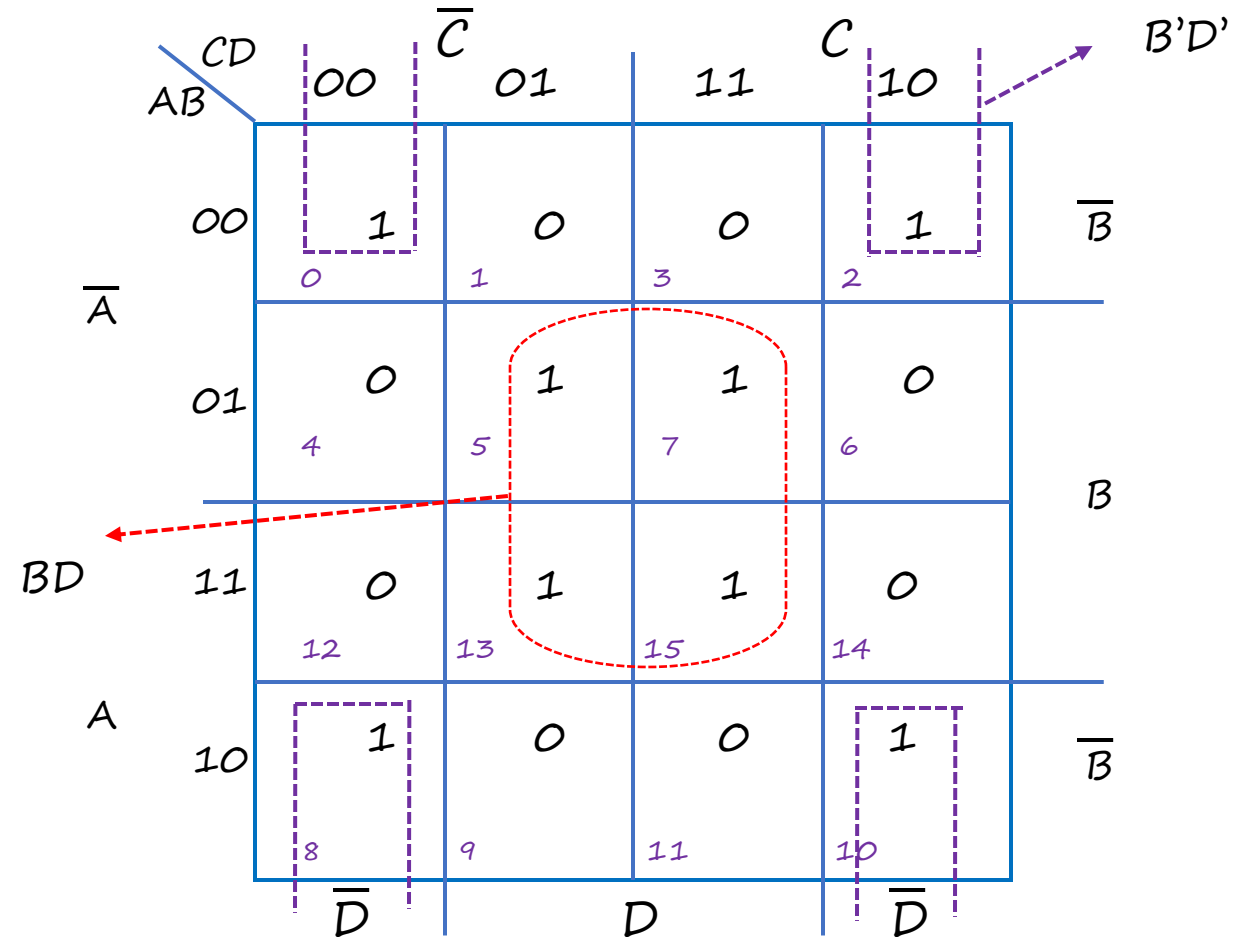
Gruplama Örnekleri (devam)

Örnek: Aşağıdaki Boole fonksiyonunu sadeleştiriniz.
 $F(A,B,C,D) = \Sigma (0,1,2,4,5,6,8,9,12,13,14)$



$$F = C' + A'D' + BD' \text{ (SOP)}$$

Örnek: Aşağıdaki Boole fonksiyonunu sadeleştiriniz.
 $F(A,B,C,D) = \Sigma (0,2,5,7,8,10,13,15)$

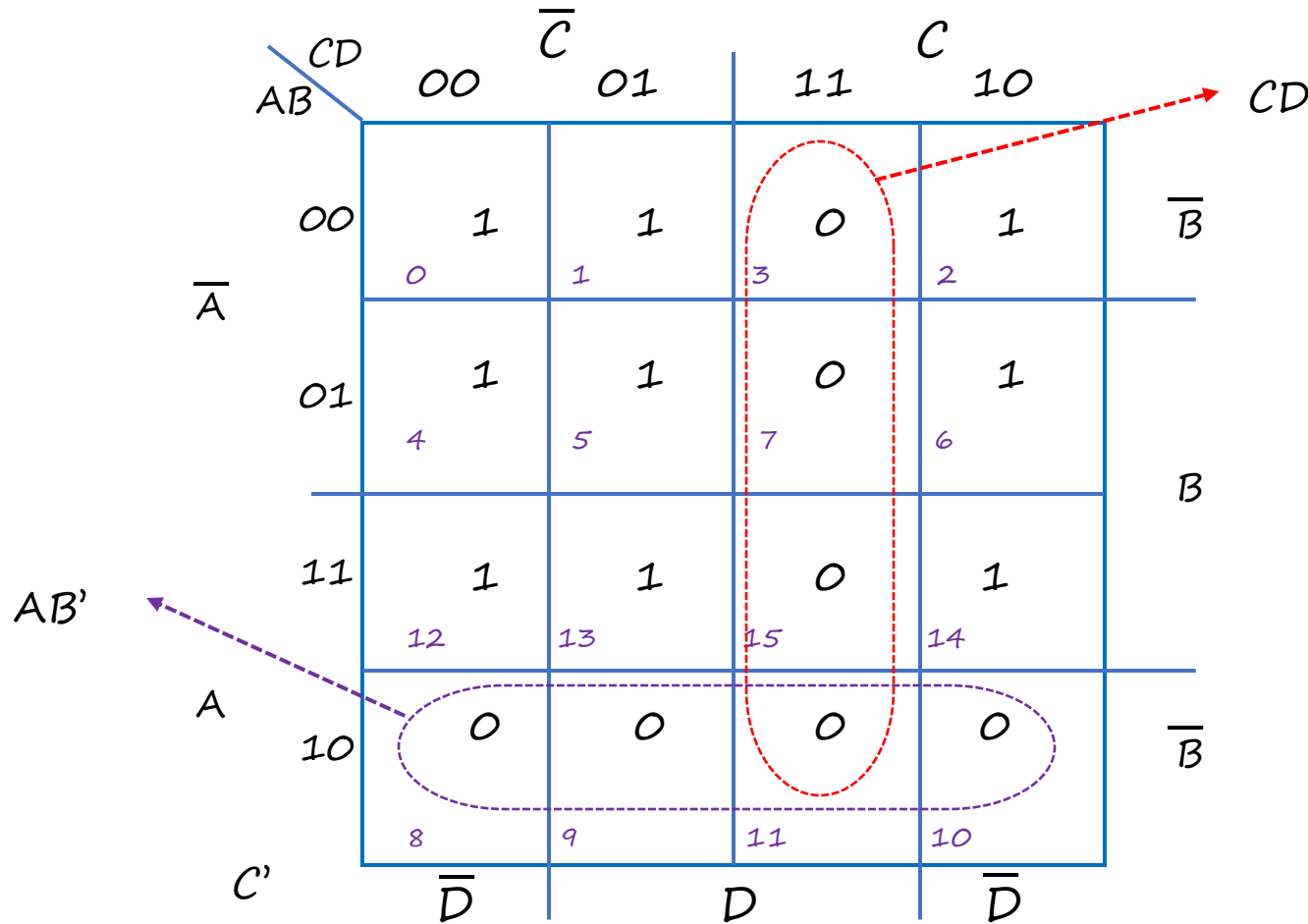


$$F = BD + B'D' \text{ (SOP)}$$

Gruplama Örnekleri (devam)

Örnek: Aşağıdaki Boole fonksiyonunu POS formunda sadeleştiriniz.

$$F(A,B,C,D) = \Sigma (0,1,2,4,5,6,12,13,14) = \Pi (3,7,8,9,10,11,15)$$



$$\bar{F} = CD + A\bar{B}$$

De Morgan:

$$\bar{\bar{F}} = \overline{(CD + A\bar{B})}$$

$$F = \bar{C}\bar{D} \cdot \bar{A}\bar{\bar{B}} = (\bar{C} + \bar{D}) \cdot (\bar{A} + B)$$

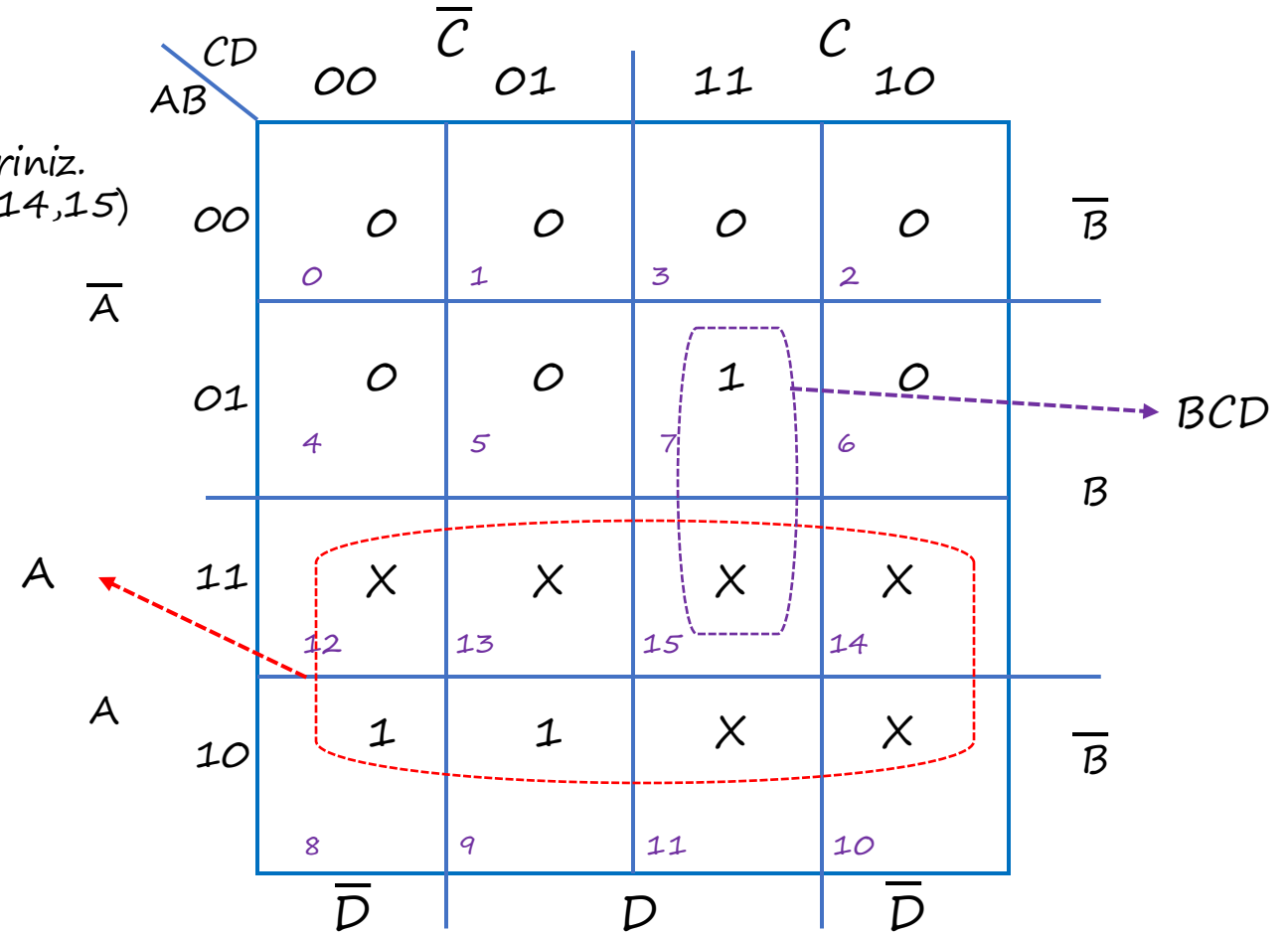
'Don't Care-Belirsiz Değerler' Durumu

- Bazı girişler için devrenin yani fonksiyonun alacağı değerler belirsiz olabilir.
- Doğruluk tablolarında ve Karnaugh haritalarında belirsiz değerleri ' X ya da Φ ' ile işaretliyoruz. Sadeleştirme işlemlerinde 'belirsiz değerler' joker olarak değerlendirilebilir. Yani belirsiz değerler ' 0 ' ya da ' 1 ' olarak değerlendirilebilir.

'Don't Care' Örnekleri

En basit ifadeyi veren Karnaugh-haritasını üretmek için belirsiz değerler '0' veya '1' olarak değiştirilmelidir.

Örnek: Aşağıdaki Boole fonksiyonunu sadeleştiriniz.
 $F(A,B,C,D) = \sum m(7,8,9) + \sum x(10,11,12,13,14,15)$

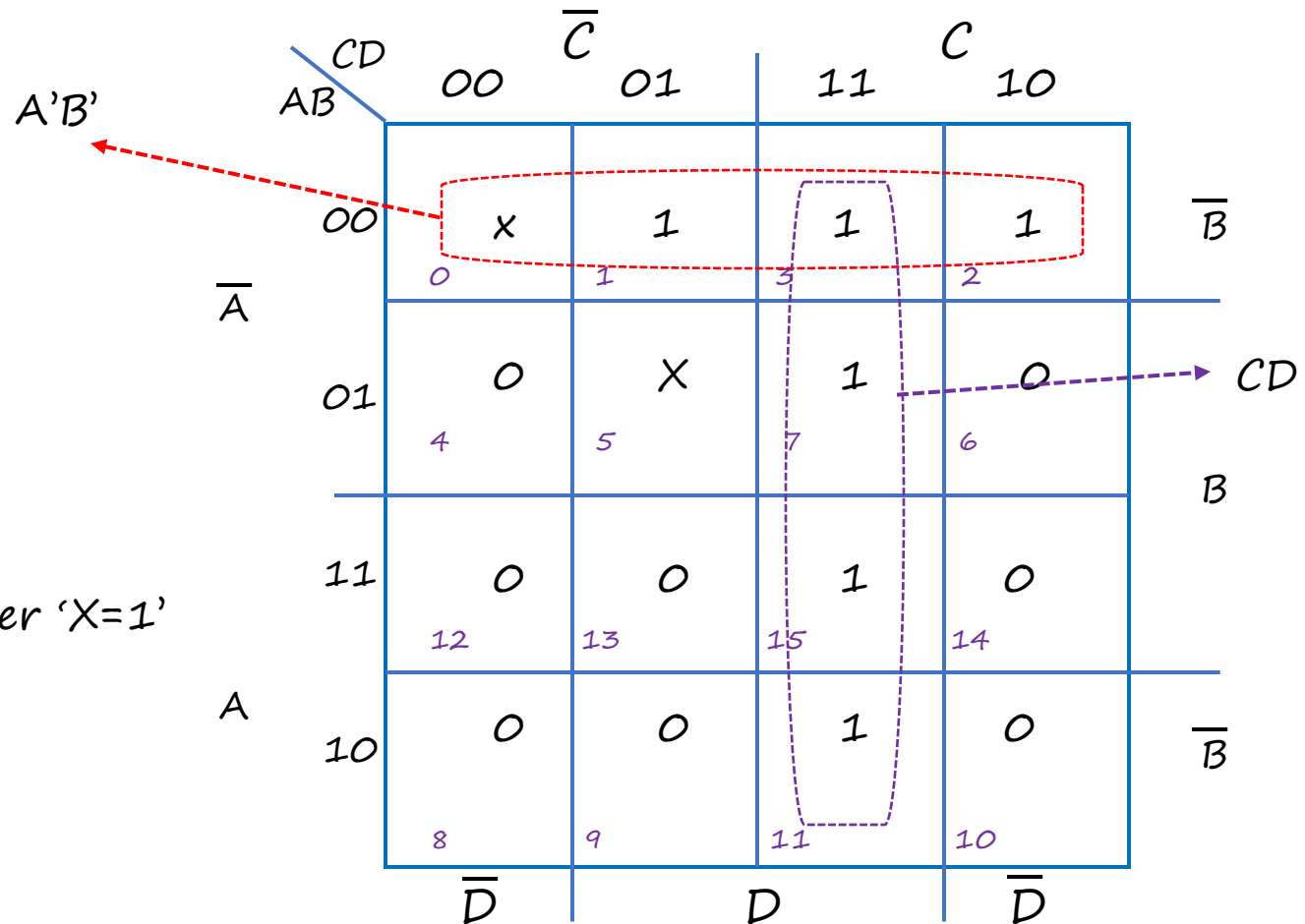


Burada belirsiz değerler 'X=1' olarak seçildi.

$$F = A + BCD$$

'Don't Care' Örnekleri (devam)

Örnek: Aşağıdaki Boole fonksiyonunu sadeleştiriniz.
 $F(A,B,C,D) = \sum m(1,2,3,7, 11,15) + \sum x(0,5)$



Burada sadece bir tane belirsiz değer 'X=1' olarak seçildi.

$$F = A'B' + CD$$

Karnaough haritalarında birden fazla sonuç alınması:

Karnaugh haritaları ile sadeleştirme işlemi sonucunda birden fazla sonuç oluşabilir. Aşağıdaki haritada iki geçerli ve eşdeğer sonuç üretilmektedir, çünkü minterim m_7 'yi dahil etmenin iki olası yolu vardır. Bu gibi durumlarda, sadeleştirme işleminde en az maliyetli çözüm kullanılmalıdır.

A \ BC	$\bar{C}$		C	
	00	01	11	10
$\bar{A}$	0 0	1 1	0 3	1 2
A	0 4	1 5	1 7	1 6
$\bar{B}$		B		

A \ BC		$\bar{C}$		C		$\bar{C}$	
		00	01	11	10		
A	$\bar{A}$	0 0	1 1	0 3	1 2		
	A	0 4	1 5	1 7	1 6		
		$\bar{B}$		B			

Lojik Fonksiyonların Sadeleştirilmesi

Bir lojik fonksiyonun birçok cebirsel ifadesi vardır. (Bkz. kanonik açılımlar ve sadeleştirilmiş ifadeleri). Sadeleştirmede amaç, belli bir maliyet kriterine göre bu cebirsel ifadeler içinden en uygun olanını seçmektir. Maliyet kriteri uygulamaya göre değişebilir.

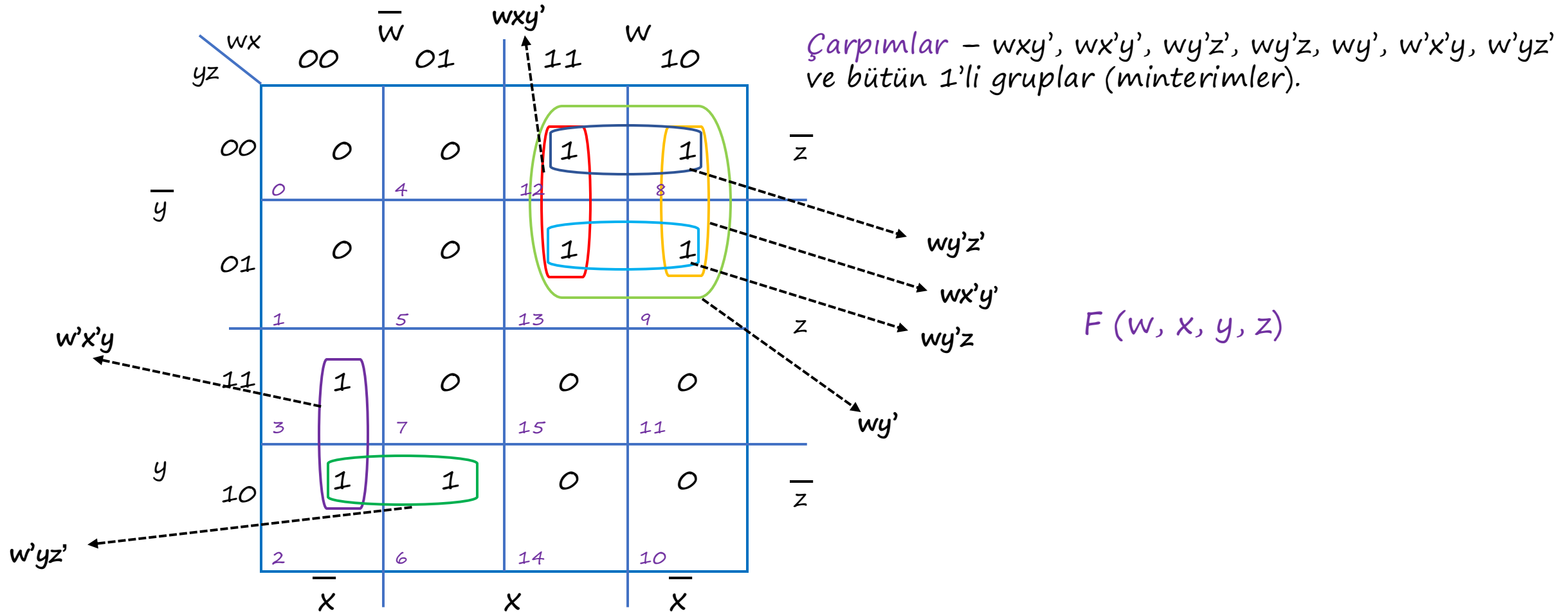
Örneğin tasarım aşamasında istenen özellikler şunlar olabilir: İfadenin az sayıda çarpım (ya da toplam) içermesi, her çarpımda az sayıda değişken olması, devrenin aynı tip kapılar ile gerçekleştirilebilmesi gibi.

Sadeleştirmenin amaçları:

- Devrenin boyutlarını küçültmek
- Enerji tüketimini azaltmak (pil, soğutma problemi)
- Gecikmeyi azaltmak (hızı arttırmak-Yayılma gecikmesi)
- Maliyeti azaltmak

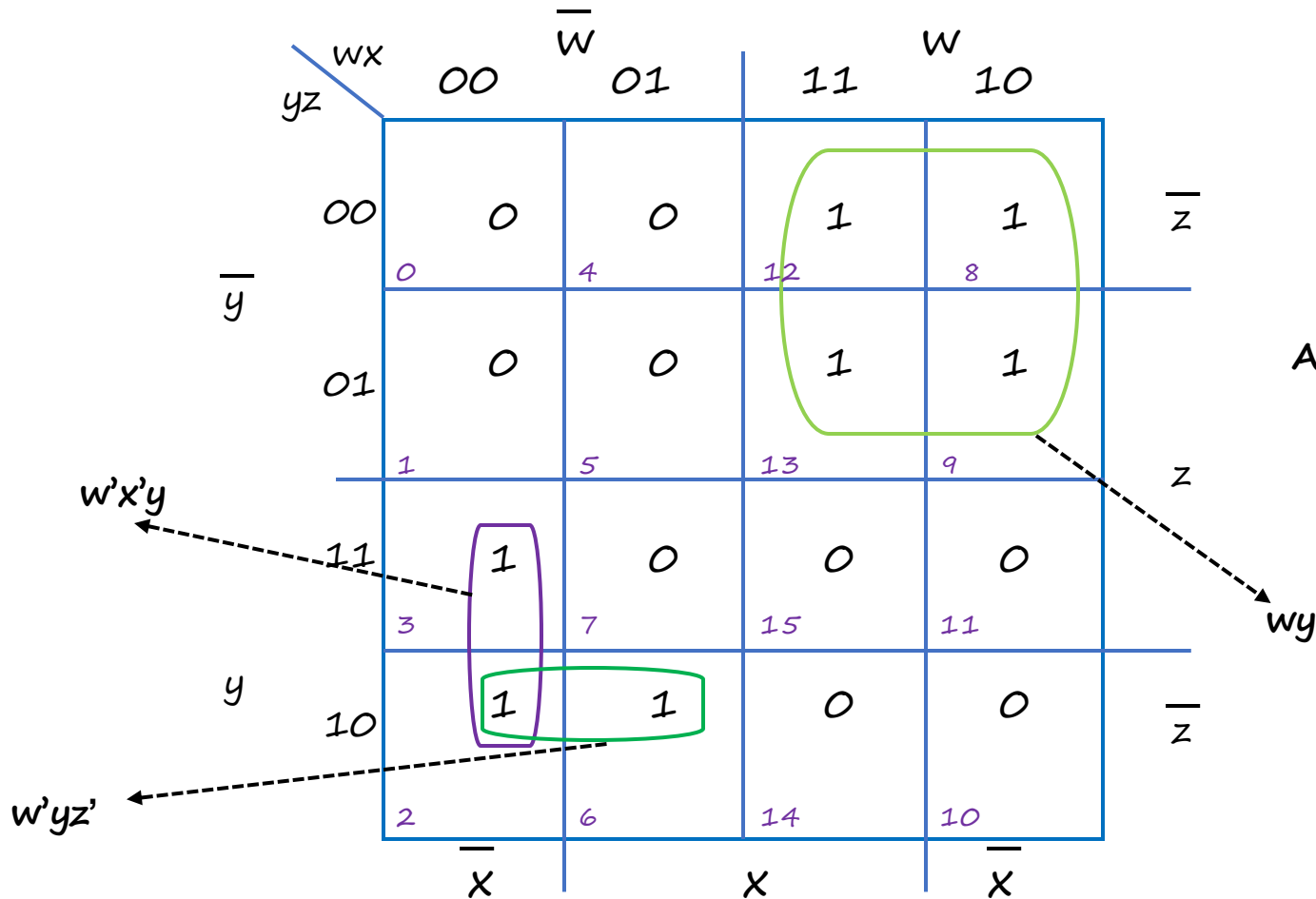
Basitleştirme ile İlgili Tanımlar: Çarpım ve Asal Çarpım

Implicant (çarpım): Karnaugh haritası üzerinde 1'li veya daha fazla '1' 'den oluşan bir gruptur.



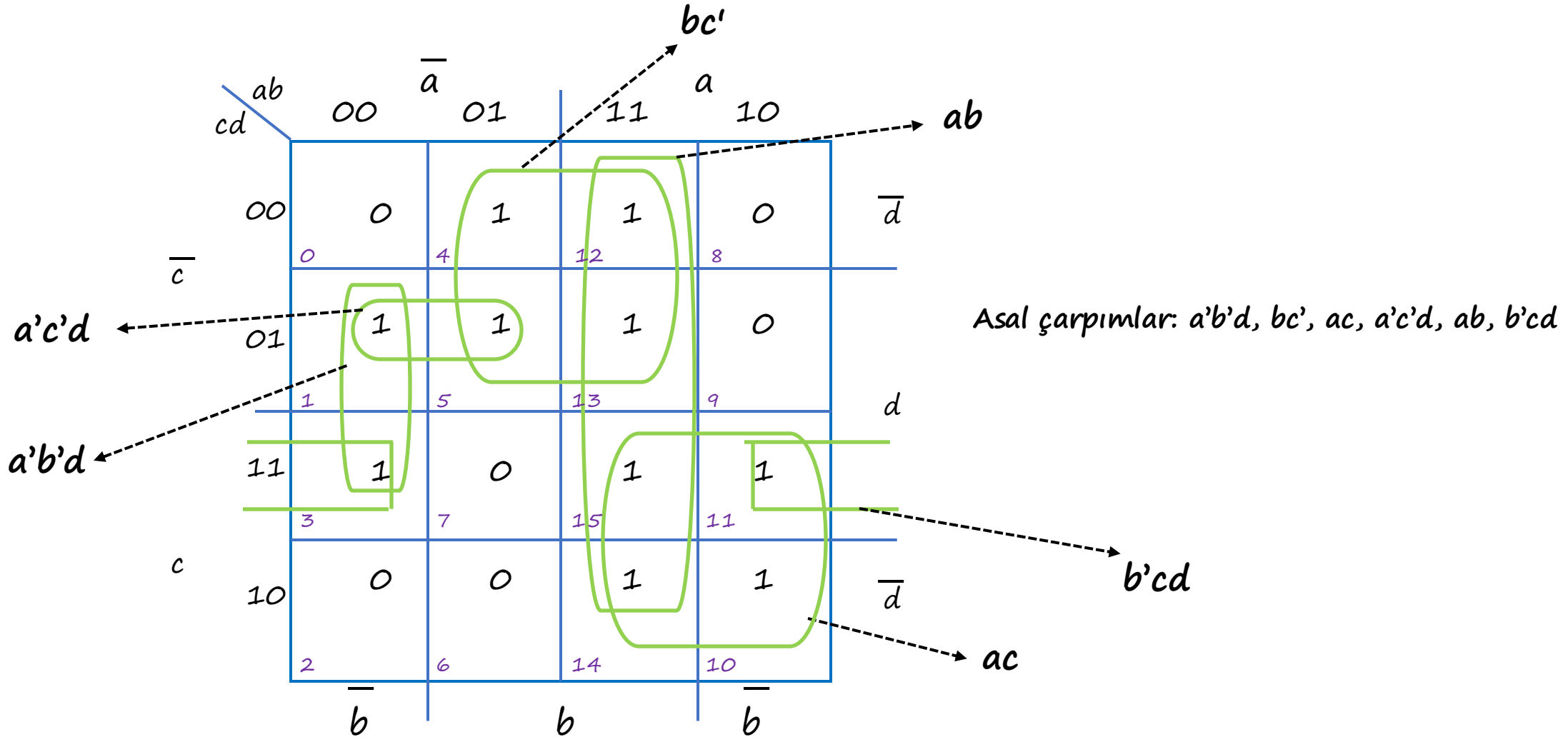
Sadeleştirme ile ilgili tanımlar: Çarpım ve Asal Çarpım

Karnaugh haritasında daire içine alınabilecek en büyük 1'li gruba **asal çarpım (prime implicant)** denir.



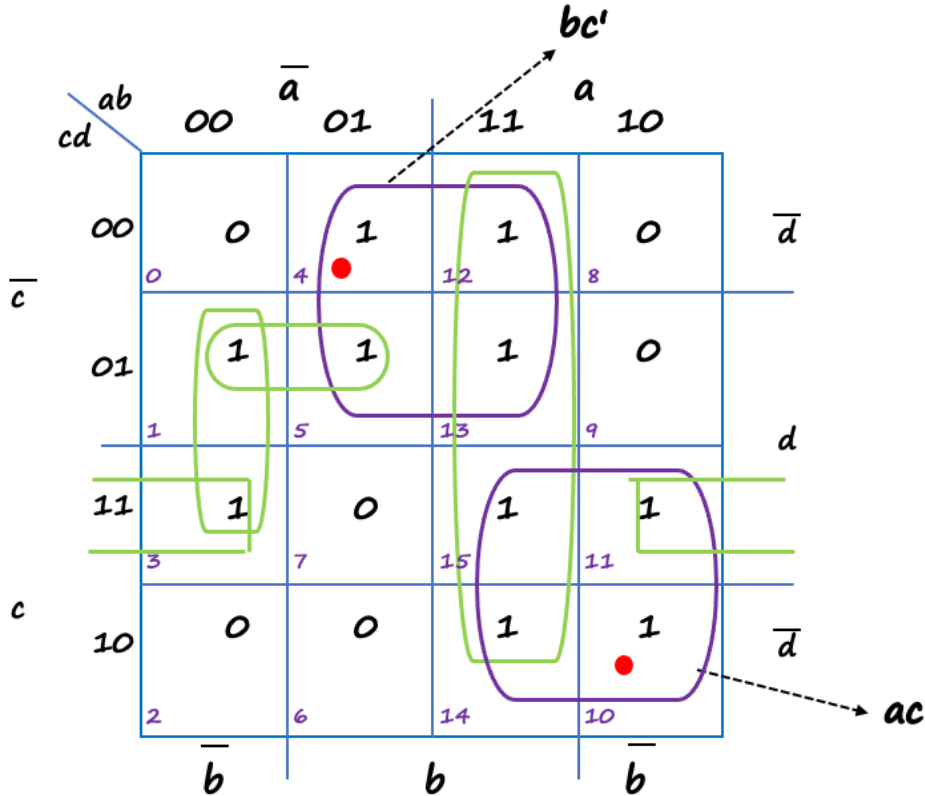
Asal çarpımlar: $w'x'y$, $w'yz'$, wy'

Asal Çarpım Örnekleri



Başlıca Nokta ve Gerekli Asal çarpım:

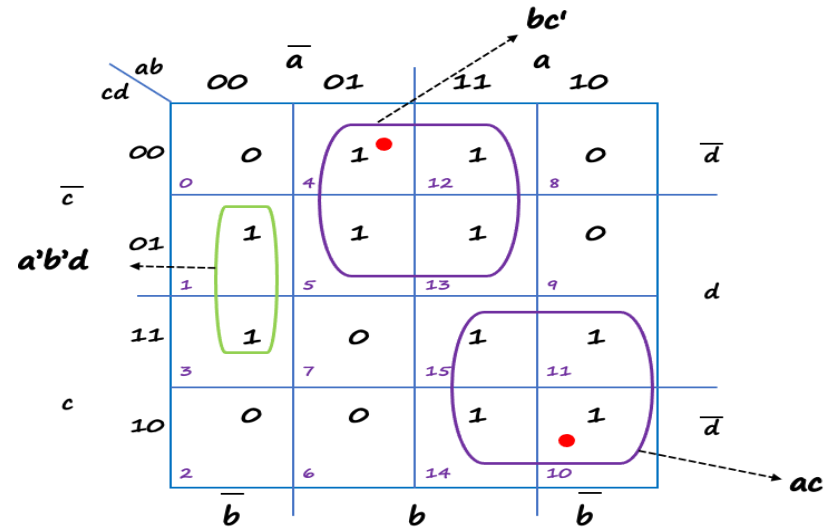
Bazı fonksiyonlarda bazı doğru noktalar sadece bir asal çarpım tarafından örtülürler. Bu noktalara **başlıca nokta** denir. Bu noktaları örten asal çarpımlara da **gerekli asal çarpım (essential prime implicant)** denir. Gerekli asal çarpımlar fonksiyonun yeterli kümesinde mutlaka yer alırlar. Çünkü başlıca noktaların başka asal çarpımlar tarafından örtülmesi mümkün değildir.



Gerekli asal çarpımlar: bc' , ac
Başlıca noktalar: 0100 , 1010

Buradaki gerekli asal çarpımlar fonksiyonun tüm doğru noktalarını örtmemektedir. Kalan minterimleri kapsamak için hangi asal çarpımların dahil edileceğine karar vermeliyiz. Örneğin, 0001 ve 0011'i kapsayacak şekilde a'b'd ekleyebiliriz. Bu durumda sadeleştirilmiş fonksiyon:

$$F(a,b,c,d) = bc' + ac + a'b'd$$



Sadeleştirme: Uygun Asal Çarpımların Seçilmesi

Hatırlatma: Sadeleştirme işlemi 2 aşamadan oluşmaktadır:

1. Tüm asal çarpımlar kümesinin bulunması
2. Fonksiyonun tüm "doğru" noktalarını örtecek şekilde, asal çarpımlardan en uygun (ucuz) olanların seçilmesi.

En uygun asal çarpımların (yeterli kümenin) seçilmesinde kullanılan yöntemlerden biri seçenekler tablosu yöntemidir.

Seçenekler Tablosu:

- Fonksiyonun asal çarpımları bulunduktan sonra bu çarpımlara isimler verilir.
Örneğin A, B, C, .. gibi.

- Verilen bir maliyet kriterine göre her asal çarpımın maliyeti hesaplanır.

Seçenekler tablosu bir matris şeklinde hazırlanır.

- Tablonun satırlarında, fonksiyonun asal çarpımlarının isimleri yer alır. Sütunlarda ise o fonksiyonun doğru noktalarının numaraları bulunur.
- En son sütuna asal çarpımların maliyetleri yazılır.
- Bir asal çarpım bir noktayı örtüyorsa matrisin ilgili gözüne X konur.

Seçenekler Tablosunun İndirgenmesi:

1. Başlıca noktalar belirlenir. Bir sütunda sadece bir tane X varsa o sütundaki nokta başlıca noktadır. Başlıca noktayı örten asal çarpım (gerekli asal çarpım) mutlaka fonksiyonun ifadesinde yer alacağından seçilir. Bu asal çarpıma ait satır ve onun örttüğü noktalara ait sütunlar tablodan kaldırılır.
2. Tabloda j. satırın X olan her gözünde i. satırda da X varsa i. satır, j. satırı örtüyor denir. Yani j. satırın örttüğü bütün noktaları i. satır da örtüyordur. Eğer i. satır j. satırı örtüyorsa ve i. satırdaki maliyet j. satırdaki maliyetten küçükse veya ona eşitse j. satır (örtülen satır) tablodan kaldırılır.

i	X	X	4
j		X	5

3. Bir sütun başka bir sütunu örtüyorsa örten sütun (daha fazla X'e sahip olan) tablodan silinir.

i	X	X
j	X	X
k		X

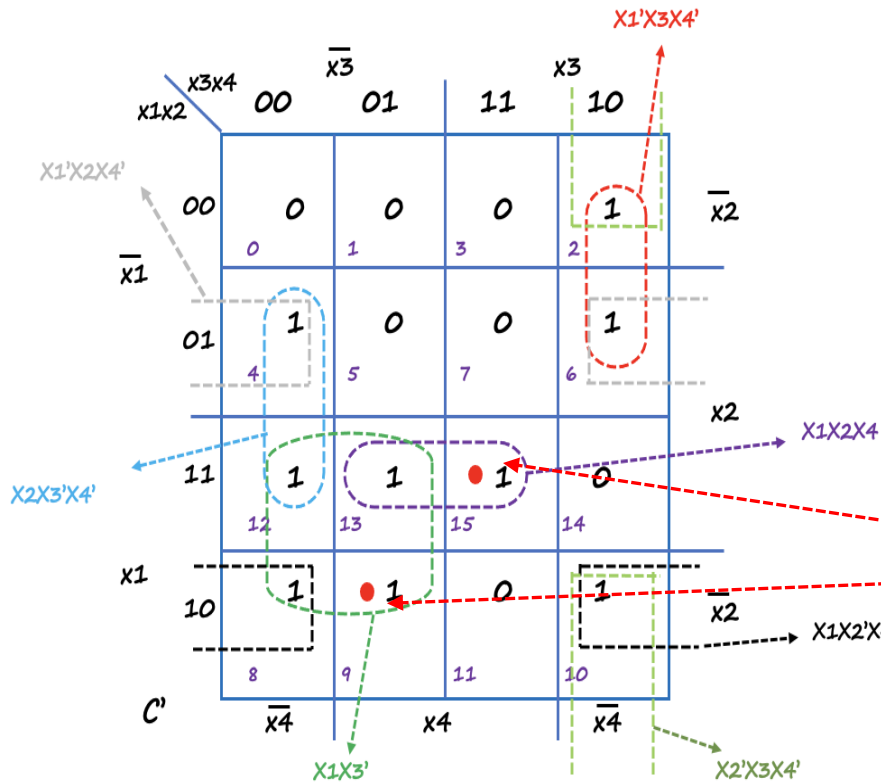
Bu kurallar peş peşe uygulanarak fonksiyonun doğru noktaları toplam maliyet en az olacak şekilde örtülmeye çalışılır.

Örnek: Aşağıda verilen fonksiyona ait seçenekler tablosunun indirgenmesi.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum m(2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15)$$

Maliyet hesabında her değişken 2 birim, her tümlleme işlemi 1 birim maliyete sahip olacaktır.

Asal çarpımlar kümesinin bulunması:



Tüm Asal Çarpımlar Kümesi:

x_1x_3' $x_2x_3'x_4'$ $x_1'x_2x_4'$ $x_1x_2x_4$ $x_1'x_3x_4'$ $x_2'x_3x_4'$ $x_1x_2'x_4'$

Sembol	A	B	C	D	E	F	G
Maliyet	5	8	8	6	8	8	8
Örtülen noktalar	8,9,12,13	4,12	4,6	13,15	2,6	2,10	8,10

Fonksiyonun "doğru" noktaları

	2	4	6	8	9	10	12	13	15	Maliyet
A				X	X		X	X		5
B		X					X			8
C		X	X							8
D								X	X	6
E	X		X							8
F	X					X				8
G				X		X				8

Örnek (devam):

Fonksiyonun "doğru" noktaları

	2	4	6	8	9	10	12	13	15	Ma.
√A				X	X		X	X		5
B		X					X			8
C		X	X							8
√D								X	X	6
E	X		X							8
F	X					X				8
G				X		X				8

1. Adım: Bu tabloda 9 ve 15 başlıca noktalardır. A ve D gerekli çarpımlar oldukları için onlara ait satır ve örttükleri sütunlar tablodan kaldırılır. Bu çarpımlar daha sonra sonucu oluştururken kullanılmak üzere işaretlenir.

Örnek (devam):

	2	4	6	10	Ma.
B		X			8
C		X	X		8
E	X		X		8
F	X			X	8
G				X	8

2. Adım: Bu tabloda C, B'yi örter. Maliyetleri aynı olduğu için örtülen satır (B) tablodan silinir. Benzer şekilde F, G'yi örter ve maliyetleri aynıdır. Bu nedenle G satırı tablodan silinir. Bu çarpımlar sonuç ifadede yer almayacaktır.

	2	4	6	10	Ma.
√C		X	X		8
E	X		X		8
√F	X			X	8

3. Adım: Bu tabloda 4 ve 10 başlıca noktalardır. Bu nedenle C ve F çarpımlarını almak gerekir. Bu iki asal çarpım seçildiğinde tüm noktalar örtülmüş olur..

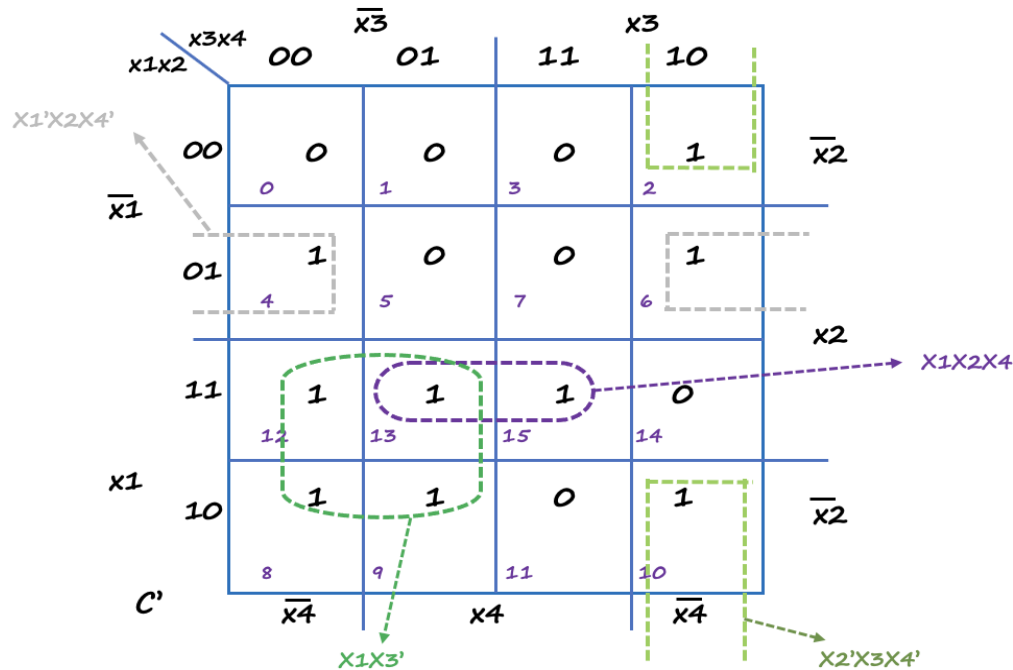
Sonuç: İşaretlenmiş olan asal çarpımlar fonksiyonun en ucuz ifadesini oluştururlar.

Seçilen asal çarpımlar: $A + D + C + F$

Toplam Maliyet = $5 + 6 + 8 + 8 = 27$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_3' + x_1 x_2 x_4 + x_1' x_2 x_4' + x_2' x_3 x_4'$$

Karnaugh diyagramı ile hangi asal çarpımların seçildiğini görebiliriz.



Bu seçimde tüm 1'ler örtülmeli ve bir fazlalık olmamalı. Seçilmiş olan asal çarpımlar bir yeterli küme oluşturmalı. Yani çarpımlardan biri kaldırıldığında tüm noktalar örtülememeli.

Belirsiz Değerlerin Seçilmesi:

Basitleştirme işleminde, belirsiz değerler en ucuz ifadeyi elde edecek şekilde gerektiğinde lojik 0, gerektiğinde lojik 1 olarak seçilebilirler.

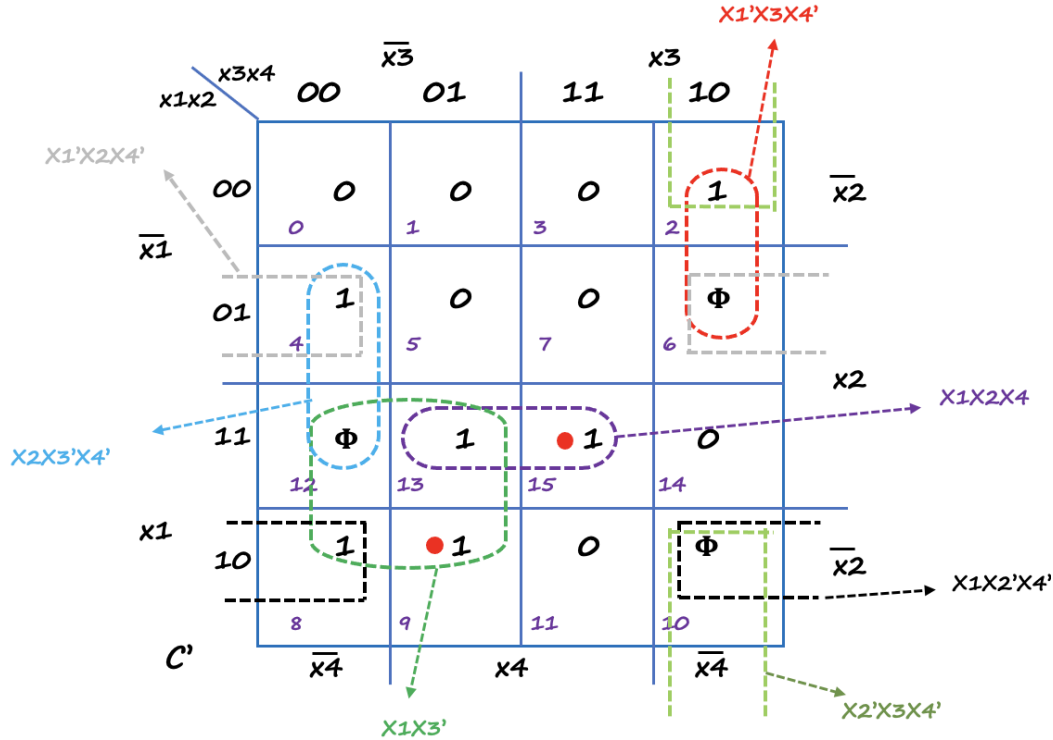
- Tüm asal çarpımlar kümesi bulunurken daha basit çarpımlar elde etmek için (Karnaugh diyagramında daha büyük gruplamalar yapabilmek için) $\Phi = 1$ olarak seçilir.
- Seçenekler tablosunda kapsanması gereken noktalar yazılırken $\Phi = 0$ olarak seçilir. Çünkü bu noktaların çarpımlar tarafından örtülmesine gerek yoktur.

Örnek: Aşağıda verilen tümüyle tanımlanmamış fonksiyonu en düşük maliyetle tasarlayınız.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum m(2, 4, 8, 9, 13, 15) + \sum \Phi(6, 10, 12)$$

Maliyet hesabında her değişken 2 birim, her tümlleme işlemi 1 birim maliyete sahip olacaktır.

Asal çarpımlar kümesinin bulunması:



Asal çarpımlar bulunurken Φ 'ler 1 olarak seçilir.

Tüm Asal Çarpımlar Kümesi:

$X1X3'$ $X2X3'X4'$ $X1'X2X4'$ $X1X2X4$ $X1'X3X4'$ $X2'X3X4'$ $X1X2'X4'$

Sembol	A	B	C	D	E	F	G
Maliyet	5	8	8	6	8	8	8
Örtülen noktalar	8,9,13	4	4	13,15	2	2	8

Fonksiyonun "doğru" noktaları

	2	4	8	9	13	15	Maliyet
A			X	X	X		5
B		X					8
C		X					8
D					X	X	6
E	X						8
F	X						8
G			X				8

Tablo oluşturulurken Φ 'ler 0 olarak seçilir.

Bu noktaların örtülmesine gerek olmadığından Φ 'ler seçenekler tablosunda yer almazlar.

Asal çarpımlar kümesini sadeleştirme:

	2	4	8	9	13	15	Cost
√A			*	*	*		5
B		X					8
C		X					8
√D					*	*	6
E	X						8
F	X						8
G			*				8

Adım 1: Bu tabloda 9 ve 15 başlıca noktalardır. A ve D gerekli çarpımlar oldukları için onlara ait satır ve örttükleri sütunlar tablodan kaldırılır. Bu çarpımlar daha sonra sonucu oluştururken kullanılmak üzere işaretlenir.

Asal çarpımlar kümesini sadeleştirme (devam):

	2	4	Cost
B		X	8
C		X	8
E	X		8
F	X		8

Adım 2: B ve C aynı noktaları örtmektedir ve maliyetleri eşittir. Bu nedenle bu iki çarpım arasında bir seçim yapmak mümkün değildir. Verilen maliyet kriterine göre herhangi biri seçilebilir. Aynı durum E ve F çarpımları için de geçerlidir. Buna göre fonksiyon aşağıdaki ifadelerden herhangi biri kullanılarak gerçekleştirilebilir:

$$f = A + D + B + E = x_1 x_3' + x_1 x_2 x_4 + x_2 x_3' x_4' + x_1' x_3 x_4'$$

$$f = A + D + B + F = x_1 x_3' + x_1 x_2 x_4 + x_2 x_3' x_4' + x_2' x_3 x_4'$$

$$f = A + D + C + E = x_1 x_3' + x_1 x_2 x_4 + x_1' x_2 x_4' + x_1' x_3 x_4'$$

$$f = A + D + C + F = x_1 x_3' + x_1 x_2 x_4 + x_1' x_2 x_4' + x_2' x_3 x_4'$$

Tüm tasarımların maliyeti eşittir (27).

Tüm Asal Çarpımlar Kümesinin Tablo Yöntemiyle (Quine-McCluskey) Bulunması

Karnaugh diyagramları görsel özellikleri nedeniyle az değişkenli fonksiyonlarla ilgili çalışmalarda kolaylık sağlarlar. Ancak değişken sayısı 5 ve daha fazla olduğunda Karnaugh diyagramlarını çizmek ve bitişiklik özelliğini kullanmak zorlaşır. Tablo yöntemi (Quine-McCluskey) ise sistematik bazı işlemlerin peş peşe tekrarlanmasından oluşmaktadır. Bu işlemleri elle yapmak fazla zaman alabilir, ancak söz konusu işlemleri bilgisayar programı ile gerçekleştirmek kolaydır.

Tablo (Quine-McCluskey) Yöntemi:

Hatırlanacağı gibi, asal çarpımları bulmak için “1” değeri üreten ve bitişik olan giriş kombinezonları (minterimler) gruplanmaya çalışılıyordu. Sadece bir değişkenin değiştiği (bitişik) olan kombinezonlar aynı gruba alınıyordu. Tablo yönteminde “1” değeri olan her kombinezon (minterim) diğer minterimler ile karşılaştırılır. Eğer iki kombinezon arasında sadece bir giriş (değişken) farklıysa o iki kombinezon gruplanır. Farklı olan değişken silinerek yeni terim elde edilir. Bu durum hiç gruplama yapılamayana kadar devam eder. Hiç bir gruba girmeyen terimler asal çarpımlardır.

Yöntem:

1. Adım: Tüm asal çarpımlar kümesinin bulunması

- Doğruluk tablosunda 1 üreten giriş kombinezonlarını belirleyin.
- Karşılaştırma kolaylığı sağlamak için içindeki 1'lerin sayısına göre kombinezonları kümeleyin. Örneğin; 1011 giriş kombinezonunda üç adet 1 vardır.
- Komşu kümelerdeki kombinezonları karşılaştırın. Tek girişin farklı olduğu kombinezonları gruplayıp yeni kombinezonlar oluşturun.
- Yeni kombinezonlarda değeri değişen giriş yer almayacaktır.
- Bir gruba girmiş olan kombinezonları işaretleyin.
- Yeni oluşan kombinezonlar üzerinde de aynı gruplama işlemlerini yeni gruplar oluşmayıncaya kadar sürdürün.
- Hiç bir gruba girmemiş olan kombinezonlar (işaretsizler) tüm asal çarpımlar kümesini oluştururlar.

2. Adım: En ucuz yeterli kümenin (minimal covering sum) bulunması

Tüm asal çarpımlar kümesi bulunduktan sonra sadeleştirme işlemi için yine seçenekler tablosu kullanılarak en ucuz yeterli küme bulunur.

Örnek: Aşağıda verilen fonksiyonun tüm asal çarpımlar kümesini Quine-McCluskey yöntemiyle bulunuz.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum m(0, 1, 2, 8, 10, 11, 14, 15)$$

Num.	X1	X2	X3	X4		Num.	X1	X2	X3	X4		Num.	X1	X2	X3	X4
0	0	0	0	0	✓	0, 1	0	0	0	-		0,2,8,10	-	0	-	0
1	0	0	0	1	✓	0, 2	0	0	-	0	✓	0,8,2,10	-	0	-	0
2	0	0	1	0	✓	0, 8	-	0	0	0	✓	10,11,14,15	1	-	1	-
8	1	0	0	0	✓	2,10	-	0	1	0	✓	10,14,11,15	1	-	1	-
10	1	0	1	0	✓	8,10	1	0	-	0	✓					
11	1	0	1	1	✓	10,11	1	0	1	-	✓					
14	1	1	1	0	✓	10,14	1	-	1	0	✓					
15	1	1	1	1	✓	11,15	1	-	1	1	✓					
						14, 15	1	1	1	-	✓					

Tüm asal çarpımlar kümesi (İşaretsiz olanlar): $x_1'x_2'x_3'$, $x_2'x_4'$, $x_1 x_3$

En ucuz çözümü elde etmek için bu aşamadan sonra seçenekler tablosu oluşturulur ve en ucuz yeterli küme bulunur.

Örnek: Aşağıda verilen fonksiyonun tüm asal çarpımlar kümesini Quine-McCluskey yöntemiyle bulunuz.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum m(3, 4, 7, 8, 9, 12, 13)$$

Num.	X1	X2	X3	X4		Num.	X1	X2	X3	X4		Num.	X1	X2	X3	X4
4	0	1	0	0	✓	4,12	-	1	0	0		8,9,12,13	1	-	0	-
8	1	0	0	0	✓	8,9	1	0	0	-	✓	8,12,9,13	1	-	0	-
3	0	0	1	1	✓	8,12	1	-	0	0	✓					
9	1	0	0	1	✓	3,7	0	-	1	1						
12	1	1	0	0	✓	9,13	1	-	0	1	✓					
7	0	1	1	1	✓	12, 13	1	1	0	-	✓					
13	1	1	0	1	✓											

Aynı olanları yazmaya gerek yok

Tüm asal çarpımlar kümesi (işaretsiz olanlar): $x_2 x_3'x_4'$, $x_1'x_3x_4$, $x_1 x_3'$

En ucuz çözümü elde etmek için bu aşamadan sonra seçenekler tablosu oluşturulur ve en ucuz yeterli küme bulunur.

Örnek: Aşağıda verilen fonksiyonun tüm asal çarpımlar kümesini Quine-McCluskey yöntemiyle bulunuz.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum m(2, 4, 8, 9, 13, 15) + \sum \Phi(6, 10, 12)$$

Maliyet hesabında her değişken 2 birim, her tümlleme işlemi 1 birim maliyete sahip olacaktır.

Num.	X1	X2	X3	X4		Num.	X1	X2	X3	X4		Num.	X1	X2	X3	X4
2	0	0	1	0	✓	2, 6	0	-	1	0		8,9,12,13	1	-	0	-
4	0	1	0	0	✓	2, 10	-	0	1	0						
8	1	0	0	0	✓	4, 6	0	1	-	0						
6	0	1	1	0	✓	4,12	-	1	0	0						
9	1	0	0	1	✓	8,9	1	0	0	-	✓					
10	1	0	1	0	✓	8,10	1	0	-	0						
12	1	1	0	0	✓	8,12	1	-	0	0	✓					
13	1	1	0	1	✓	9,13	1	-	0	1	✓					
15	1	1	1	1	✓	12,13	1	1	0	-	✓					
						13, 15	1	1	-	1						

Tüm asal çarpımlar kümesi (işaretsiz olanlar): $x_1'x_3x_4'$, $x_2'x_3x_4'$, $x_1'x_2x_4'$, $x_2x_3'x_4'$, $x_1x_2'x_4'$, $x_1x_2x_4$, x_1x_3'

Tüm Asal Çarpımlar Kümesi:

$X1X3'$ $X2X3'X4'$ $X1'X2X4'$ $X1X2X4$ $X1'X3X4'$ $X2'X3X4'$ $X1X2'X4'$

Sembol	A	B	C	D	E	F	G
Maliyet	5	8	8	6	8	8	8
Örtülen noktalar	8,9,13	4	4	13,15	2	2	8

Fonksiyonun "doğru" noktaları

	2	4	8	9	13	15	Maliyet
A			X	X	X		5
B		X					8
C		X					8
D					X	X	6
E	X						8
F	X						8
G			X				8

Asal çarpımlar tablosunu oluştururken belirsiz değerlerin yani Φ 'lerin '0' olduğu varsayılır.

Belirsiz değerlere sahip noktaların örtülmesine gerek olmadığı için bu noktalar tabloya yerleştirilmemiştir.

Petrick Yöntemi:

Petrick Yöntemi, verilen bir asal çarpanlar tablosunda fonksiyonu sadeleştirmek için Boole cebrinde kullanılan aksiyom ve teoremleri kullanır.

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonun asal çarpım tablosu verildiğine göre fonksiyonu sadeleştiriniz.

$$F(a,b,c)=a'b'c + a'bc' + a'bc + ab'c' + ab'c + abc'$$

Fonksiyonun "doğru" noktaları

	1	2	3	4	5	6	Cost
A ($a'c$)	x		X				5
B ($b'c$)	X				X		5
C ($a'b$)		X	X				5
D (bc')		X				X	5
E (ab')				X	X		5
F (ac')				X		X	5

Başlıca nokta, örtüşen satır ve sütün olmadığına dikkat ediniz.

Petrick Yöntemi (devam)

Petrick yönteminde tüm minterimlerin kapsanması gerektiğinden dolayı, aşağıdaki fonksiyon doğru olmalıdır.

$$P = (A + B).(C + D).(A + C).(E + F).(B + E).(D + F) = 1$$

$$(A + B).(A + C) = A + B.C$$

$$(E + F).(B + E) = A + B.C$$

$$(C + D).(D + F) = D + C.F$$

$$P = (A + BC).(E + FB).(D + CF) = (AE + AFB + BCE + BCF).(D + CF)$$

$$P = AED + ABFD + BCED + BCFD + AECF + AFBC + BCEF + BCF$$

Yukarıda belirtilen fonksiyonun her bir terimi, fonksiyonu sadeleştirmek için alınması gereken terimleri gösterir. En düşük maliyet faktörüne sahip terimler 'AED' ve 'BCF' olmaktadır.

Aynı (en düşük) maliyete sahip aşağıdaki ifadelerden herhangi biri kullanılarak fonksiyonun sadeleştirilmesi gerçekleştirilmektedir.

$$F(a,b,c) = a'c + ab' + bc'$$

$$F(a,b,c) = b'c + a'b + ac'$$

Her iki tasarımın maliyeti eşittir (15).

KAZALAR

Bir giriş değerinin, farklı bir kaç yoldan çıkışı etkilemesi nedeniyle çıkışta beklenmedik değer değişiklikleri (kazalar) oluşur.

Üç tür kaza (hazard) vardır:

a) **Statik 0**: Çıkış lojik 0'da kalması gerekirken kısa bir süre "1" olup tekrar 0'a iner. Statik 0 kaza, toplamların çarpımı şeklinde gerçekleşen devrelerde oluşur.

b) **Statik 1**: Çıkış lojik 1'de kalması gerekirken kısa bir süre "0" olup tekrar 1'e çıkar. Statik 1 kaza, çarpımların toplamı şeklinde gerçekleşen devrelerde oluşur.

c) **Dinamik**: Çıkış bir kez değer değiştirmesi gerekirken bir kaç defa değer değiştirir.



Statik 0

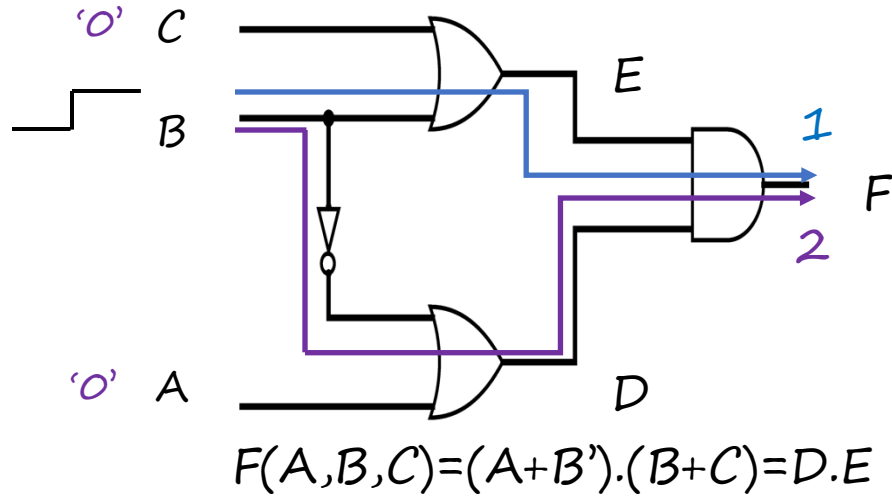


Statik 1



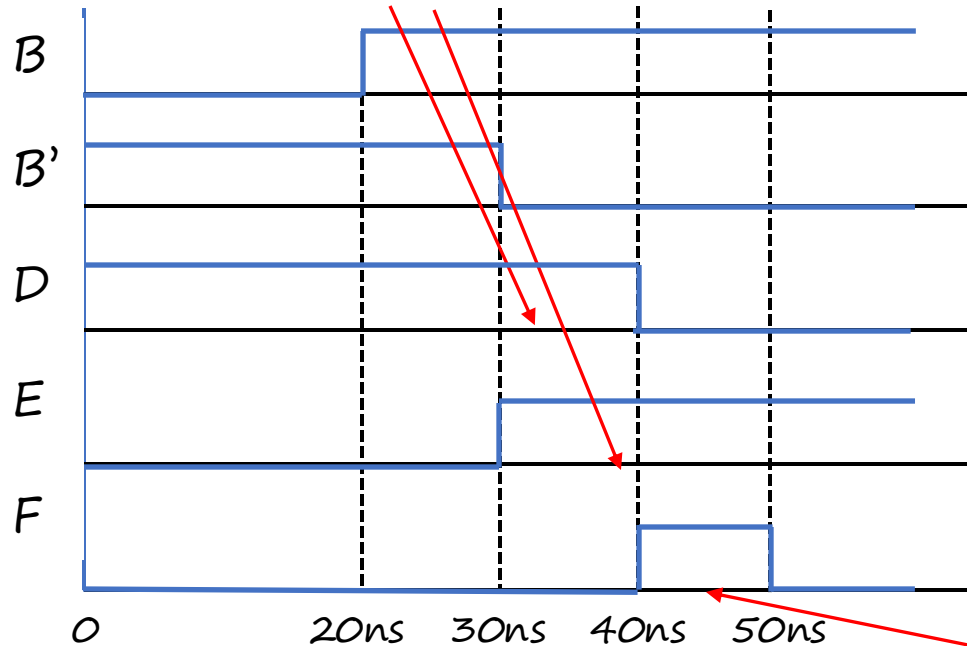
Dinamik

Statik 0 Kazası



Bu devrenin doğruluk tablosu incelendiğinde $A=0$, $B=0$, $C=0$ girişi için $F=0$ olduğu görülür. Bu durumdayken $B=1$ olursa lojik ifadeye göre devrenin çıkışının $F=0$ olarak kalması gerekir. Ancak 1. yol, 2. yola göre gecikmeler açısından daha "kısa" olduğundan F çıkışında anlık bir değişim (Statik 0 kaza) oluşur.

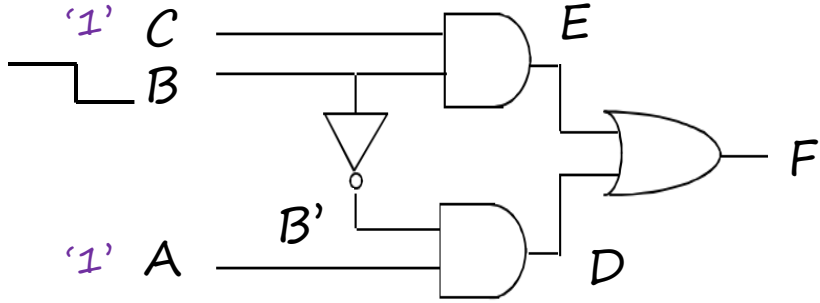
D ve E çıkışları anlık '1' olur.



Kapılar için yayılma gecikmesi 10ns olarak alındı.

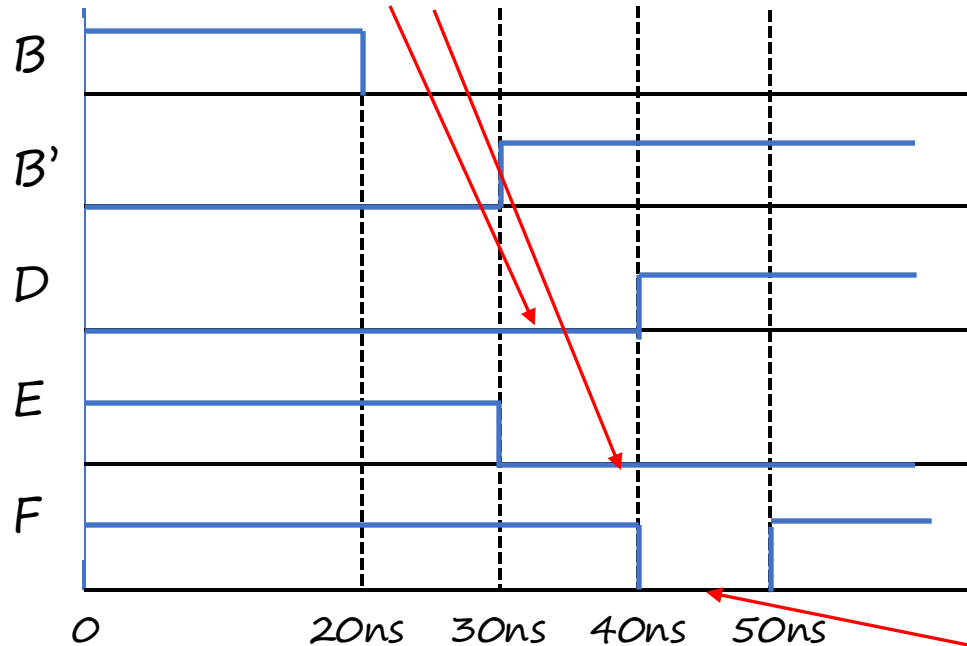
Statik 0 kazası

Statik 1 Kazası



$$F(A,B,C) = AB' + BC$$

D ve E çıkışları anlık sıfır olur.



Kapılar için yayılma gecikmesi 10ns olarak alındı.

Statik 1 kazası

Çarpımların toplamı şeklinde gerçekleştirilen yandaki devrenin doğruluk tablosu incelendiğinde $A=1$, $B=1$, $C=1$ girişi için $F=1$ olduğu görülür. Bu durumdayken $B=1$ 'den 0 'a inerse devrenin çıkışının $F=1$ olarak kalması gerekir. Ancak F çıkışında anlık bir değişim (statik 1 kaza) oluşur.

Statik Kazaların Önlenmesi

Bir devrede kaza tehlikesi olup olmadığı Karnaugh diyagramından anlaşılabilir. Eğer iki komşu '1' aynı grup tarafından kapsanmıyorsa, bu iki komşu '1' arasındaki geçiş için bir statik kaza vardır. n değişkenli bir haritada bir değişken değişiklik gösterdiğinde ve diğer $n-1$ değişkenden bir değişiklik olmaması durumunda bu geçiş meydana gelmektedir (komşu 1'ler nedeniyle). Statik hatayı önlemek için fonksiyona bu tür komşu 1'leri aynı grup içinde gösteren fazladan bir grup eklenir.

A \ BC	$\bar{C}$		C	
	00	01	11	10
$\bar{A}$	0	1	0	0
A	0	1	1	1

0 1 2 3 4 5 6 7

$\bar{B}$ B

$$F = AB + B'C$$

Örneğin yandaki haritada B'deki değişim ($1 \rightarrow 0$) bir asal çarpımdan diğerine geçilmesine neden olmaktadır. Böyle geçişler gecikmelerden dolayı kazalara (statik '1') neden olurlar. Eğer kazalar kesinlikle önlenmek isteniyorsa devrenin maliyeti arttırılarak, aralarında geçiş olan iki çarpımın konsensüsü de tasarıma eklenir.

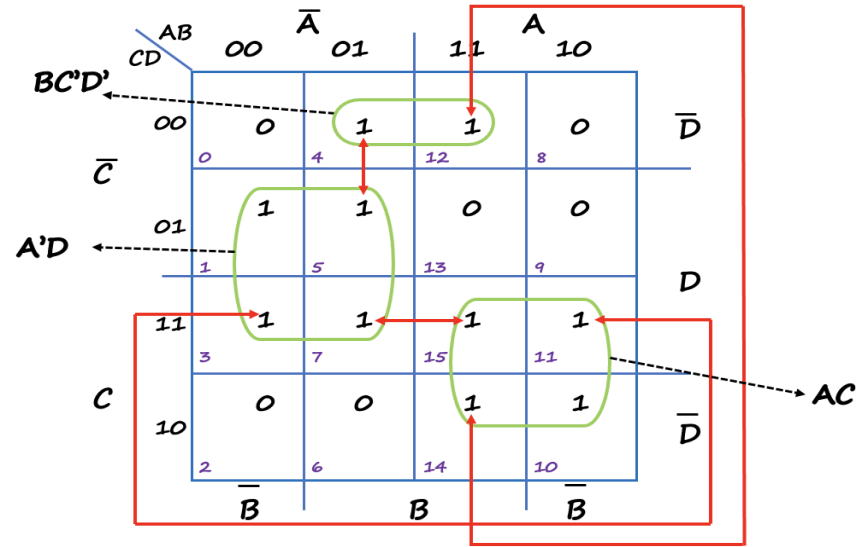
A \ BC	$\bar{C}$		C	
	00	01	11	10
$\bar{A}$	0	1	0	0
A	0	1	1	1

0 1 2 3 4 5 6 7

$\bar{B}$ B

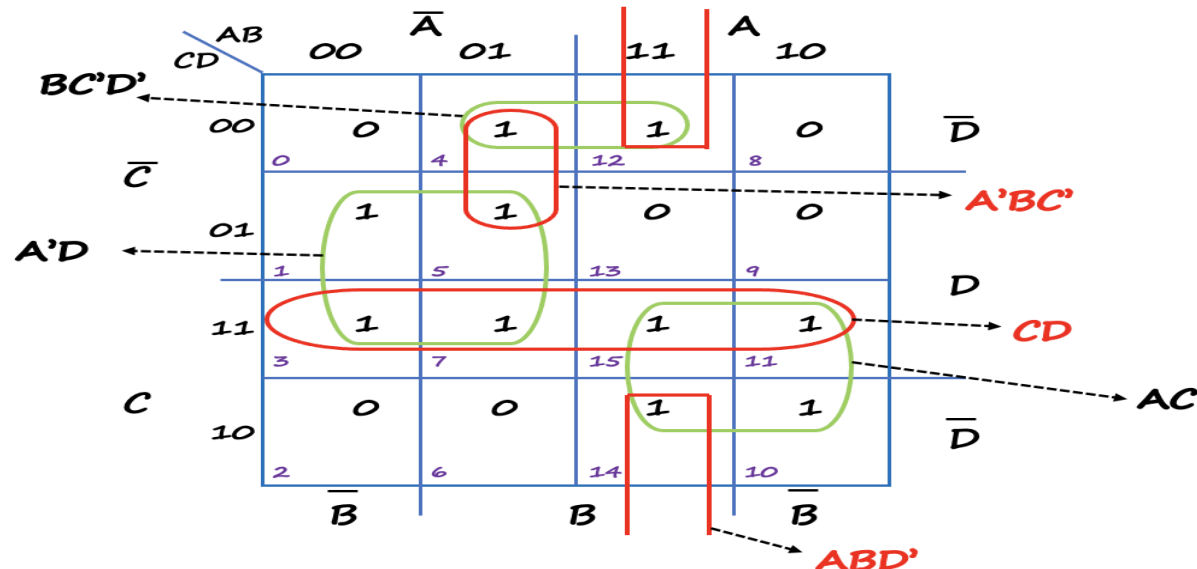
$$F = AB + B'C + AC$$

Örnek: Aşağıda verilen haritada statik '1' hatasını önleyecek şekilde fonksiyonu sadeleştiriniz.



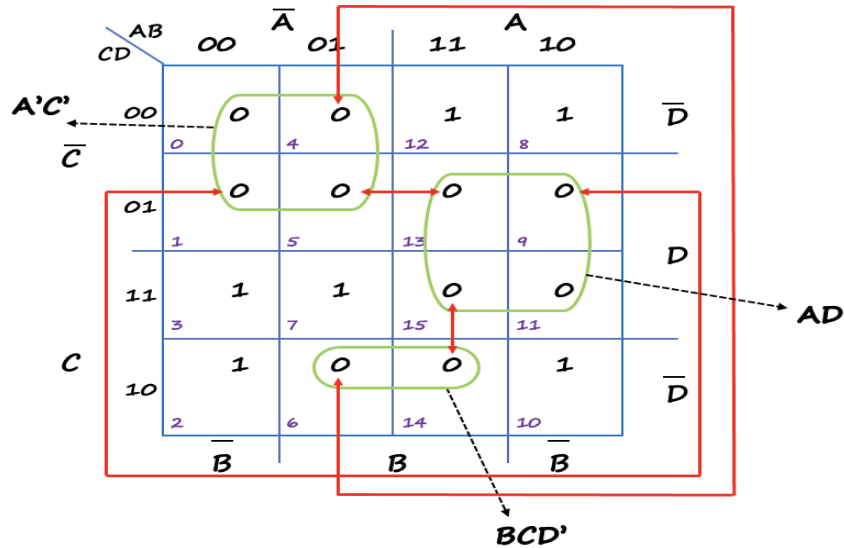
$$F(A,B,C,D)=AC+A'D+BC'D'$$

Fonksiyona fazladan 3 grup ekleyerek statik '1' hatası önlenir.



$$F(A,B,C,D)=AC+A'D+BC'D'+CD+A'BC'+ABD'$$

Örnek: Aşağıda verilen haritada statik '0' hatasını önleyecek şekilde fonksiyonu sadeleştiriniz.



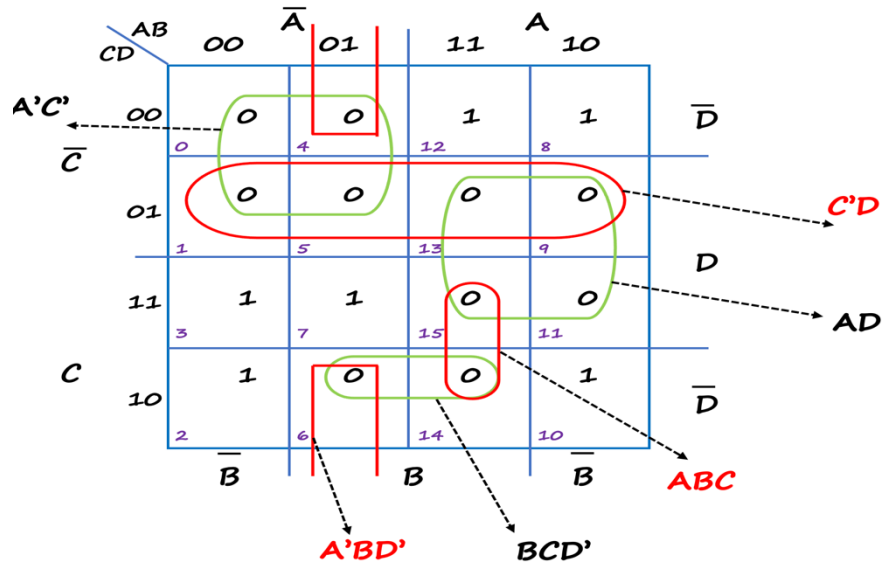
$$F' = A'C' + AD + BCD'$$

De Morgan:

$$\underline{\underline{F = A'C' + AD + BCD'}}$$

$$F = (A+C).(A'+D').(B'+C'+D)$$

Fonksiyona fazladan 3 grup ekleyerek statik '0' hatası önlenir.



$$F = (A+C).(A'+D').(B'+C'+D).(C+D').(A+B'+D).(A'+B'+C')$$

Tek ve Çift Fonksiyonlar

Bir K-haritasındaki tek ve çift fonksiyonlar “dama tahtası” desenleri oluşturur. İçerisinde tek sayıda “1” olan 2^{n-1} adet minterimden oluşan fonksiyon “tek fonksiyon” olarak isimlendirilir. İçerisinde çift sayıda “1” olan 2^{n-1} adet minterimden oluşan fonksiyon “çift fonksiyon” olarak isimlendirilir.

B \ A	$\bar{A}$	A
	0	1
$\bar{B}$ 0	0	1
B 1	1	0

$$F(A,B) = \sum m(1,2) = A'B + AB' = A \oplus B$$

Tek fonksiyon

B \ A	$\bar{A}$	A
	0	1
$\bar{B}$ 0	1	0
B 1	0	1

$$F(A,B) = \sum m(0,3) = A'B' + AB = (A \oplus B)' = A \odot B$$

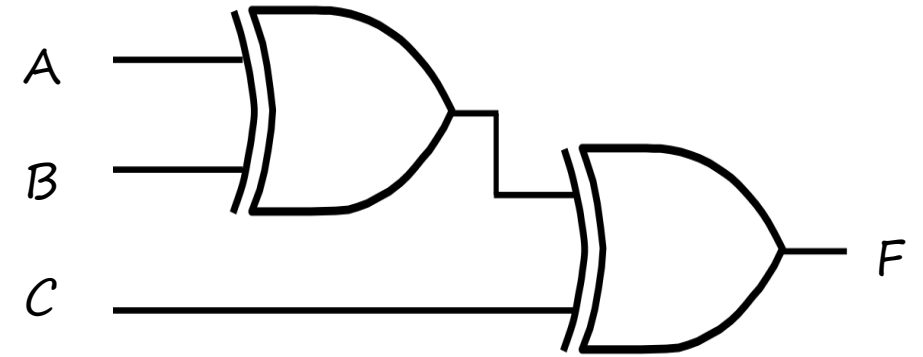
Çift fonksiyon

3-girişli Tek Fonksiyon:

Tek fonksiyon:

A \ BC	$\overline{C}$		C	
	00	01	11	10
$\overline{A}$ 0	0 0	1 1	0 3	1 2
A 1	1 4	0 5	1 7	0 6
$\overline{B}$		B		

Devre:



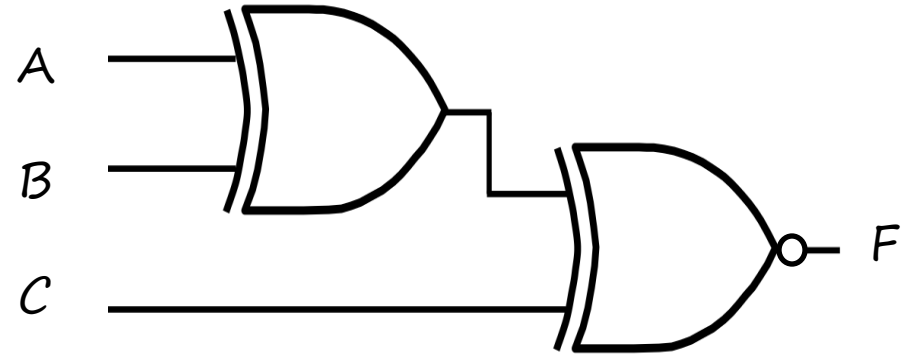
$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= \sum m(1,2,4,7) = \textcolor{blue}{A'B'C} + \textcolor{red}{A'BC'} + AB'C' + \textcolor{violet}{ABC} \\ &= (AB' + A'B)C' + (AB + A'B')C = (A \oplus B)C' + (A \oplus B)'C = A \oplus B \oplus C \end{aligned}$$

3-girişli Çift Fonksiyon

Çift fonksiyon:

A \ BC	$\bar{C}$		C	
	00	01	11	10
$\bar{A}$ 0	0 ₀ 1 ₀	1 ₁ 0 ₁	3 ₃ 1 ₃	2 ₂ 0 ₂
A 1	4 ₄ 0 ₄	5 ₅ 1 ₅	7 ₇ 0 ₇	6 ₆ 1 ₆
	$\bar{B}$		B	

Devre:



$$\begin{aligned}
 F(A,B,C) &= \sum m(0,3,5,6) = \bar{A}'\bar{B}'C' + A'BC + AB'C + ABC' \\
 &= (\bar{A}'\bar{B}' + AB)C' + (A'B + AB')C = (A \oplus B)'C' + (A \oplus B)C = (A \oplus B \oplus C)' = A \odot B \odot C
 \end{aligned}$$

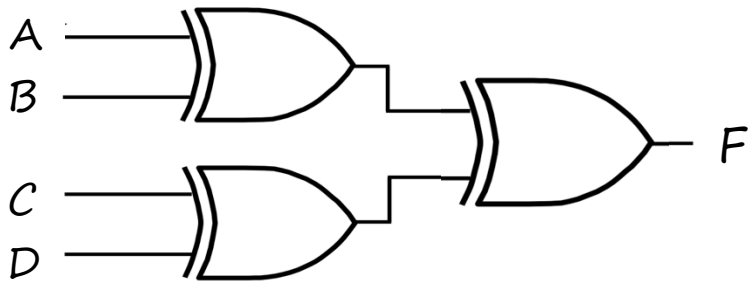
4-girişli Tek ve Çift Fonksiyon Örnekleri:

Tek fonksiyon:

AB		$\bar{A}$		A		
CD		00	01	11	10	
$\bar{C}$	00	0	1	0	1	$\bar{D}$
	01	1	0	1	0	D
C	11	0	1	0	1	$\bar{D}$
	10	1	0	1	0	D
		$\bar{B}$	B	B	$\bar{B}$	

$$F(A,B,C,D) = A \oplus B \oplus C \oplus D$$

Devre:



Çift fonksiyon:

AB		$\bar{A}$		A		
CD		00	01	11	10	
$\bar{C}$	00	1	0	1	0	$\bar{D}$
	01	0	1	0	1	D
C	11	1	0	1	0	$\bar{D}$
	10	0	1	0	1	D
		$\bar{B}$	B	B	$\bar{B}$	

$$F(A,B,C,D) = (A \oplus B \oplus C \oplus D)' = A \odot B \odot C \odot D$$

Devre:

