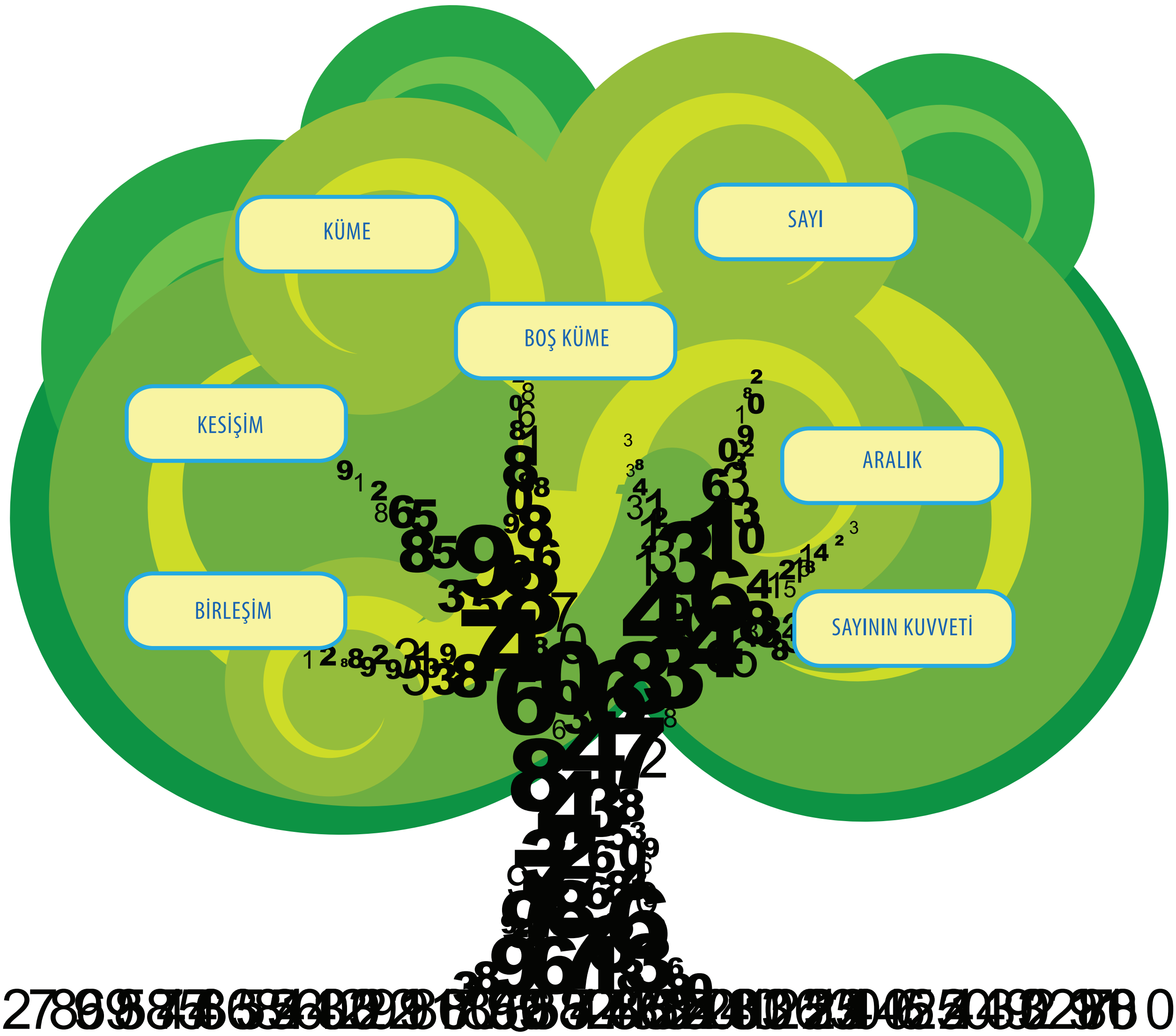
Kümeler ve Sayılar

Didim Altınkum sahilindeki kum tanelerinin sayısı nedir?

1. ÜNİTE

GENEL MATEMATİK



Giriş

Merhaba arkadaşlar... Matematik ile ilgili bazı konuları gözden geçirmek amacıyla bundan böyle burada buluşacağız.

İlköğretimde matematik, lisede matematik, burada da matematik... Bir türlü yakamızı kurtaramadık Mete Hocam. Nedense kendisiyle aramız pek iyi değil.

Ben de Gökçe gibi düşünüyorum. Oldum olası matematik dersini sevemedim.

Matematiğin zor olduğunu düşünmenizi anlıyorum. Matematik gerçekten uçsuz, bucaksız bir konudur. İnsanoğlunun yeryüzündeki en büyük eserlerinden biri, binlerce yıllık bilgi birikimi ve deneyimin en saf halidir.

Ben matematiği bir tür şifreli konuşma gibi görmüşümdür. Galileo da "Evrenin dili matematiktir" demiş.

Evet Engin, gerçekten matematiğin bir dil olduğunu da düşünebiliriz. Hem de, hemen hemen herkesin, şu ya da bu şekilde bildiği, ortak bir dildir. Biz de, bir anlamda bu dilin bazı temel dilbilgisi kurallarını, olmazsa olmaz kelimelerini öğrenmek amacıyla buradayız.

Ben matematiğin hayatın her alanında olduğunu düşünüyorum.

Evet Zeynep matematiğin ne kadar önemli, ne kadar hayati olduğunu kabul ederiz ama pek az insan onun taşıdığı güzelliğin, derinliğin bilincine varabilir.

Güzel mi? Kusura bakmayın hocam ama bir güzelliği olduğunu zannetmiyorum. Aksine, matematiği bir tür kâbus gibi görüyorum. Matematik ile ilgili en basit sorularda bile kalakalıyorum.

Doğrusunu söylemek gerekirse, ben de çoğunluğun matematiğe yaklaşımının böyle olduğu düşüncesindeyim. Ama kendinize haksızlık etmeyin. Aslında düşündüğünüz kadar da bilgisiz, hiçbir şey yapamaz durumda değilsiniz. Örneğin kümeler konusunu ele alalım. Küme dediğimde aklında biraz da olsun birşey canlanmıyor mu Selçuk?

Hımm... Bunu cevaplayabilirim. Nesnelerin topluluğuna küme diyoruz.

Hemen bir örnek vereyim. Selçuk, Engin, Zeynep ve ben “matematiği anlamayan öğrenciler” kümesini oluşturuyoruz.

Bu söylediğin bir küme oluşturur mu Gökçe? Ben bu kümede olduğumu düşünüyor muyum acaba? Hadi bu kümede olduğumu kabul ettim diyelim. Matematiği anlamayan tek öğrenciler bizler miyiz?

Zeynep doğru bir belirlemede bulundu Gökçe... Küme kavramını ifade ederken topluluğun “iyi tanımlanmış” nesnelerden oluşmasına dikkat etmeliyiz.

Gördünüz mü hocam gene olmadı, bu soruyu bile doğru dürüst cevaplayamadım.

Hemen moralini bozmak yok Selçuk. Dediğim gibi biraz sabır gerekecek. Daha ilk hatamızda vazgeçmeyeceğiz.

Burada “iyi tanımlı” ile anlatmak istediğimiz, bir nesnenin bu kümeye ait olup olmadığını kesin olarak ayırt etmemiz için yeterli bilginin verilmiş olmasıdır.

Pınar Hoca haklı arkadaşlar... “Matematiği anlamayan öğrenciler” bir küme oluşturur mu? Kime matematikten anlıyor, kime anlamıyor diyeceğiz? Gökçe’ye göre “matematiği anlamayan öğrenciler”, Zeynep’e göre de “matematiği anlamayan öğrenciler” midir? Bunu ayırt etmek hiç de kolay değil. Böyle bir topluluk oluşturulurken büyük olasılıkla farklı kişilerce farklı seçimler olacaktır. Bu nedenle bir kümeyi belirlerken, bir nesnenin o kümeye ait olup olmadığı, herkes tarafından net olarak anlaşılacak biçimde ifade edilmelidir.

Peki bu “iyi tanımlı” olma işini nasıl çözeceğiz? Söylediklerinizden sonra bana “iyi tanımlı” nesneler ifade etmek oldukça zor göründü Mete Hocam...

Kümelerimizi, ne olduğu hakkında kimsenin şüphe duymayacağı nesnelerle oluşturmak işimizi kolaylaştıracaktır. Burada genel olarak sayı kümeleri ile uğraşacağımız için bu konuda bir endişeniz olmasın.

Eğer a nesnesi, A kümesinin elemanı ise

$$a \in A$$

ve b nesnesi, A kümesinin elemanı değilse

$$b \notin A$$

olarak gösterilir.

Küme kavramını ifade ettiğimize göre kümeler ile ilgili bir takım temel bilgileri artık ifade edebiliriz. Anlaşma kolaylığı açısından kümeleri $A, B, C, \ldots$ gibi büyük harflerle gösteriyoruz. Bir kümeyi oluşturan nesnelere kümenin elemanı diyoruz ve kümenin elemanlarını da $a, b, c, \ldots$ gibi küçük harflerle gösteriyoruz. Eğer a nesnesi A kümesinin bir elemanıysa bu durumu $a \in A$, eğer b nesnesi A kümesinin elemanı değilse bu durumu $b \notin A$ olarak gösteriyoruz.

Kümeleri ifade etmek için bir takım gösterimler kullanıyorduk. Mesela, elemanlarını tek tek yazarak bir küme verebiliriz değil mi?

Evet Engin haklısın. Bir kümeyi belirtmenin bir yolu elemanlarını

$$\{ \qquad \}$$

biçiminde iki parantez arasına, aralarına virgül koyarak tek tek ifade etmektir. Bu gösterime “liste gösterimi” diyeceğiz. Örneğin bir, iki, üç ve dört sayılarından oluşan bir küme $\{1, 2, 3, 4\}$ biçiminde gösterilir.

$\{a, b, c, d\}$ de bir küme örneği olabilir değil mi?

Elbette, neden olmasın.

Peki eleman sayısı çok fazla ise ne olacak? Örneğin 100’den küçük doğal sayılar kümesini de yine tek tek mi yazacağız?

Elbette eleman sayısı fazla olan bir kümeyi ifade etmek için bu yöntemi kullanmak pek akıllıca olmaz. Her bir elemanı tek tek yazmak yerine bu kümeyi $\{1, 2, \ldots, 99\}$ biçiminde ifade edebiliriz.

Aradaki sayılara ne oldu, uçtular mı?

Burada ilk birkaç eleman ile kümenin hangi elemanlardan oluştuğu anlaşılıyorsa geri kalan elemanları tek tek yazmak yerine "…" (üç nokta) ile ifade ediyoruz. Kümenin elemanları bir yerde son buluyorsa, son bir ya da birkaç elemanı da yazıyoruz.

Bu yöntemi bir adım daha geliştirerek bu kümeyi

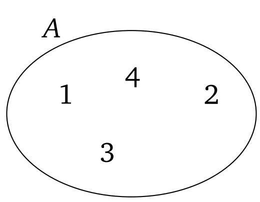
$$\{x \mid x \text{ sayısı 100'den küçük doğal sayı}\}$$

biçiminde de ifade edebiliriz. Bu şekilde, kümeyi oluşturan elemanları tek tek saymak yerine sağladıkları özelliklerle bu kümeye dahil ediyoruz. Bu gösterime de "ortak özellik gösterimi" veya "kapalı gösterim" diyeceğiz.

Bu son söylediğiniz en iyisi sanki Pınar Hocam. Bir de yuvarlaklar çizip, kümenin elemanlarını bu yuvarlağın içine yazıyorduk.

Çok haklısın Gökçe. Kümeleri göstermek için bir başka yöntem de küme elemanlarını düzlemde daire, elips, dikdörtgen vs. biçiminde bölgeler içine yazmaktır. Bu yönteme kümelerin "Venn şeması ile gösterimi" denir.

Örneğin $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesini Venn şeması ile Şekil 1.1'deki gibi gösterebiliriz. Sözkonusu problemde birden çok küme ile ilgileniliyorsa Venn şeması kullanılarak kümeler arasındaki ilişkiyi görmek kolaylaşmaktadır.



Şekil 1.1: A kümesinin Venn şeması ile gösterimi.

Küme İşlemleri

Tanım A ve B iki küme olsun. Her $x \in A$ için $x \in B$ ise A kümesine B kümesinin altkümesidir denir ve

$$A \subset B$$

ile gösterilir.

Şimdi kümelerle ilgili bazı temel tanımları ifade edelim. Elimizde A ve B gibi iki küme olsun. Eğer A kümesinin her elemanı, B'nin de bir elemanı ise A kümesine B kümesinin altkümesidir diyoruz ve bu durumu

$$A \subset B$$

olarak gösteriyoruz.

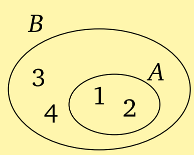
Peki

$$A = \{1, 2\}$$

ve

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

ise A kümesi...



Şekil 1.2: $A = \{1, 2\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ise $A \subset B$ olur.

A kümesi B kümesinin altkümesidir, değil mi?

Evet Selçuk, haklısın. Az önce Pınar Hoca'nın söylediği gibi, bir kümeye ait her eleman bir başka kümeye de ait ise ilk küme, ikincinin altkümesidir. Burada hem 1, hem de 2, B kümesinin de elemanı olduğu için $A \subset B$ olur.

$A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{3, 2, 1\}$ kümeleri için ne diyebilirsiniz arkadaşlar?

A kümesi B kümesinin altkümesidir. B kümesi de A kümesinin altkümesidir.

Doğru söylüyorsun Zeynep. Peki $C = \{1, 1, 1\}$ ve $D = \{1\}$ kümeleri için ne dersiniz?

Burada da benzer durum var. 1 hem C kümesinin, hem de D kümesinin elemanı, başka eleman da yok.

İlk örnekteki A ve B kümeleri ve ikinci örnekteki C ve D kümeleri eşittir.

Tanım Eğer $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise A ve B kümeleri eşittir denir ve

$$A = B$$

olarak gösterilir.

İlk verdiğiniz örnekte elemanların yazılış sırası farklıydı, ikinci örnekte de bir eleman birden fazla yazılmıştı. O halde bir kümenin elemanlarının yazılışında sıranın değiştirilmesi ya da elemanların tekrar edilmesi kümeyi değiştirmiyor.

Tebrikler Engin, haklısın. Şunu da ekleyelim, A ve B kümelerinin eşit olmaması durumu da $A \neq B$ olarak gösterilir.

Örnek “LEBLEBİ” kelimesinin harfleri kümesi

{B, E, İ, L}

olur.
Bu küme aynı zamanda “BELLİ” kelimesinin harfleri kümesine de eşittir.

Ayrıca $A \subset B$ ve $A \neq B$ ise A kümesi B kümesinin öz altkümesidir denir.

Mesela az önce Mete Hoca’nın verdiği örnekteki $A = \{1,2\}$ kümesi $B = \{1,2,3,4\}$ kümesinin öz altkümesidir.

Çok güzel Selçuk, tebrik ediyorum. Peki arkadaşlar, $A = \{1,2\}$ kümesinin tüm altkümelerini sayabilir misiniz?

Ben sayayım hocam... $\{1\}$, $\{2\}$... Galiba bu kadar...

$\{1,2\}$ kümesi de A kümesinin altkümesidir. A kümesinden herhangi bir eleman seçtiğimizde bu eleman yine A kümesine ait olduğundan A kümesi kendisinin altkümesidir.

A herhangi bir küme olmak üzere

$$A \subset A$$

olur.

Doğru söylüyorsun Zeynep. Bunu daha önceden farketmemiştim ama $A = \{1,2\}$ kümesi kendisinin altkümesi oldu. O zaman cevabımı $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$ olarak değiştiriyorum.

Evet, A kümesinin altkümeleri arasında $\{1,2\}$ kümesi de olmalı. Ama sorunun cevabını tamamlayamadınız. Bir altküme daha var.

Hımm, başka ne kaldı ki? Ben geride kalan birşey göremiyorum.

Peki şöyle sorayım. Hiç elemanı olmayan bir kümeyi nasıl ifade ederiz? Hatırlayanınız var mı?

Boş küme diyorduk.

Tanım Hiçbir elemanı olmayan kümeye boş küme denir. Boş küme

$$\emptyset$$

simgesiyle gösterilir.

Haklısın Engin. Hiç elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve

$$\emptyset$$

simgesiyle gösterilir. İşte unuttuğunuzu söylediğim küme de boş küme idi. Çünkü boş küme her kümenin altkümesidir.

A herhangi bir küme olmak üzere

$$\emptyset \subset A$$

olur.

O nedenmiş?

Hımm... Böyle olmasaydı, yani boş küme bir A kümesinin altkümesi olmasaydı, boş kümede A kümesine ait olmayan bir eleman olduğunu ifade etmiş olurduk. Ancak boş küme hiç eleman içermediğine göre bu iddiamız anlamsız olurdu.

$A = \{1,2\}$ kümesinin tüm altkümeleri

$$\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,2\}$$

olur.

O halde $A = \{1,2\}$ kümesinin tüm altkümeleri de

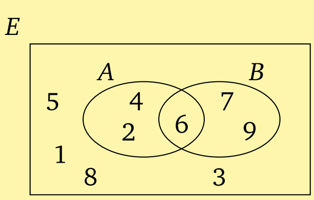
$$\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,2\}$$

olur. Sanıyorum sonunda doğru cevabı verebildim.

Evet Engin, sorunun doğru cevabı bu olmalıydı.

Bu konuyu kapatmadan önce evrensel kümenin de ne demek olduğunu hatırlayalım. İlgilendiğimiz problemde verilen kümeleri, uygun bir kümenin altkümelerinden seçmek kimi durumlarda işimizi kolaylaştırır. Herhangi bir problemle ilişkili tüm kümeleri kapsayan böyle bir kümeye “evrensel küme” diyoruz. Evrensel küme genel olarak E ile gösterilir. Az önce söylediğim gibi evrensel küme seçilen probleme göre değişebilen bir kümedir. Örneğin yalnız 10’dan küçük doğal sayıları kullanacaksak $E = \{1,2,\dots,9\}$ olarak belirlemek yeterlidir.

$E = \{1,2,\dots,9\}$, $A = \{2,4,6\}$ ve $B = \{6,7,9\}$ ise Venn şeması şöyle olur:



Bu konuda epey çok şey bildiğinizi gösterdiniz. Şimdi de küme işlemleri ile ilgili bir takım konuları gözden geçirelim.

Kümelerin birleşimi, kesişimi gibi işlemleri mi kastediyorsunuz? Birleşimi ben söyleyeyim. Verilen kümelere ait elemanların tümünün oluşturduğu kümedir.

Tanım A ve B kümelerinden en az birine ait elemanların oluşturduğu kümeye A ve B kümelerinin birleşimi denir ve

$$A \cup B$$

ile gösterilir. Bir başka deyişle

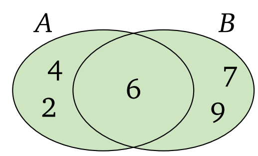
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

olur.

Evet Engin, A ve B kümelerinden en az birine ait elemanların oluşturduğu kümeye "A ve B kümelerinin birleşimi" diyoruz ve bu kümeyi

$$A \cup B$$

ile gösteriyoruz. Örneğin $A = \{2,4,6\}$ ve $B = \{6,7,9\}$ için $A \cup B = \{2,4,6,7,9\}$ olur.



Şekil 1.3: $A \cup B = \{2,4,6,7,9\}$

Keyfi A, B, C kümeleri için birleşim ile ilgili şu özellikler geçerlidir.

- $A \cup B = B \cup A$ **(Değişme özelliği)**
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ **(Birleşme özelliği)**
- $A \cup \emptyset = A$ ve $A \cup E = E$
- $A \subset A \cup B$ ve $B \subset A \cup B$

Boş küme eleman içermediğinden A kümesi ile birleşimi A olacaktır. Evrensel küme, ilgili probleme ait tüm kümeleri içerdiğinden A kümesi ile birleşimi yine evrensel küme olacaktır.

Burada iki kümenin birleşimini tanımladık. Peki üç, dört veya daha fazla sayıda küme verilseydi, bunların birleşimini nasıl belirleyecektik?

Örnek
$A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$, ve $C = \{3,4\}$ kümeleri için $A \cup B = \{1,2,3\}$, $B \cup C = \{2,3,4\}$,

$$(A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4\}$$

ve

$$A \cup (B \cup C) = \{1,2,3,4\}$$

olur.

İkiden çok küme verildiğinde birleşim kümesi, yine bu kümelerden en az birine ait olan elemanların kümesidir. Değişme ve birleşme özellikleri sayesinde ikiden çok kümenin birleşimi için, birleşimleri hangi sırada düşündüğümüzün bir önemi kalmıyor.

İki kümenin kesişimi de bu kümelerin her ikisine ait elemanların kümesidir.

Tanım Hem A hem de B ye ait elemanların oluşturduğu kümeye A ile B nin kesişimi denir ve

$$A \cap B$$

ile gösterilir. Bir başka deyişle

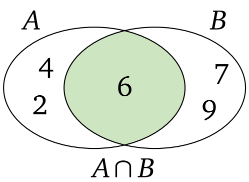
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$$

olur.

Doğru söylüyorsun Zeynep. A ve B kümelerinin her ikisine de ait elemanların oluşturduğu kümeye "A ile B kümelerinin kesişimi" diyoruz ve bu kümeyi $A \cap B$ ile gösteriyoruz. Yine $A = \{2, 4, 6\}$ ve $B = \{6, 7, 9\}$ kümeleri için $A \cap B = \{6\}$ olur.

Birleşime benzer olarak keyfi A, B, C kümeleri için kesişim ile ilgili şu özellikler doğrudur.

- $A \cap B = B \cap A$ **(Değişme özelliği)**
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ **(Birleşme özelliği)**
- $A \cap \emptyset = \emptyset$ ve $A \cap E = A$
- $A \cap B \subset A$ ve $A \cap B \subset B$

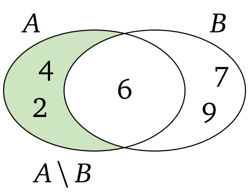


Şekil 1.4: $A \cap B = \{6\}$

Kümelerin kesişiminde de yine değişme ve birleşme özelliği var. O halde ikiden çok kümenin kesişimini de düşünürken verilen kümelerin kesişimlerini hangi sırada düşündüğümüzün bir önemi yok.

A kümesine ait olan ancak B kümesine ait olmayan elemanların kümesine ne diyorduk arkadaşlar?

A fark B kümesi diyoruz. Benzer olarak B'ye ait olan ancak A'ya ait olmayan elemanların kümesine de B fark A kümesi diyoruz.



Şekil 1.5: $A \setminus B = \{2, 4\}$

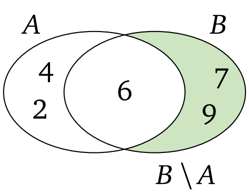
Tanım A'ya ait olan ancak B'ye ait olmayan elemanların kümesine A fark B kümesi denir ve bu küme $A \setminus B$ ile gösterilir.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$

Benzer olarak

$$B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ ve } x \notin A\}$$

olur.

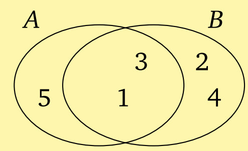


Şekil 1.6: $B \setminus A = \{7, 9\}$

Şimdi de küme işlemleri ile ilgili biraz örnek yapalım.

Örnek $A = \{1,3,5\}$ ve $B = \{1,2,3,4\}$ kümeleri için

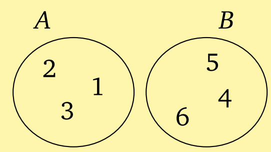
- $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$
- $A \cap B = \{1,3\}$
- $A \setminus B = \{5\}$ ve $B \setminus A = \{2,4\}$ olur.



Şekil 1.7: $A = \{1,3,5\}$ ve $B = \{1,2,3,4\}$ kümeleri için $A \setminus B = \{5\}$, $B \setminus A = \{2,4\}$ ve $A \cap B = \{1,3\}$ olur.

Örnek $A = \{1,2,3\}$ ve $B = \{4,5,6\}$ kümeleri için

- $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$
- $A \cap B = \emptyset$ olur, çünkü hem A hem de B kümesine ait olan eleman yoktur.



Şekil 1.8: $A = \{1,2,3\}$ ve $B = \{4,5,6\}$ kümeleri için $A \cap B = \emptyset$ olur.

Son örnekteki kümelerin ortak elemanı yok.

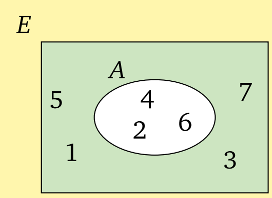
Evet Engin, ortak elemanları olmayan, bir başka deyişle kesişimleri boş olan kümelere "ayrık kümeler" denir. Son örnekteki A ve B ayrık kümelerdir.

Tanım Kesişimleri boş olan kümelere ayrık kümeler denir.

Bir kümenin evrensel kümeye göre tümleyenini de şöyle tanımlıyoruz.

Tanım E evrensel kümesi ve bunun bir A altkümesi verilsin. E kümesine ait olup A kümesine ait olmayan elemanların kümesine A kümesinin E kümesine göre tümleyeni denir ve bu küme A^t ile gösterilir.

Örnek $E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ve $A = \{2,4,6\}$ kümeleri için $A^t = \{1,3,5,7\}$ olur.



Şekil 1.9: $E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ve $A = \{2,4,6\}$ kümeleri için $A^t = \{1,3,5,7\}$ olur.

E evrensel küme olmak üzere A ve B kümeleri için

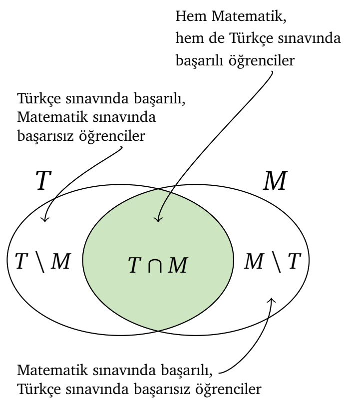
$$\emptyset^t = E \quad \text{ve} \quad E^t = \emptyset$$
$$(A^t)^t = A$$
$$(A \cup B)^t = A^t \cap B^t$$
$$(A \cap B)^t = A^t \cup B^t$$

olduğunu söyleyebiliriz.

Az önce Venn şemalarından bahsetmiştik. Venn şemalarını kullanarak kesişim ve birleşim ile ilgili ilk anda karışık görünen problemleri kolayca çözebiliriz. Bu konuda birkaç örnek verelim.

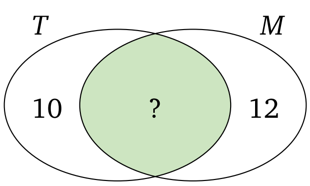
Örnek 30 kişilik bir sınıfta, belli bir sınav döneminde bütün öğrenciler Türkçe veya Matematik sınavlarının en az birinden başarılı olmuştur. 12 öğrenci yalnızca Matematik, 10 öğrenci yalnızca Türkçe sınavında başarılı olduğuna göre hem Matematik hem de Türkçe sınavlarında başarılı olan kaç öğrenci vardır?

Evet, yeterince karışık görünüyor hocam.



Aslında o kadar da zor değil. Türkçe sınavında başarılı olan öğrencilerin kümesini T, Matematik sınavında başarılı olan öğrencilerin kümesini M ile isimlendirelim.

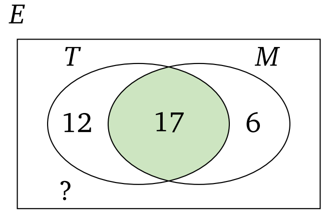
Her öğrenci $T \cup M$ kümesinin bir elemanıdır. Yalnızca Türkçe sınavında başarılı öğrenciler, Matematik sınavında başarısız olduğu için $T \setminus M$ kümesini oluşturur. Benzer olarak, yalnızca Matematik sınavında başarılı öğrenciler $M \setminus T$ kümesini oluşturur. Bu durumda soldaki gibi bir Venn şeması çizebiliriz.



Kesişim kümesi hem Türkçe, hem de Matematik sınavında başarılı öğrencilerin kümesidir. Yalnızca bir dersten başarılı olan $10 + 12 = 22$ öğrenci vardır. Sınıfta toplam 30 öğrenci olduğuna göre her iki sınavda da başarılı olmuş öğrenci sayısı $30 - 22 = 8$ olur.

Örnek 45 kişilik bir sınıfta belli bir sınav döneminde Türkçe dersinden başarılı olanlar 29 ve Matematik dersinden başarılı olanlar 23 kişidir. Her iki dersten başarılı olanlar 17 kişi olduğuna göre her iki dersten de başarısız olan kaç kişi vardır?

Ben de bu soruyu çözmeye çalışayım. Türkçe dersinden başarılı olan öğrencilerin kümesini T, Matematik dersinden başarılı olan öğrencilerin kümesini M ile isimlendirelim. Her iki dersten başarılı olan öğrenciler $T \cap M$ kümesini oluşturur. Her iki dersten de başarısız öğrenciler $T \cup M$ kümesinin tümleyenine aittir. Bu kümede kaç öğrenci olduğunu bulmak istiyoruz.



Kesişim kümesinde 17 kişi olduğuna göre $T \setminus M$, yani yalnızca Türkçe dersinden başarılı öğrencilerin kümesi $29 - 17 = 12$ kişidir. $M \setminus T$ yani yalnızca Matematik dersinden başarılı öğrencilerin kümesi de $23 - 17 = 6$ kişidir.

Bu derslerin herhangi birinden başarılı öğrencilerin kümesi $T \cup M$ olur ve bu kümenin $12 + 17 + 6 = 35$ elemanı vardır. Sınava giren 45 öğrenci, en az bir dersten başarılı 35 öğrenci olduğuna göre, her iki dersten başarısız olan öğrenci sayısı $45 - 35 = 10$ olur.

Sayılar

Kümeler kadar tanıdık bir başka konu da sayılar değil mi arkadaşlar? Hatta belki kümelerden de tanıdık. Üstelik az önce kümeler konusundan bahsederken sayıları kullandık. Aranızda doğal sayılar kümesini bilmeyen var mı?

Doğal sayılar kümesini kim bilmez! Adı üstünde hocam, $1, 2, 3, \ldots$ diye giden sayı kümesine doğal sayılar kümesi diyoruz.

Evet Selçuk, doğru söylüyorsun. Bu kümeyi özel olarak $\mathbb{N}$ ile gösteriyoruz. Bazı kaynaklar, doğal sayılar kümesine sıfır sayısını dahil etse de, sayıların tarihsel gelişimi itibariyle sıfır, rasyonel ve hatta irrasyonel sayılardan sonra sayı sistemine dahil olmuştur. Biz doğal sayılar kümesini

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

olarak alalım. Peki doğal sayılar kümesini içeren hangi sayı kümelerini biliyoruz?

İlk olarak doğal sayılara bu sayıların negatiflerini ve bir de sıfır sayısını katarak elde edeceğimiz tamsayılar kümesini örnek verebiliriz.

Tamsayılar kümesini $\mathbb{Z}$ ile gösteriyoruz. Engin'in dediği gibi bu küme

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \{\,1,\ 2,\ 3,\ldots\} \cup \{0\} \cup \{-1,-2,-3,\ldots\} \\ &= \{\ldots,-3,-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\} \end{aligned}$$

biçimindedir.

Bir de iki tamsayının oranı biçiminde ifade edilen rasyonel sayılar kümesi var tabii...

Evet Zeynep, a ve b iki tamsayı olmak üzere a/b biçimindeki sayılara da rasyonel sayı diyoruz. Ancak burada $b \neq 0$ olması gerektiğine de dikkat edelim.

Rasyonel sayılar kümesini de $\mathbb{Q}$ ile gösteriyoruz. O halde rasyonel sayılar kümesini

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

biçiminde ifade edebiliriz. Dikkat ederseniz tamsayılar kümesi de rasyonel sayılar kümesinin altkümesidir.

Tamsayılar kümesi, rasyonel sayılar kümesinin altkümesi mi? O nasıl oluyor anlamadım.

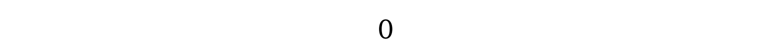
Anlamayacak ne var canım! Herhangi bir a tamsayısını $\dfrac{a}{1}$ biçiminde de ifade edebiliriz. Yani her tamsayı aynı zamanda bir rasyonel sayıdır.

Doğal sayılar kümesi tamsayılar kümesinin, tamsayılar kümesi de rasyonel sayılar kümesinin altkümesidir.

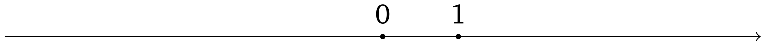
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Yani doğal sayılar kümesi tamsayılar kümesinin, tamsayılar kümesi de rasyonel sayılar kümesinin altkümesidir.

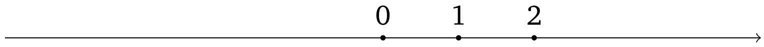
Şimdi sayıları bir doğru üzerine yerleştirdiğimizi düşünelim. Öncelikle 0 sayısını sayı doğrumuza yerleştirelim.



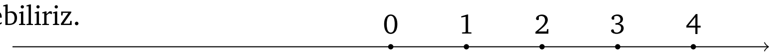
0 noktasına başlangıç noktası diyelim. Başlangıç noktasından sağa doğru eşit adımlarla ilerlemeye başlayalım. İlk adımda 1 sayısını,



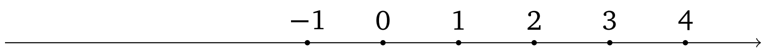
ikinci adımda 2 sayısını yerleştirip,



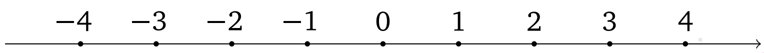
bu şekilde devam ederek tüm doğal sayıları sayı doğrusu üzerinde gösterebiliriz.



Şimdi tekrar başlangıç noktasına, yani 0 sayısına dönüp, yine eşit uzunlukta adımlarla sola doğru ilerlemeye başlarsak ilk adımda -1

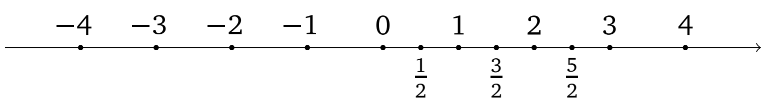


ve az önce yaptığımıza benzer şekilde devam ederek tüm negatif sayıları sayı doğrusu üzerine yerleştirip, tamsayıları da sayı doğrusu üzerinde göstermiş oluruz.

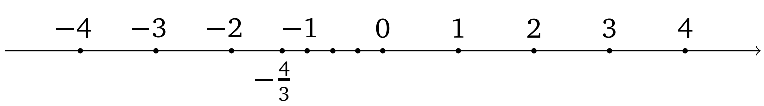


Peki $5/2$ sayısı bu doğru üzerinde nereye denk geliyor?

Evet sıra kesirli sayılara geldi. Acaba $5/2$ gibi kesirli sayıları sayı doğrusuna nasıl yerleştireceğiz? "Kesir" demişken hemen bir açıklama yapayım. 1 tamsayısı $1 = 2/2$ olduğundan aynı zamanda rasyonel sayıdır. $1/2$ ise rasyonel sayıdır ancak tamsayı değildir. İşte bu türden sayılara "kesirli sayı" diyoruz. Neyse, $5/2$ kesrini sayı doğrusuna yerleştirelim. Bu defa da adımları parçalayarak ilerleyeceğiz. $5/2$ için sağa doğru, attığımız her bir adımı iki eş parçaya bölerek, beş parça ileri gideceğiz ya da bir başka ifadeyle, sıfırdan sağa doğru önce iki adım, sonra yarım adım daha atacağız.



O zaman $-4/3$ sayısı için de her bir adımımızı 3 eş parçaya bölerek 4 parça ilerleyeceğiz ya da önce bir adım, sonra $1/3$ adım daha atacağız. Sayı negatif olduğu için bu sefer yönümüz sağa değil, sola doğru olacak.

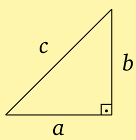


Evet Gökçe haklısın. Verilen sayı pozitif ise başlangıç noktasından sağa, negatif ise sola ilerliyoruz.

Bu şekilde ister tamsayı ister kesirli sayı, hepsini sayı doğrusu üzerinde gösterebilirim. Peki tüm rasyonel sayıları alıp bu sayı doğrusu üzerine yerleştirsek bu doğruyu tamamen doldurmuş olur muyuz?

Doldurmak ne demek, bence taşar bile...

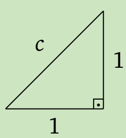
Pisagor Teoremi: Bir dik üçgende iki dik kenarın uzunluklarının kareleri toplamı, hipotenüsün karesine eşittir. Yani a, b, c üçgenin kenar uzunlukları olmak üzere



$$a^2 + b^2 = c^2$$

olur.

Örnek



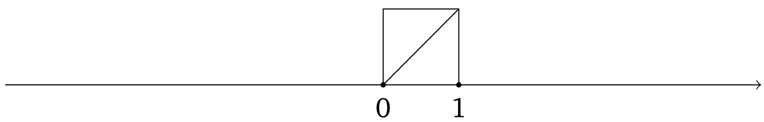
$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

olduğundan $c = \sqrt{2}$ olur.

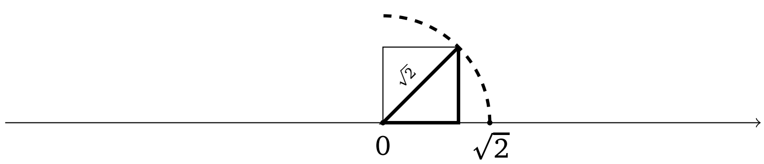
İlk anda dolduracağını düşünebilirsiniz ama tüm rasyonel sayıları bu doğru üzerine yerleştirdiğimizde de bu doğruda boş yerler kalacak.

Yapmayın hocam, ben inanmıyorum. O kadar çok sayıyı yerleştirdik, nerede boşluk kaldı?

O zaman tüm rasyonel sayıları yerleştirdikten sonra bu sayı doğrusu üzerinde boş kalan noktalardan birini hep birlikte görelim. Sayı doğrumuz üzerinde kenar uzunluğu 1 birim olan bir kare ve bu karenin köşegenini çizelim.



Sonra merkezi başlangıç noktası ve yarıçapı, bu köşegenin uzunluğu kadar olan çemberin sayı doğrusunun pozitif tarafını kesen noktayı işaretleyelim. Her iki dik kenarının uzunluğu 1 birim olan üçgenin hipotenüs uzunluğunun $\sqrt{2}$ olduğunu hatırlıyorsunuzdur.



Bu nedenle sayı doğrusu üzerinde işaretlediğimiz nokta $\sqrt{2}$ sayısına karşılık gelmektedir. $\sqrt{2}$ rasyonel bir sayı değildir. Dolayısıyla bu sayı doğrusu üzerinde herhangi bir rasyonel sayıya karşılık gelmeyen noktalar da vardır. Bu türden sayılara "irrasyonel sayı" diyoruz.

Hımm, bu $\sqrt{2}$ de ne ki?

İşte rasyonel sayılar ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşimi de “gerçel sayılar” kümesini oluşturmaktadır. Gerçel sayılar kümesini $\mathbb{R}$ ile gösteriyoruz. Rasyonel sayılar kümesinin, gerçel sayılar kümesinin bir altkümesi olduğu açıktır.

Evet, çünkü iki küme için bu kümelerden herhangi biri, bu kümelerin birleşiminin altkümesiydi. Yani kümelerimiz A ve B ise hem $A \subset A \cup B$ hem de $B \subset A \cup B$ idi.

Rasyonel sayılar gerçel sayıların altkümesi olduğuna göre $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ yazabiliriz.

Doğru söylüyorsun Zeynep, konuyu bu şekilde özetleyebiliriz. Artık elimizde gerçel sayılar kümesi var. Herhangi iki gerçel sayıyı toplayabilir ya da çarpabiliriz. Sonuç yine bir gerçel sayı olacaktır.

Şimdi bize a ve b gibi iki gerçel sayı verilmiş olsun. a sayısının sayı doğrusundaki konumu b sayısınınkine göre solda ise “a sayısı, b sayısından küçüktür” diyeceğiz ve bunu $a < b$ olarak göstereceğiz.

$a = b$ veya $a < b$ ise

$$a \leq b$$

olarak gösterilir ve a, b’den küçük eşittir denir.

Örnek $\frac{4}{3} \leq 2$ olur.

Az önce verdiğim örneğe göre -2 sayısı $-4/3$ sayısından küçüktür. Yani $-2 < -\frac{4}{3}$ olur.

Bu duruma bir başka açıdan bakacak olursak, b sayısı da sayı doğrusunda konum olarak a sayısına göre sağda kaldığı için “b sayısı, a sayısından büyüktür” diyebiliriz ve bunu $b > a$ olarak gösteririz.

$a = b$ veya $a > b$ ise

$$a \geq b$$

olarak gösterilir ve a, b’den büyük eşittir denir.

Örnek $1 \geq 1$ olur ancak $1 > 1$ değildir!

O halde “$-4/3$ sayısı, -2 sayısından büyüktür” de diyebilirim. Yani $-\frac{4}{3} > -2$ olur.

Buna göre $\sqrt{2}$ sayısı da 1 sayısından büyüktür. Yani $\sqrt{2} > 1$ diyebiliriz.

Mete Hocam, $\sqrt{2}$ dediniz, irrasyonel sayı dediniz, geçtiniz. Homurdandım ama duymadınız. Benim zihnimde birşey canlanmıyor. İrrasyonel sayıları biraz daha açıklasanız.

$\sqrt{2}$ sayısını ve daha genel anlamda irrasyonel sayıları gözünüzde çok da büyütmeyin. $\sqrt{2}$ dediğimiz, karesi 2 olan pozitif sayıdır. Engin $\sqrt{2}$'nin 1'den büyük olduğunu söyledi. 2'nin karesi 4 olduğuna göre $\sqrt{2}$ sayısı 1 ile 2 arasındadır. 1,5'in karesi 2,25 olduğuna göre $\sqrt{2}$ sayısı 1 ile 1,5 arasındadır. Bu şekilde hesap yapmaya devam edersek $1,41421356\ldots$ biçiminde sonsuz ondalıklı açılım elde ederiz.

Ben de sonsuz ondalıklı açılımı olan bir sayı söyleyebilirim. $1/3 = 0,333\ldots$

Evet Engin, doğru söylüyorsun ama bu iki sonsuz açılımda bir fark var. Söylediğin sayının ondalık kısmında 3 durmadan tekrar ediyor. Bu türden, ondalık açılımı belli bir basamaktan sonra tekrar eden basamak gruplarından oluşan sayılara devirli ondalık sayı diyoruz ve örneğin senin sayını $0,333\ldots = 0,\overline{3}$ olarak gösteriyoruz. Devirli ondalık sayılar da rasyonel sayıdır. Ancak $\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$ sayısında ondalık kısım, hesabımızı ne kadar hassaslaştırırsak hassaslaştıralım, tekrar eden basamak gruplarına ulaşmaz. İşte, irrasyonel sayılar, ondalık açılımı belli bir basamaktan sonra tekrar eden basamak grupları bulundurmayan sayılardır diyebiliriz.

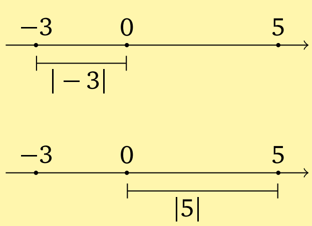
Hımm... Zaman zaman gazetelerde "Pi sayısının bilmem kaç milyar basamağı hesaplandı" gibisinden gördüğümüz haberlerin nedeni bu demek ki!

$3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ldots$

Şekil 1.10: π sayısının ondalık açılımının ilk 15 basamağı.

Evet Selçuk, çemberin çevresinin çapına oranı olan π sayısı da irrasyonel bir sayıdır. Diğer tüm irrasyonel sayılar gibi π sayısı da virgülden sonra kaç basamağı hesaplanırsa hesaplansın, kendini tekrar eden basamak gruplarına ulaşmayacaktır. Bu nedenle benzer haberleri, basamak sayısı artmış olarak, gelecekte de göreceksiniz.

Son olarak mutlak değer kavramından biraz bahsedelim. Bir a sayısının mutlak değeri, sayı doğrusunda o sayının başlangıç noktasına, yani sıfıra olan uzaklığıdır ve $|a|$ ile gösterilir. Buna göre -3 ve 5 sayılarının mutlak değeri nedir Selçuk?



Şekil 1.11: $|-3| = 3,\ |5| = 5$

-3 sayısının mutlak değeri 3 ve 5 sayısının mutlak değeri de 5 olur. Bunu

$$|-3| = 3,\ |5| = 5$$

olarak ifade ederiz.

Sıfır dışındaki her sayı için, sayı pozitif de olsa, negatif de olsa mutlak değeri hep pozitif çıkıyor. Sıfır noktasının kendine uzaklığı da sıfır olacağından $|0| = 0$ olur.

Her a sayısı için $|a| \geq 0$ olur.

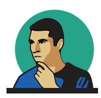
Üslü Sayılar

Bir a gerçel sayısının kendisiyle çarpımını a^2 ile $a \cdot a \cdot a$ sayısını a^3 ile gösteriyoruz ve bu sayılara sırasıyla a sayısının "kare"si ve "küp"ü diyoruz. Genel olarak $n \geq 2$ doğal sayısı için, n tane a sayısının çarpımını a^n ile gösteriyoruz. Yani

$$\begin{aligned} a^2 &= a \cdot a \\ a^3 &= a \cdot a \cdot a \\ &\vdots \\ a^n &= \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ tane}} \end{aligned}$$

a^n sayısına "a sayısının n. kuvveti" diyoruz. Peki arkadaşlar, yine $n \geq 2$, $m \geq 2$ olmak üzere n, m doğal sayıları için a^n ile a^m sayılarını çarptığımızda ne olacak?

a^n sayısı n tane, a^m sayısı da m tane a sayısının çarpımı olduğuna göre bu ikisinin çarpımı $n + m$ tane a sayısının çarpımıdır.



Engin doğru söylüyor.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ tane}} \text{ ve } a^m = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{m \text{ tane}}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ tane}} \cdot \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{m \text{ tane}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n+m \text{ tane}} \\ &= a^{n+m} \end{aligned}$$

olduğunu elde ederiz.

Bu kadar hesap yaptık ama a^1 ve a^0 ne demek?

Tanım $a^0 = 1$ ve $a^1 = a$ olarak tanımlanır.

Tanım $a \neq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ve özel olarak

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

olarak tanımlanır.

Örnek

$$\begin{aligned} 3^{-2} &= \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \\ (-3)^{-2} &= \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9} \\ -3^{-2} &= -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

$a^0 = 1$ ve $a^1 = a$ olarak tanımlıyoruz Selçuk. Ayrıca $a \neq 0$ sayısı ve n doğal sayısı için a^{-n} sayısını da

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

olarak tanımlıyoruz.

Özel olarak $a^{-1} = \frac{1}{a}$ olduğunu da söyleyebiliriz. Dikkat ederseniz, negatif tamsayı üsler için de üslü sayıların ne anlama geldiğini ifade etmiş olduk.

Yani negatif kuvvetin sayının negatif olmasıyla alakası yok mu? Ben hep öyle olduğunu düşünürdüm.

Üssün negatif olması sayının negatif olmasını sağlamıyor. Mesela $2^{-3} = 1/2^3 = 1/8$ olur. Tabii sayının kendisi negatif ise o ayrı... Örneğin $(-2)^{-3} = 1/(-2)^3 = -1/8$ olur.

Son olarak $n \geq 2$ ve $m \geq 2$ olmak üzere m, n doğal sayıları için a^n sayısının m. kuvvetini, yani $(a^n)^m$ sayısını bulalım.

Bir sayının m. kuvveti o sayıdan m tanesinin çarpımı olduğuna göre a^n sayısının m. kuvveti, yani $(a^n)^m$ sayısı, m tane a^n 'nin çarpımı olacaktır. Bu durumda

$$\begin{aligned} (a^n)^m &= \underbrace{a^n \cdot a^n \ldots a^n}_{m \text{ tane}} \\ &= a^{\overbrace{(n + \ldots + n)}} \\ &= a^{n \cdot m} \end{aligned}$$

olur.

Evet Zeynep, doğru söylüyorsun. Çok güzel ilerliyoruz. Genel durumda a ve b gerçel sayıları ve m, n tamsayıları için şu özellikler doğrudur.

i. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

ii. $a \neq 0$ olmak üzere $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

iii. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

iv. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

v. $b \neq 0$ olmak üzere $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Pınar Hocam, siz de kurallar budur diye sıralıyorsunuz. Biraz örnek çözelim.

Peki Selçuk, o zaman seninle başlayalım. 2^6 sayısının kaç olduğunu söyler misin?

Neyse ucuz kurtuldum. Bilemeyecek birşey yok zaten. 6 tane 2'nin çarpımıdır. Yani

$$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

ediyor.

Bir soru da ben sorayım. $2^3 \cdot 2^4$ sayısını hesaplayın.

Aaa, bu da kolaymış. Bunu da ben yapayım. $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4}$ olur. O halde bu sayı 2^7'dir. Selçuk 2^6 sayısının 64 olduğunu hesaplamıştı. $2^7 = 2^6 \cdot 2 = 64 \cdot 2 = 128$ olur.

$2^3 = 8$ ve $2^4 = 16$ olduğundan $2^3 \cdot 2^4 = 8 \cdot 16 = 128$ de diyebilirdin.

Köklü Sayılar

Şimdi de köklü sayılara ilişkin bir takım temel bilgilerimizi gözden geçirelim. Öncelikle $a \geq 0$ ve n bir doğal sayı olmak üzere n. kuvveti a olacak biçimdeki negatif olmayan sayıya "a sayısının n. dereceden kökü" diyoruz ve $\sqrt[n]{a}$ ile gösteriyoruz. Özel olarak $n = 2$ ise $\sqrt[2]{a}$ yerine $\sqrt{a}$ yazıyoruz ve bunu "karekök" olarak adlandırıyoruz.

$a \geq 0$ ve n bir doğal sayı olmak üzere $\sqrt[n]{a}$ sayısı n.kuvveti a olan $b \geq 0$ sayısıdır.

$n = 2$ ise $\sqrt[2]{a}$ yerine

$$\sqrt{a}$$

yazılır.

Yani n tane $\sqrt[n]{a}$ sayısının çarpımı a olur.

Örnek
$3 \cdot 3 = 9$ olduğu için

$$\sqrt{9} = 3,$$

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ olduğu için

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

olur.

Kesinlikle...

$$a = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \ldots \sqrt[n]{a}}_{n \text{ tane}}$$

olur.

Hımm... Peki $(-5) \cdot (-5) = 25$ olduğuna göre $\sqrt{25} = -5$ mi?

Mete Hoca kökün negatif olmayacağını söylemişti. Bu nedenle söylediğin yanlış oluyor. Doğrusu $5 \cdot 5 = 25$ olduğu için $\sqrt{25} = 5$ olmalı. Peki neden a sayısını negatif almadık?

a sayısının negatif olduğu her durum, örneğin $\sqrt{-2}$, anlamlı değildir. Bildiğiniz gibi bir gerçel sayı pozitif de olsa, negatif de olsa karesi pozitiftir. Sayı 0 olsa, karesi de 0 olur. Yani $b^2 = -2$ olacak biçimde bir b gerçel sayısı yoktur.

Ama anlamlı olduğu bazı durumlar da var değil mi? Ben köklü ifadeler içine negatif sayılar yazdığımızı hatırlıyorum.

Doğru hatırlıyorsun Zeynep. Örneğin $\sqrt[3]{-8}$ anlamlıdır.

Çünkü $(-2)^3 = -8$ olur. O halde $\sqrt[3]{-8} = -2$'dir.

Tanım m ve n birer doğal sayı ve $a > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} a^{m/n} &= \sqrt[n]{a^m} \\ a^{-m/n} &= \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

O halde bu sefer $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$ olduğu için $\sqrt[3]{-125} = -5$ olduğunu söyleyebiliriz.

Evet Selçuk, çok haklısın. Daha genel olarak, m ve n birer doğal sayı ve $a > 0$ olmak üzere

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{ve } a^{-m/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

biçiminde yazılır. Bu durumda artık sayıların rasyonel kuvvetlerini de tanımlamış oluyoruz.

Örnek
$\sqrt[3]{8} = 2$ olduğu için

$$8^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$$

olur.

Daha önce sayıların tamsayı kuvvetleri için ifade ettiğimiz özellikler rasyonel kuvvetleri için de geçerlidir. Özellikle $a, b > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdakiler köklü sayılar için sıkça kullanılan kurallardır.

i. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

ii. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Örnek

$$\begin{aligned} \sqrt{27} &= \sqrt{3^2 \cdot 3} \\ &= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{108} &= \sqrt{4 \cdot 27} \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{27} \\ &= 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{108} + \sqrt{27} &= 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \\ &= (6+3)\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \end{aligned}$$

Örnek

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}} &= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}} &= \sqrt{\frac{3}{27}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{9}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Aralıklar

Şimdi biraz da aralıklar ile ilgilenelim.

Aralıklar, gerçel sayılarda seçilen iki sayı arasındaki tüm sayıların oluşturduğu kümeler değil miydi?

Evet Engin, dediğin gibi... a, b herhangi iki gerçel sayı ve $a < b$ olsun.

$$\{x \mid a \leq x \leq b, \ x \in \mathbb{R}\}$$

kümesine "kapalı aralık" diyoruz ve bu kümeyi $[a, b]$ olarak gösteriyoruz. Dikkat ederseniz, a ve b sayıları bu kümeye aittir. Bu nedenle aralığa kapalı diyoruz. a ve b sayılarına aralığın uç noktaları diyoruz. $[a, b]$ kapalı aralığı sayı ekseni üzerinde uçları a ve b olan doğru parçası ile gösterilir.

Şekil 1.12: $[a, b]$ aralığı.

Bunun kapalısı varsa açığı da vardır.

Evet Selçuk, açık aralıkları da

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b,\ x \in \mathbb{R}\}$$

Şekil 1.13: (a,b) aralığı.

olarak tanımlıyoruz. a ve b noktaları, yani uç noktalar kümeye ait olmadığından bu aralığa “açık aralık” diyoruz.

Aralığın bir ucu kümeye aitse o tarafı köşeli, değilse bildiğimiz parantez işaretiyle yazıyoruz. Bu durumda aralıkların bir ucunun kümeye ait, diğerinin ait olmadığı iki aralık daha tanımlayabiliriz.

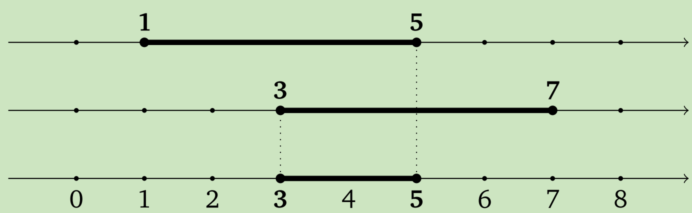
Şekil 1.14: $[a,b)$ aralığı.

Şekil 1.15: $(a,b]$ aralığı.

Evet Gökçe, gerçekten de yarı-açık aralıkları da senin söylediğin gibi tanımlıyoruz.

$$[a,b) = \{x \mid a \le x < b,\ x \in \mathbb{R}\}$$
$$(a,b] = \{x \mid a < x \le b,\ x \in \mathbb{R}\}$$

Örnek



Şekil 1.16: $[1,5]$ ile $[3,7]$ aralıklarının kesişim kümesi $[3,5]$ aralığıdır.

Bu örnekte verilen aralıkların birleşimi de $[1,7]$ olur değil mi?

Tebrik ederim Selçuk, $[1,5] \cup [3,7] = [1,7]$ olur. Bakıyorum da, sen de, Gökçe de hızlandınız.

Peki, bir a sayısından büyük bütün gerçel sayıların kümesini de bir aralık olarak gösteremez miyiz?

Evet Zeynep, bu türden aralıklar da tanımlayabiliriz.

$$(a,\infty) = \{x \mid x > a,\ x \in \mathbb{R}\}$$
$$(-\infty,a) = \{x \mid x < a,\ x \in \mathbb{R}\}$$

Şekil 1.17: (a,∞) aralığı.

Şekil 1.18: $(-\infty,a)$ aralığı.

Elbette burada a sayısı kümeye ait de olabilir. Bu durumda a sayısının bulunduğu ucu köşeli parantez ile kapatıyoruz. Ancak ∞ simgesinin bulunduğu tarafta köşeli parantezi kullanmıyoruz.

Son yazdığınız aralıklardaki yan yatmış sekiz nereden çıktı? Dayanamamış, yere mi yıkılmış?

Ben de şimdi ona değinecektim. Didim, Altınkum sahilindeki kum tanelerini düşünelim. Sizce ne kadardır?

Ooo, bence sonsuzdur.

Belki uygulamada sayılamayacak kadar çok olduğunu düşündüğünüz çoklukları sonsuz olarak adlandırabilirsiniz. Ancak, ne kadar olduğunu sayamasak bile, bırakalım yalnız bir sahildeki kum tanelerini, dünya üzerindeki tüm sahillerdeki kum tanelerinin miktarı bile sonludur. ∞ simgesini "sonsuz" anlamında kullanıyoruz. Bu konuda pek çok şey söylenebilir ancak sonsuzluğun matematikteki gerçek anlamını burada tartışmayacağız. ∞ simgesinin, aralığın kullanıldığı ucu yönündeki tüm sayıların kümeye ait olduğunu gösterdiğini söylemekle yetinelim. İşlem yaparken bu simgeyi bir sayı gibi kullanmak bir takım hatalara neden olabilir. O nedenle ∞ simgesiyle karşılaştığınızda biraz daha dikkatli olmakta fayda var.

Özet

Bu ünitede, kümeler ve sayılar hakkındaki temel kavramlara değinilmiştir. Kümeler ile ilgili temel tanımlar ifade edildikten sonra küme gösterimleri ve birleşim, kesişim gibi küme işlemleri hatırlatılmıştır. Sayılarla ilgili bölümde ise sayı kümelerine dair temel bilgiler gözden geçirilmiş, üslü ve köklü sayılarla ilgili temel işlemler verilmiştir. Son olarak aralıklar ile ilgili temel tanımlar ifade edilmiştir.

Okuma Parçası

İLK HESAP MAKİNELERİ

Herkes sayı saymaya on parmağıyla başladığından, şu anda varolan sayılama dizgelerinin çoğu on tabanına dayanır. On iki tabanını seçmiş bazı ilginç örnekler de olmuştur. Mayalar, Aztekler, Keltler ve Basklar, bir parça eğilince ayak parmaklarıyla da sayılabileceğini fark etmişler, böylece yirmi tabanını benimsemişlerdir.

Bilinen en eski yazının icatçısı olan Sümerlere ve sırf tarihin en eski sıfırını keşfettikleri için sonsuza dek kayıtlı kalmayı hak eden Babillilere gelince, onlar nedendir bilinmez, altmış tabanıyla sayıyorlardı. Bütün okul çocuklarının bildiği, aynı zamanda pek korktuğu şu ünlü zamanı saatlere, dakikalara, saniyelere bölme sorunlarını, aynı şekilde 60 dakikaya bölünmüş dereceleri ve 60 saniyeye bölünmüş dakikaları olan, tuhaf bir biçimde 360 dereceye bölünmüş o daireyi bize bırakan onlardır. Ama burada zaten ince hesaplar söz konusudur.

Batı Avrupa'da keşfedilmiş, 20.000 – 35.000 yıllık, üzerinde bir ya da birçok kertik dizisi bulunan bir sürü önkol kemiği ve başka hayvan kemikleri, kazıbiliminin şimdiye dek bilinmezlikten kurtarabildiği en eski ``hesap makinelerini'' oluşturuyor.

Bu kemik çubukları kullanmış olanlar belki müthiş avcılardı. Ne zaman bir hayvan öldürseler bir kemik üzerine bir kertik atıyorlardı. Her hayvan türü için farklı kemikler kullanılabiliyordu: Biri ayılar için, bir başkası bizonlar için, yine bir başkası kurtlar için vb. Böylece saymanlığın ilk kavramlarını icat etmişlerdi, çünkü gerçekte rakamları olabilecek en yalın sayısal işaretleme dizgesiyle yazıyorlardı.

Çok ilkel ve geleceği olmayan bir teknik diye düşünülecektir. Gerçi ilkel, ama kesinlikle gelecekten yoksun değil. Hemen hemen hiçbir değişikliğe uğramadan bize kadar ulaşmış. Bu tarihöncesi insanları tüm çağların en uzun ömürlü rekorlarından birini oluşturacak bir icat ortaya koymuşlar. Tekerlek bile bu kadar eski değildir. Bu icatla yalnız ateşin kullanımı yarışabilir ve belki yarışı kazanabilir.

...

Aritmetik tarihinde aynı şekilde ihmal edilemez bir önem taşıyan başka bir eski dizge de çakıl yığını dizgesidir; insan onun sayesinde hesap sanatına başlamıştır. Abaküslerin, rakamların henüz bilinmediği çağlarda işlem yapmak için kullanılmış şu boncuklu çerçevelerin kökeninde de bu yöntem vardır.

Ayrıca, hesap (*calcul*) dediğimiz zaman, sözcüğün kendisi bizi uzak çağlardan gelen bu yönteme gönderir, çünkü Latince *calculus* (hesap) sözcüğü ``küçük çakıl'' anlamına gelir.

Kaynak : Bir Gölgenin Peşinde, Rakamların Evrensel Tarihi -I-, G. Ifrah (Çev., K. Dinçer), Tübitak Popüler Bilim Kitapları, Sayfa: 11 - 13, 1995.

Çıkarın Kağıtları

1. $A=\{1,3,5,7\}$ ve $B=\{2,4,6,8\}$ ise $A\cap B$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

B) $\{2,4,6,8\}$

C) $\{1,3,5,7\}$

D) $\emptyset$

E) $\{1,2,3,5,8\}$

2. $E=\{x \mid x\leq 8,\ x\in\mathbb{N}\}$ ve $A=\{1,3,5,7\}$ olmak üzere A^t aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

B) $\{2,4,6,8\}$

C) $\{1,3,5,7\}$

D) $\emptyset$

E) $\{1,2,3,5,8\}$

3. 3^4 aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 81 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 27 **E)** 7

4. $A=\{1,3,4,5,7\}$, $B=\{1,2,3,6,8\}$ ve $C=\{3,6,9\}$ kümeleri için $C\cap(A\cup B)$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{3,6\}$

B) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

C) $\{1,3,5,7\}$

D) $\{2,4,6,8\}$

E) $\{3\}$

5. $\dfrac{6^4}{9^2}$ sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 32 **B)** 16 **C)** 8 **D)** 4 **E)** 2

6. $(-1,8)$ ve $(2,5)$ açık aralıklarının kesişimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-8,1]$ **B)** $(-1,8)$ **C)** $(2,5)$

D) $(-1,5)$ **E)** $(2,8)$

7. $\dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{81}}$ sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{1}{3}$ **B)** -3 **C)** $\dfrac{3}{4}$

D) 3 **E)** $\dfrac{4}{3}$

8. $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{3}{4}$, $c=-\frac{1}{4}$ ve $d=\frac{1}{4}$ sayılarının küçükten büyüğe sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a<b<c<d$

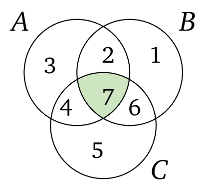
B) $d<c<b<a$

C) $d<a<b<c$

D) $c<d<a<b$

E) $c<d<b<a$

9.



Taralı olarak verilen küme aşağıdakilerden hangisidir?

A) $A\cup B$

B) $B\cap C$

C) $A\cap B\cap C$

D) $B\cap(A\cup C)$

E) $C\cap(A\cup B)$

10. $\dfrac{0,2\cdot 10^3+1,6\cdot 10^2}{0,6}$ sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 6

B) 60

C) 36

D) 600

E) 360

Çözümler

1. $A = \{1,3,5,7\}$ ve $B = \{2,4,6,8\}$ kümelerinin ortak elemanı olmadığından $A \cap B = \emptyset$ olur.

Doğru cevap D şıkkıdır.

2. A^t kümesi, E kümesine ait ancak A kümesine ait olmayan elemanların kümesi olduğundan

$$A^t = \{2,4,6,8\}$$

olur.

Doğru cevap B şıkkıdır.

3.

$$\begin{aligned} 3^4 &= 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 \\ &= 9\cdot 9 \\ &= 81 \end{aligned}$$

olur.

Doğru cevap A şıkkıdır.

4. $A = \{1,3,4,5,7\}$, $B = \{1,2,3,6,8\}$ ve $C = \{3,6,9\}$ kümeleri için

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

ve

$$C \cap (A \cup B) = \{3,6\}$$

olur.

Doğru cevap A şıkkıdır.

5.

$$\begin{aligned} \frac{6^4}{9^2} &= \frac{(2\cdot 3)^4}{(3^2)^2} \\ &= \frac{2^4\cdot 3^4}{3^4} \\ &= 2^4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Doğru cevap B şıkkıdır.

6. $(-1,8) = \{x \mid -1 < x < 8,\ x \in \mathbb{R}\}$ ve

$$(2,5) = \{x \mid 2 < x < 5,\ x \in \mathbb{R}\}$$

kümeleri için $(2,5) \subset (-1,8)$ olduğundan

$$(2,5) \cap (-1,8) = (2,5)$$

olur.

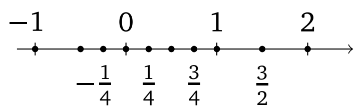
Doğru cevap C şıkkıdır.

7.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{81}} &= \frac{\sqrt{12^2}}{\sqrt{9^2}} \\ &= \frac{12}{9} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Doğru cevap E şıkkıdır.

8.



$$-\frac{1}{4} < \frac{1}{4} < \frac{3}{4} < \frac{3}{2}$$

olur.

Doğru cevap E şıkkıdır.

9. Taralı bölge ile verilen küme hem A, hem B, hem de C kümesine ait olur.

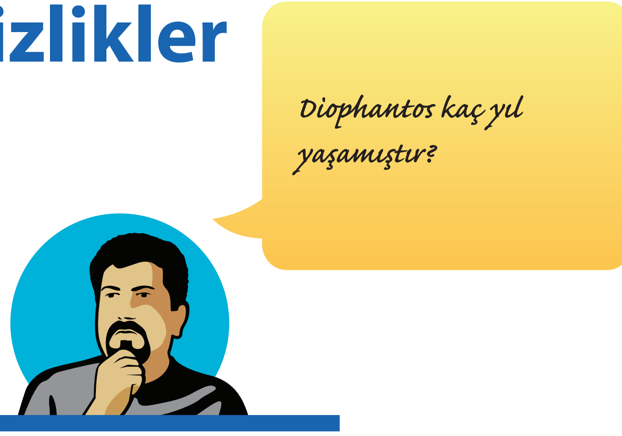
Doğru cevap C şıkkıdır.

10.

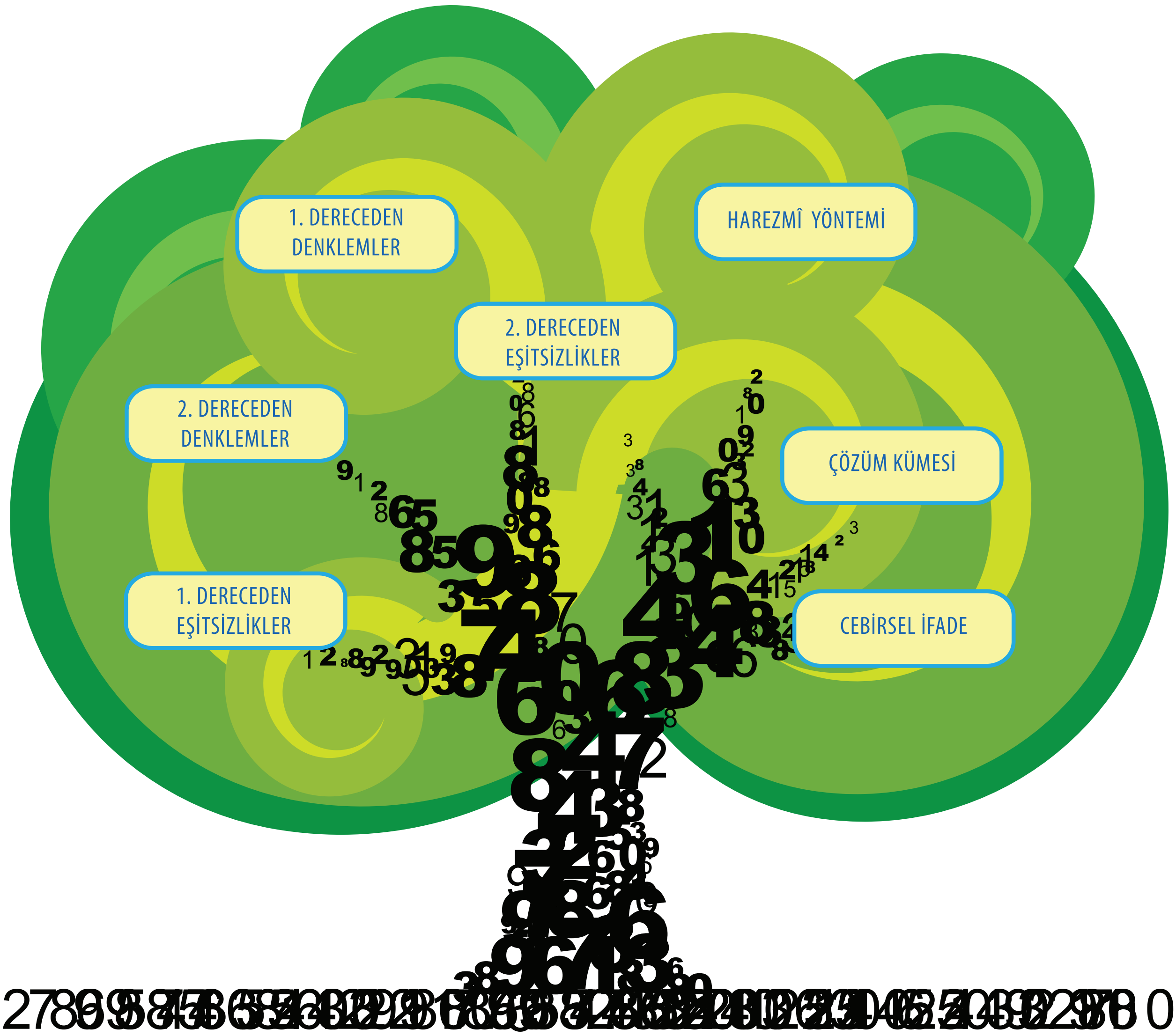
$$\begin{aligned} \frac{0,2\cdot 10^3 + 1,6\cdot 10^2}{0,6} &= \frac{0,2\cdot 1000 + 1,6\cdot 100}{0,6} \\ &= \frac{200+160}{\frac{6}{10}} \\ &= 360\cdot\frac{10}{6} \\ &= 600 \end{aligned}$$

Doğru cevap D şıkkıdır.

Denklem ve Eşitsizlikler



2. ÜNİTE
GENEL MATEMATİK



Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

Arkadaşlar bugün Themis heykelindeki eşitlik ve objektifliğin simgesi olan terazi ile geldim.

Hocam Themis kim?

Yunan mitolojisinde Themis adalet ve düzen tanrıçası olarak bilinir (Şekil 2.1). Themis heykeli, bir elinde terazi diğer elinde ise kılıç olan gözleri bağlı bir kadını temsil eder. Bir elindeki terazi, adaleti ve bunun dengeli bir biçimde dağıtılmasını simgelemektedir.

Şekil 2.1: Themis Heykeli.

Şimdi hatırladım hocam. Adalet Bakanlığının logosunda da terazi vardı.

Biz işin hukuk kısmına girmeden, terazinin eşitlik özelliği ile ilgilenelim. Size 4 tane 100 gr, 4 tane de 50 gr getirdim. Bunların hepsini, terazinin kefelerine, her kefede eşit ağırlık olacak şekilde yerleştirebilir misiniz?

Her iki kefeye ikişer tane 100 gr, ikişer tane de 50 gr koyarsak ağırlıkları eşit olur. Terazi de dengede kalır.

$$\begin{aligned} 2\times 100+2\times 50 &= 2\times 100+2\times 50 \\ 200+100 &= 200+100 \\ 300 &= 300 \end{aligned}$$

Başka türlü terazi dengede olacak şekilde gramları yerleştirebilir miyiz?

Evet yerleştirebiliriz. Toplam 600 gr olduğuna göre birinci kefeye üç tane 100, gr diğer kefeye de kalanları koyarsak,

$$\begin{aligned} 3\times 100 &= 1\times 100+4\times 50 \\ 300 &= 100+200 \\ 300 &= 300 \end{aligned}$$

şeklinde terazi dengede olur.

Madem Pınar Hoca mitolojiye uzandı, ben de tarihten bir örnek vereyim. Eşitliği ünlü ressam Albrecht Dürer'in sihirli karesinde de görebiliriz (Şekil 2.2).

Sihirli kare mi?

Evet Gökçe. Şimdi sihirli karedeki sihiri görmeye çalışın.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Şekil 2.2: A. Dürer'in Sihirli Karesi.

Birinci yatay sıradaki sayıların toplamı otuz dört ve diğer yatay sıradakilerin toplamı da aynı sayı.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

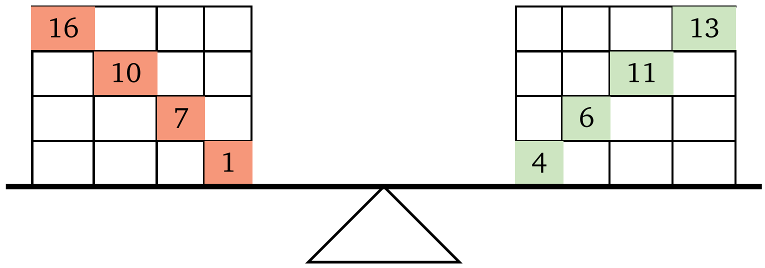
$$\begin{aligned} 16+3+2+13 &= 34 \\ 5+10+11+8 &= 34 \\ 9+6+7+12 &= 34 \\ 4+15+14+1 &= 34 \end{aligned}$$

Aaa, düşey sıradaki sayıların da toplamı otuz dört.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

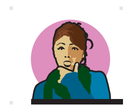
$$\begin{array}{r} 16 \\ 5 \\ 9 \\ +\ 4 \\ \hline 34 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ 10 \\ 6 \\ +\ 15 \\ \hline 34 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 11 \\ 7 \\ +\ 14 \\ \hline 34 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ 8 \\ 12 \\ +\ 1 \\ \hline 34 \end{array}$$

Süper! Albrecht Dürer bir dahi olmalı. Sanki Themis'in terazisini kullanmış. Terazinin bir kefesine bir köşegendeki sayıları, diğer kefesine de diğer köşegendeki sayıları koyarsak terazimiz yine dengede kalır. Çünkü her iki kefedeki sayıların toplamı otuz dört olur.



Şekil 2.3: Sihirli karedeki eşitlik durumu.

Çok güzel, karedeki sihri çözdünüz! Şimdi eşitlik kavramını matematiksel olarak inceleyelim. Bunun için cebirsel ifadelerin eşitliğinden bahsedeceğim.



Hocam, cebirsel ifade ne demektir?

Bilinmeyen dediğimiz $x, y, z, \ldots$ gibi değişkenleri, $1, 2, 3, \ldots$ gibi sayıları ve $+,\ -,\ \times, \ldots,$ kök alma gibi işlemleri içeren ifadelerdir. Örneğin,

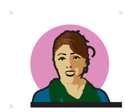
$$2x-1,\ x+3,\ x^2+y^2,\ \sqrt{x+5}, \ldots$$

gibi ifadelerdir. Şimdi, $2x-1$ ile $x+3$ cebirsel ifadelerinin eşit olması durumunu düşünelim. Söyleyin bakalım,

$$2x-1=x+3$$

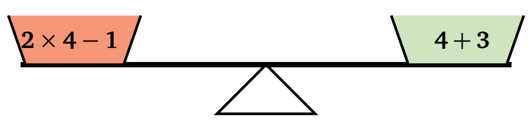
eşitliği x'in hangi değeri için doğrudur?

$$\begin{aligned} 2\times 4-1 &= 7 \\ 4+3 &= 7 \end{aligned}$$



$x=4$ için doğrudur hocam.

$x=4$ için bu iki ifadenin eşitliğini, Şekil 2.4'de verilen dengedeki terazi gibi düşünebiliriz.



Şekil 2.4: Terazideki eşitlik durumu.

Bu şekilde, bilinmeyen içeren ve bilinmeyenin bazı değerleri için gerçeklenen eşitliklere denklem diyeceğiz. Bilinmeyenin denklemi sağlayan değerine denklemin çözümü denir. Denklemin çözümlerinin kümesine de çözüm kümesi denir. Denklem bilinmeyenin hiçbir değeri için sağlanmıyorsa, çözüm yok ve çözüm kümesi boş kümedir diyeceğiz.

O zaman $x = 4$ değeri, $2x - 1 = x + 3$ denkleminin çözümüdür.

Evet Gökçe. Denklemleri, günlük hayatımızda karşılaştığımız çoğu problemlerin çözümünde kullanırız.

Hocam, geçen gün amcam bana bir halk bilmecesi sordu. Onu da denklemle çözebilir miyiz?

Söyle bakalım bilmeceni Selçuk. Hep birlikte çözmeye çalışalım.

Yerde bir topal kaz varmış. Havada uçan bir grup kaza, topal kaz seslenmiş: "Hey yüz kaz nereye gidiyorsunuz?" Havadaki kazlardan bir tanesi, "Biz yüz kaz değiliz! Bize bizim kadar, bizim yarımız kadar, yarımızın yarısı kadar eklenirse ve bir de sen olursan ancak o zaman yüz kaz oluruz" demiş. Acaba havada uçan kaz sayısı kaçtır?

Selçuk güzel bir bilmece sordun. Denklemler yardımıyla bu bilmeceyi çözebiliriz. Bu bilmeceyi çözebilmek için buna uygun bir matematiksel model olan denklem kurmalıyız. Uçan kazların sayısına x diyecek olursak, kaz bilmecesine karşılık gelen denklem,

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100$$

olur.

Peki, bu denklemdeki x bilinmeyenini nasıl bulacağız?

Gökçe aslında bir denklemin nasıl çözüleceğini soruyorsun. Bunun için, eşitliği bozmayan işlemlerden yararlanacağız. Bu işlemler, bir eşitliğin iki tarafına aynı sayının eklenmesi veya iki tarafından aynı sayının çıkarılması ya da iki tarafının aynı sayı ile çarpılması veya iki tarafının sıfırdan farklı bir sayıya bölünmesidir.

Sanırım bu işlemler dengedeki terazi için de geçerlidir.

Şüphesiz. Şimdi bu işlemleri kullanarak,

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100$$

denklemini çözmeye çalışalım.

Denklem biraz kalabalık görünüyor.

Eşitliğin sol tarafındaki x'leri toplayıp sadeleştirebiliriz.

$$\begin{aligned}
\underset{(4)}{\frac{2x}{1}} + \underset{(2)}{\frac{x}{2}} + \underset{(1)}{\frac{x}{4}} + 1 &= 100 \\
\frac{8x + 2x + x}{4} + 1 &= 100 \\
\frac{11}{4}x + 1 &= 100
\end{aligned}$$

Eşitliğin her iki tarafından 1'i çıkaralım:

$$\begin{aligned}
\frac{11}{4}x + 1 - 1 &= 100 - 1 \\
\frac{11}{4}x &= 99
\end{aligned}$$

İyi gidiyorsun Zeynep, devam et istersen.

Şimdi eşitliğin iki tarafını 4'le çarpıp,

$$\begin{aligned} 4 \times \frac{11}{4}x &= 99 \times 4 \\ 11x &= 99 \times 4 \end{aligned}$$

sonra iki tarafı 11'e bölelim:

$$\begin{aligned} \frac{11x}{11} &= \frac{99 \times 4}{11} \\ x &= \frac{99}{11} \times 4 \\ x &= 9 \times 4 \\ x &= 36 \end{aligned}$$

buluruz.

Denklemlerin hepsini böyle işlemler ile çözebilir miyiz?

Hayır Gökçe. Denklemlerin hepsi aynı türden olmadığından bunu genelleyemeyiz. Bunun için denklemleri bilinmeyen sayısı ve bilinmeyenlerin en yüksek kuvvetine göre sınıflandırıp, çözüm arayacağız. Biz şimdilik bir bilinmeyenli denklemlerle ilgileneceğiz. Bir bilinmeyen içeren ve bilinmeyenin kuvveti bir olan denkleme, birinci dereceden bir bilinmeyenli (veya kısaca birinci dereceden) denklem denir. Bu denklemlere örnek olarak,

$$3x + 1 = 0, \quad 2x - 1 = x + 5, \ldots$$

gibi denklemler verilebilir. Bir bilinmeyen içeren ve bilinmeyenin kuvveti iki olan bir denkleme, ikinci dereceden bir bilinmeyenli (veya kısaca ikinci dereceden) denklem denir. Bu denklemlere de örnek olarak,

$$x^2 + 6x + 9 = 0, \quad x^2 - 3x + 7 = 0, \ldots$$

gibi denklemler verilebilir.

O halde, kaz bilmecesinin denklemi birinci dereceden denklem olur.

Evet. Genel olarak birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler a, b iki gerçel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$$ax + b = 0$$

şeklindedir. Bu tür denklemlerin çözümü daha önce bahsettiğim, eşitliği bozmayan işlemlerle kolayca çözülür.

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ ax + b - b &= -b \\ ax &= -b \\ \frac{ax}{a} &= -\frac{b}{a} \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Tanım Bir denklemde eşitliği sağlayan bir sayıya, denklemin bir çözümü denir.

Buradan denklemin çözüm kümesi Ç$= \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$ olarak bulunur.

Gökçe yine mi! Hani cep telefonunu derse girerken kapatacaktın?

Özür dilerim hocam. Kardeşim kaz bilmecesine benzer bir mesaj göndermiş. Okuyorum okuyorum anlamıyorum. Lütfen yardımcı olabilir misiniz?

Neymiş söyle bakalım?

Hocam biliyorsunuz indirimler başladı. Kardeşimle babamdan para istemiştik. Ona vermiş, bana da ona verdiği kadar verecekmiş. Fakat beni meraklandırmak için, babamın verdiği parayı bulmamı istiyor. Bu paranın beşte ikisine kot, dörtte birine kazak aldıktan sonra 35 lirasının kaldığını yazıyor.

Haydi yine iyisin. 35 liradan fazla alacaksın. Ne istersen alırsın!

Şakayı bırak Selçuk, babam fazla para vermez.

Haydi bakalım. Gökçe'ye babasının kaç lira para vereceğini bulmaya çalışalım ve onu meraktan kurtaralım.

Önce probleme karşılık gelen denklemi yazmamız gerekiyor. Gökçe'nin babasının kardeşine verdiği paraya x dersek, denklemimiz

$$x = \frac{2x}{5} + \frac{x}{4} + 35$$

şeklinde olur.

Anladım, bu denklemi çözüp, babamın verdiği parayı bulabiliriz.

Şu denklemi bir an önce çözüp x'i bulmak istiyorum. Ben de kotun fiyatını merak ettim.

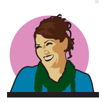
$$\begin{aligned} x &= \frac{2x}{\underset{(4)}{5}} + \frac{x}{\underset{(5)}{4}} + 35 \\ x &= \frac{8x + 5x}{20} + 35 \\ x &= \frac{13x}{20} + 35 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} x - \frac{13x}{20} &= 35 \\ \frac{20x - 13x}{20} &= 35 \\ \frac{7x}{20} &= 35 \\ 7x &= 35 \times 20 \\ x &= \frac{35 \times 20}{7} \\ x &= 5 \times 20 \\ x &= 100 \end{aligned}$$

olur. Gökçe baban sana 100 TL verecek. Benim merak ettiğim kotun fiyatı ise $100 \times \frac{2}{5} = 40$ TL'dir.

Oh be rahatladım. Hepinize teşekkür ederim.



İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

Geçen hafta, Almanya'dan bir hoca seminer vermek üzere matematik bölümüne geldi. Hocamız ülkesine dönmeden önce, bir halı aldı.

Nasıl bir halı aldı hocam?

Ününü duymuş olduğu Hereke halısı aldı.

Hereke halılarının çok pahalı olduğunu duymuştum. Ne kadar büyüklükte bir halı aldı acaba? Çok merak ettim.

Dikdörtgen şeklinde bir halı aldı. Halının alanı 6 m^2 ve uzun kenarı kısa kenarından 1 metre fazlaydı.

Hocam, ama halının boyutlarını söylemediniz.

Ben bu halının boyutlarını bulabilirim. Dikdörtgenin alanı, uzun kenarı ile kısa kenarının çarpımına eşittir. Buna göre, halının kısa kenarına x dersek, uzun kenarı $x+1$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} x(x+1) &= 6 \\ x^2+x &= 6 \quad \text{ya da} \\ x^2+x-6 &= 0 \end{aligned}$$

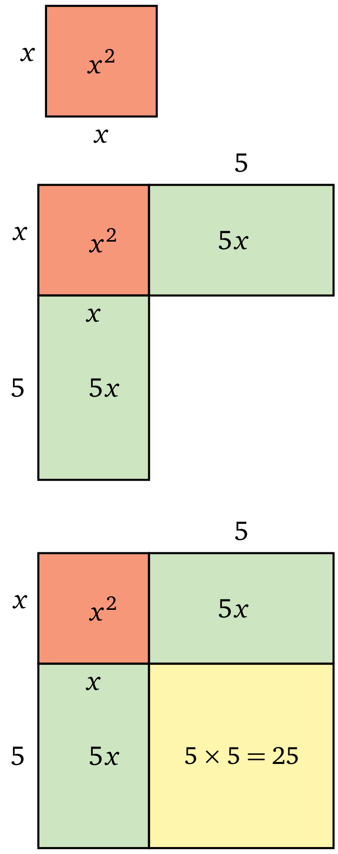
denklemini yazabilirim.

Bu denklemde x^2 var. Pınar Hoca böyle denklemlere, ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem demişti ama çözümünü anlatmamıştı.

Matematik tarihine baktığımızda, İslam dünyasının büyük bir matematikçisi olan Harezmi, bu tür denklemleri geometrik yaklaşımla çözmüştür. Şimdi, Harezmi'nin

$$x^2 + 10x = 39$$

denklemini nasıl çözdüğünü görelim. Önce, kenar uzunluğu x birim olan bir kare alalım (Şekil 2.5). Sonra bu kareye iki kenarından, kenar uzunlukları 5 ve x birim olan iki dikdörtgen ekleyelim (Şekil 2.5).



Şekil 2.5: Kareye tamamlama.

Hocam, eklediğiniz dikdörtgenlerin kenarlarından birini neden 5 birim aldınız?

$x^2 + 10x = 39$ denklemini $x^2 + 5x + 5x = 39$ şeklinde yazabiliriz. Dikkat ederseniz $5x$ br^2 eklediğimiz dikdörtgenlerin alanına karşılık geliyor. Yani, denklemimizde $10x$ terimi olduğu için, her birinin alanı $5x$ olan iki tane dikdörtgen ekledik.

Sanırım sağ alt köşedeki boşluğu doldurursak, şeklimiz daha güzel görünecek.

O zaman şeklimizi, alanı $5 \times 5 = 25$ br^2 olan kareyle tamamlayalım (Şekil 2.5). Oluşan bu şekil size tanıdık geldi mi?

Evet hocam, oluşturduğumuz bu şekil, kenarı $x + 5$ olan bir karedir ve bu karenin alanı da $(x+5)^2$ olur.

Dikkat ederseniz, bu karenin alanını,

$$(x+5)^2 = x^2 + 5x + 5x + 25 = x^2 + 10x + 25$$

şeklinde de yazabiliriz. Harezmi'nin ele aldığı denklem, $x^2 + 10x = 39$ olduğundan, yukarıdaki eşitlikte $x^2 + 10x$ yerine 39 yazarsak,

$$\begin{aligned}
(x+5)^2 &= 39 + 25 \\
(x+5)^2 &= 64 \\
x + 5 &= \mp\sqrt{64} \\
x + 5 &= 8 \quad \text{veya} \\
x + 5 &= -8
\end{aligned}$$

olur. Artık x kenar uzunluğunu bulabiliriz. $x+5=8$, buradan da $x=3$ elde ederiz. Peki, $x+5=-8$ alabilir miyiz?

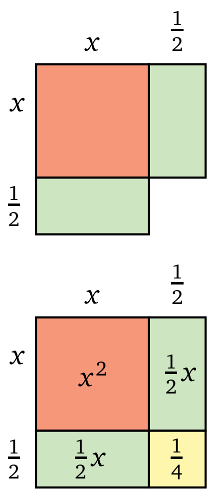
Hayır alamayız. Çünkü, $x+5$ oluşturduğumuz karenin kenar uzunluğudur ve dolayısıyla negatif bir sayı olamaz.

Ama bu eksili sayılar zorla kapıdan bacadan içeri giriyorlar işte. $x+5=-8$ dersek, $x=-13$ olur. Bunu denklemde yerine yazarsak, $x^2+10x=(-13)^2+10\cdot(-13)=169-130=39$ oluyor, yani -13 sayısı da pekala bir kök. Ama Harezmi onlara itibar etmiyordu. Şimdilik biz de bir kenara bırakıp, Alman hocanın halısına dönelim. Halının boyutlarını bulmak için,

$$x^2+x=6$$

denklemini, Harezmi'nin geometrik yaklaşımı ile çözelim.

Hocam, $x^2+x=6$ denklemini, Şekil 2.6'da görüldüğü gibi bir karenin alanı ile iki dikdörtgenin alanları toplamı olarak düşünebiliriz. Sonra, alanı $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ metre^2 olan kare ekleyerek, kenar uzunluğu $x+\frac{1}{2}$ olan kareye tamamlamış oluruz.



Şekil 2.6: Kareye tamamlama.

Selçuk'un bulduğu karenin alanı (Şekil 2.6) ise,

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 &= x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 &= x^2+x+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

olur. $x^2+x=6$ olduğundan, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=6+\frac{1}{4}=\frac{25}{4}$ bulunur. Her iki tarafın karekökü alınarak,

$$\begin{aligned}x+\frac{1}{2} &= \mp\sqrt{\frac{25}{4}}\\ x+\frac{1}{2} &= \frac{5}{2} \quad \text{veya}\\ x+\frac{1}{2} &= -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $x=2$ veya $x=-3$ buluruz. Ama uzunluk negatif olamayacağı için $x=2$ metre halının kısa kenarıdır. Uzun kenarı ise, bunun 1 metre fazlası olduğundan 3 metre olur.

Şimdi, kareye tamamlama fikrini kullanarak $ax^2+bx+c=0$ genel denklemini çözmeye çalışalım. Yani, $ax^2+bx+c=0$ eşitliğini sağlayan x değerlerini araştıralım. Bu eşitliği $a \neq 0$ olduğu için,

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitliğin her iki tarafına a'ya bölerek elde ettiğimiz,

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

eşitliğini sağlayan x değerlerini araştıralım. Bunun için

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

özdeşliğinden yararlanacağız. Bu özdeşliğin her iki tarafından y^2 terimini çıkartarak,

$$x^2+2yx=(x+y)^2-y^2$$

özdeşliğini elde ederiz. Burada y yerine $\frac{b}{2a}$ alalım.

$$x^2+2\frac{b}{2a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Böylece,

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

eşitliğimizde $x^2+\frac{b}{a}x$ yerine eşitini koyarsak,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

şeklinde yazabiliriz.

Hocam, eşitlikte sol taraf bir tam kare olduğu için her iki tarafın karekökünü alırsak x değerlerini bulabiliriz.

Tanım a, b, c gerçel sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$$ax^2+bx+c=0$$

şeklindeki denklemlere ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler denir.

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$

eşitlikleri herhangi iki x ve y gerçel sayıları için doğrudur. Böyle eşitliklere özdeşlik denir.

Evet, ama dikkatli olmamız gerekiyor. Bunun için $x^2 = -1$ denklemi üzerinde tartışalım. Bu denklemin köklerini sorsam ne dersiniz?

$x = \mp\sqrt{-1}$ değil mi hocam?

Negatif sayıların gerçel sayılar içinde karekökü olmaz. Çünkü bir gerçel sayı pozitif de olsa, negatif de olsa, karesi pozitiftir. Sıfırın karesi de sıfırdır. O halde karesi -1 olan bir gerçel sayı yoktur.

Hocam o zaman bazı ikinci dereceden denklemlerin çözümü yoktur.

Arkadaşlar, demek ki bir sayının karekökünü alırken sayının işaretine dikkat edeceğiz.

Hem Zeynep'e hem de Selçuk'a birer aferin. Artık, eşitliğimize geri dönüp, yarım kalan işimizi bitirebiliriz. Elde ettiğimiz $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ eşitliğinde sağ taraf negatif değilse, yani $b^2 - 4ac \geq 0$ ise,

$$x + \frac{b}{2a} = \mp\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

yazabiliriz. Karekök içinde bulunan $b^2 - 4ac$ değeri, diskriminant olarak isimlendirilir ve Δ (Delta) ile gösterilir.

Şimdi, $\Delta = b^2 - 4ac$'nin işaretine göre durumu özetleyelim.

- $b^2 - 4ac > 0$ ise,

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad , \quad x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

yazabiliriz, yani denklemin

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

şeklinde iki tane çözümü vardır.

- $b^2-4ac=0$ ise $\sqrt{\Delta}=0$ olacağından,

$$x_1=\frac{-b+0}{2a}\quad,\quad x_2=\frac{-b-0}{2a}$$
$$x_1=-\frac{b}{2a}\quad,\quad x_2=-\frac{b}{2a}$$

  olup, denklemin kökleri eşit olur. Bu durumda denklemin tek kökü vardır. (Ya da iki kat kökü vardır da diyebiliriz.)

- $b^2-4ac<0$ ise denklemin kökü yoktur.

Demek ki Δ'nın üç durumuna göre verilen denklemlerin çözümlerini belirleyebiliriz.

Şimdi, ikinci dereceden bir denklemin çözümünü veren formülü kullanarak, $2x^2-3x+1=0$ denkleminin köklerini bulabilirsiniz.

Bunu ben çözmek istiyorum. Önce Δ'yı bulacağım.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 3^2-4\cdot1\cdot2\\ &= 9-8\\ &= 1\end{aligned}$$

Δ pozitif olduğu için iki kökü vardır. Bunlar,

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\cdot2} = \frac{3+1}{4} = 1\\ x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\cdot2} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

olup, Ç$=\left\{1,\frac{1}{2}\right\}$ dir.

Aferin Zeynep. Gerçekten de, denklemde önce x yerine 1, sonra $\frac{1}{2}$ yazarsak:

$$\begin{aligned}2\times1^2-3\times1+1 &= 0\\ 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\times\left(\frac{1}{2}\right)+1 &= 0\end{aligned}$$

olur.

Tanım $a,b,c\in\mathbb{R}$ ve $a\neq0$ olmak üzere,

$$ax^2+bx+c=0$$

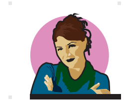
ikinci dereceden denkleminde,

- $\Delta>0$ ise iki kök vardır. $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta=0$ ise tek kök vardır. $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.
- $\Delta<0$ ise kök yoktur.

$$\Delta=b^2-4ac$$

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

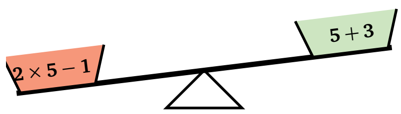
Artık terazimizin dengesini bozalım arkadaşlar.



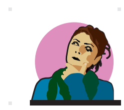
O zaman terazinin bir kefesi aşağıda bir kefesi yukarıda olacak.

Aslında terazinin dengesini korumak zor, bozmak çok kolaydır. Pınar Hoca'nızın daha önce verdiği $2x-1=x+3$ denklemini tekrar ele alalım. Hatırlarsanız, bu denklemin çözümü olan $x=4$'ü denklemde yerine koyduğumuzda terazi dengede kalmıştı (Şekil 2.4). Söyleyin bakalım $2x-1$ ile $x+3$ ifadelerini, x yerine 5 koyarak kefelere yerleştirdiğimizde, terazinin durumu ne olur?

$x=5$ için $2x-1$ ifadesi 9 değerini ve $x+3$ ifadesi ise 8 değerini alır. $x=5$ için $2x-1>x+3$ olur. Dolayısıyla terazinin durumu Şekil 2.7'de olduğu gibidir.

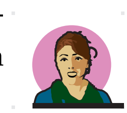


Şekil 2.7: Terazideki eşitsizlik durumu.

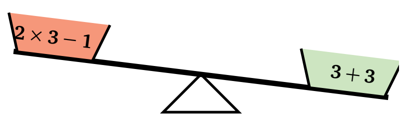


Acaba terazinin yönünü değiştirebilir miyiz?

Sen de bu sefer $x=3$ için dene bakalım.



$x=3$ için $2x-1$ ifadesi 5 değerini ve $x+3$ ifadesi ise 6 değerini alır. $x=3$ için $2x-1<x+3$ olur. Dolayısıyla terazinin durumu Şekil 2.8'de olduğu gibidir.



Şekil 2.8: Terazideki eşitsizlik durumu.

Terazinin dengesini bir bozdunuz ki tahterevalli gibi oldu.

Dengede olmayan terazide, bir eşitsizlik durumu söz konusudur. Böyle eşitsizliklere birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler denir.

Tanım a, b gerçel sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} ax+b &> 0 \\ ax+b &\geq 0 \\ ax+b &< 0 \\ ax+b &\leq 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilen bir eşitsizliğe birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik denir.

Denklemlerin çözümünde olduğu gibi, eşitsizliklerin çözümünde de eşitsizliklerle ilgili bazı özellikler kullanılır. Bunlar,

- Bir eşitsizliğin iki tarafına aynı sayının eklenmesi veya iki tarafından aynı sayının çıkarılması durumunda eşitsizlik bozulmaz.
- Bir eşitsizliğin iki tarafının pozitif bir sayı ile çarpılması veya bölünmesi durumunda eşitsizlik bozulmaz.
- Bir eşitsizliğin iki tarafının negatif bir sayı ile çarpılması veya bölünmesi durumunda eşitsizlik yön değiştirir.

Negatif sayılarla karşılaştığım zaman kafam karışıyor. Eşitsizliğin son bahsettiğiniz özelliğini anlayabilmem için örnek verebilir misiniz?

Gökçe, $-3 < -1$ olduğunu biliyorsun. Her iki tarafı -2 ile çarparsan,

$$\begin{aligned} (-2)(-3) &> (-2)(-1) \\ 6 &> 2 \end{aligned}$$

olur.

Şimdi $ax + b > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini araştıralım. Eşitsizliğin her iki tarafına $-b$ eklersek,

$$\begin{aligned} ax+b-b &> 0-b \\ ax &> -b \end{aligned}$$

buluruz.

Hocam x'i bulmak için her iki tarafı a'ya böleceğiz ama, eşitsizliğin bölme ile ilgili özelliğini dikkate almamız gerekiyor sanırım.

Bravo Selçuk.

Şekil 2.9: $\left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$ aralığı.

- $a > 0$ ise $x > -\frac{b}{a}$. Bu durumda eşitsizliğin çözüm kümesi,

$$\left(-\frac{b}{a}, \infty\right) = \left\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > -\frac{b}{a}\right\}$$ aralığıdır (Şekil 2.9).

Şekil 2.10: $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ aralığı.

- $a < 0$ ise $x < -\frac{b}{a}$. Bu durumda çözüm kümemiz,

$$\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right) = \left\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < -\frac{b}{a}\right\}$$ aralığıdır (Şekil 2.10).

Hocam, bir örnek verirseniz daha iyi anlayacağım.

Örnek $-5x + 3 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$$\begin{aligned} -5x + 3 &> 0 \\ -5x + 3 - 3 &> 0 - 3 \\ -5x &> -3 \end{aligned}$$

-5 negatif olduğundan, -5 ile böldüğümüzde eşitsizlik yön değiştirecek.

$$\begin{aligned} \frac{-5x}{-5} &< \frac{-3}{-5} \\ x &< \frac{3}{5} \end{aligned}$$

buluruz. Buna göre eşitsizliğin çözüm kümesi $\left(-\infty, \frac{3}{5}\right)$ aralığıdır.

Diğer eşitsizliklerin çözüm kümelerini de benzer şekilde bulabiliriz. İkinci dereceden eşitsizliklere başlamadan önce bir ara verelim isterseniz arkadaşlar.

Arkadaşlar bugün çaylar benden.

Hepimize çay ısmarlayabilecek misin Engin?

20 TL param var. Ama 10 TL ile kitap alacağım. Bir bardak çay 75 kuruş olduğuna göre, kaç kişiye ısmarlayabilirim? Onu da siz bulun.

Bize bir eşitsizlik problemi sordun, farkında mısın?

Eşitsizlik konusunu yeni öğrendik. Sanırım ben bunu çözebilirim. Çay için 10 TL para kalıyor. Engin'in çay alabileceği kişi sayısına x dersek, 75 kuruş da $\frac{3}{4}$ TL'ye denk olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x &\le 10 \\ 3x &\le 40 \\ x &\le 13,\bar{3} \end{aligned}$$

bulunur. Eşitsizliğin çözümüne göre en fazla 13 kişiye çay ısmarlayabileceksin Engin.

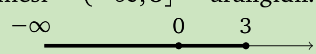
O zaman gelsin çaylar!

Pınar Hoca'ya söyleyelim. Ders arasında bile eşitsizlik problemi çözdük.

Örnek

$$\begin{aligned} 6x-18 &\le 0 \\ 6x-18+18 &\le 0+18 \\ 6x &\le 18 \\ \frac{6x}{6} &\le \frac{18}{6} \\ x &\le 3 \end{aligned}$$

eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty,3]$ aralığıdır.



İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

a,b,c gerçel sayılar, $a \neq 0$ ve x herhangi bir gerçel sayı olmak üzere, $ax^2+bx+c > 0$, $ax^2+bx+c < 0$, $ax^2+bx+c \ge 0$ veya $ax^2+bx+c \le 0$ şeklinde yazılabilen eşitsizliklere ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler denir. Böyle bir eşitsizliği sağlayan x değerlerinin kümesine de bu eşitsizliğin çözüm kümesi denir.

Arkadaşlar, $x^2-x-2>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini birlikte bulmaya çalışalım. Önce x^2-x-2 ifadesini sıfır yapan değerleri bulalım. Yani, $x^2-x-2=0$ denklemini çözelim. Bu değerler $x=-1$ ve $x=2$'dir. Bu sayılar sayı doğrusunu üç aralığa ayırır. Bunlar, $(-\infty,-1)$, $(-1,2)$ ve $(2,\infty)$ aralıklarıdır. Bu aralıkların her birinde, x^2-x-2 ifadesi ya hep pozitif ya da hep negatif değer alır.

$$x^2-x-2=0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \mp \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_1 &= \frac{1+\sqrt{1+8}}{2} = 2 \\ x_2 &= \frac{1-\sqrt{1+8}}{2} = -1 \end{aligned}$$

Ç$=\{-1,2\}$

Hocam, bu aralıkların herhangi birisinde $x^2 - x - 2$ ifadesi, neden hep pozitif ya da hep negatif değer alır?

Aferin Selçuk, çok dikkatlisin. $x^2 - x - 2$ ifadesi, bu aralıkların birisinde farklı işaretli değerler almış olsaydı bu aralıkta en az bir noktada sıfır değerini alması gerekirdi. Ancak -1 ve 2'nin dışında başka bir noktada sıfır değerini alamayacağını biliyoruz. Bu nedenle -1 ve 2 noktalarında $x^2 - x - 2$ ifadesi, ya pozitif değerden negatif değere ya da negatif değerden pozitif değere geçer.

Peki hocam, $x^2 - x - 2$ ifadesinin, bu aralıkların hangilerinde pozitif ya da negatif değer aldığını nasıl bulacağız?

$x^2 - x - 2$'nin işaretini belirlemek istediğimiz aralıktan bir sayı seçeriz. Bu sayıyı, $x^2 - x - 2$ ifadesinde yerine yazarız. Bulduğumuz değerin işareti $x^2 - x - 2$'nin bu aralıktaki işaretidir. Çünkü bu aralıkta, $x^2 - x - 2$ ifadesinin işaret değiştirmediğini biliyoruz.

O zaman, belirlediğimiz mavi, siyah, turuncu renkli aralıklarından birer değer alırım. Bu değerleri $x^2 - x - 2$ ifadesinde yerine yazarım. Örneğin, Mavi aralıktan -2'yi seçersem,

$$x^2 - x - 2 = (-2)^2 - (-2) - 2 = 4 + 2 - 2 = 4,$$

Siyah aralıktan 1'i seçersem,

$$x^2 - x - 2 = (1)^2 - (1) - 2 = 1 - 1 - 2 = -2,$$

Turuncu aralıktan 3'ü seçersem,

$$x^2 - x - 2 = (3)^2 - (3) - 2 = 9 - 3 - 2 = 4$$

bulurum. Mavi ve Turuncu aralıklarda $x^2 - x - 2$ ifadesi pozitif değer alır.

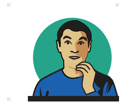
Gökçe bize, $x^2 - x - 2 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulmuş oldu. Verilen eşitsizliğin çözüm kümesi:
Ç=$(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

Şekil 2.11: $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ aralığı

O zaman, Siyah aralık da $x^2 - x - 2 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesidir diyebilir miyiz?

Siyah aralığa -1 ve 2 değerlerini de dahil edersen evet derim.

O zaman $x^2 - x - 2 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $[-1, 2]$ olur.

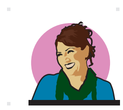


Şimdi de $x^2 - 4x + 4 \leq 0$ eşitsizliğini çözelim. Gökçe sen $x^2 - 4x + 4$ ifadesini sıfır yapan değerleri bulabilirsin.

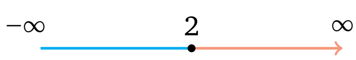
Formülden hemen bulurum. $x^2 - 4x + 4 = 0$,

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \mp \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$\Delta = 0$ olduğu için $x_1 = x_2 = 2$ dir.

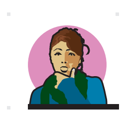


Arkadaşlar gördüğünüz gibi tek kök bulduk. Bulduğumuz 2 değeri sayı doğrusunu ikiye ayırır.



$x^2 - 4x + 4$ ifadesi, Mavi aralıktan $x = 1$'i seçersem $1 - 4 + 4 = 1 > 0$ olur. Turuncu aralıktan $x = 3$'ü seçersem $9 - 12 + 4 = 1 > 0$ olur. Her ikisinde de pozitif değer alır.

Aaa, iki aralıkta da $x^2 - 4x + 4$ ifadesi pozitif. Ne olacak şimdi?



$x^2 - 4x + 4$ ifadesi, hiç bir noktada negatif değil ama $x = 2$'de sıfırdır. $x^2 - 4x + 4 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi Ç=$\{2\}$ olur.

Hocam $x^2 + 1 > 0$ eşitsizliğinde, $x^2 + 1 = 0$ denkleminin kökünün olmadığını biliyoruz. Bu durumda, sayı doğrusunu nasıl böleceğiz?

Kök yoksa, $x^2 + 1$ ifadesi tüm gerçel sayılarda aynı işaretli değeri alır. Çünkü, $x^2 + 1$ ifadesi işaret değiştirmiş olsaydı, en az bir noktada sıfır değerini alırdı. Yani kökü olurdu. Ama $x^2 + 1 = 0$ denklemini sağlayan bir x gerçel sayısı olmadığını biliyoruz. Bundan dolayı, $x^2 + 1$ ifadesinin işaretini belirleyebilmemiz için herhangi bir sayı seçebiliriz.

Tamam o zaman, sıfırı seçelim işimiz kolay olsun. $x = 0$ için, $0^2 + 1 = 1 > 0$ olur. Buradan, tüm gerçel sayılarda $x^2 + 1$ ifadesinin pozitif olduğunu söyleyebiliriz. Böylece, bu eşitsizliğin çözüm kümesi gerçel sayılar kümesidir diyebilir miyiz hocam?

Aferin Zeynep. Söylediğin gibi, $x^2 + 1 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi gerçel sayılar kümesidir.

Özet

Bu ünitede, günlük hayatımızda karşılaştığımız problemlerin çoğunun çözümünde kullandığımız denklemler ve eşitsizlik konuları üzerinde durduk. Denklemlerle ilgili olarak, birinci ve ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler ve çözümlerinden bahsettik. Eşitsizliklerle ilgili olarak, birinci ve ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikleri ve çözümlerini örneklerle tartıştık.

Okuma Parçası

İskenderiye'li Diophantos

"Ne zaman yaşamış olduğu kesin belli değildir. Diophantos, Bombelli'ye göre Antoninus Pius (M.S. 150), Ebülfarac'a göre Mürted Julianus (M.S. 350) zamanında yaşamıştır. Fakat Psellus'a göre, 270 yılında Laodikea piskoposu olan İskenderiye'li Anatolios adlı bir bilgin Diophantos'a bir kitap ithaf etmiştir. Bundan dolayı çok defa Diophantos'un M.S. 250 civarında yaşadığı kabul edilir.

Anthologia Palatina'da rastlanan bir cebirsel bilmece-şiirinde Diophantos'un hayatı şöyle anlatılmaktadır:

Şu mezar Diophantos'u örtmektedir. Mucizeye bak! Mezar taşı ölenin sanatı sayesinde onun hayat hikayesini öğretiyor. Ömrünün altıda birini ona Allah çocukluk çağı için verdi; ömrünün onikide biri daha geçince yüzünde sakallar bitti; hayatının yedide biri daha geçtikten sonra evlilik bağını kurdu; beş yıl sonra da bu birleşmeden bir oğlu oldu.

Yazık ki çok sevdiği çocuğunun babanın yarı ömrü kadar yaşadıktan sonra ölmesi mukadderdi.

Ondan sonra dört yıl büyüklüklerle uğraşmak suretiyle acısını unutmaya çalışarak en sonunda o da her faninin hedefine ulaştı.

Diophantos'un esas eseri olan

Arithmetika

'çok muhterem Dionysios' a ithaf edilmiştir. Bu şahsın 247 civarında İskenderiye piskoposu olan Aziz Dionysios olması muhtemeldir. Girişinde eserin 13 kitap olacağı bildirilmektedir, ama bunlardan ancak altısı zamanımıza gelebilmiştir. Bu altı kitap çözümleriyle birlikte 189 problemi kapsamaktadır." [1]

Diophantos'un mezar taşında yazılı olan bilmeceye göre; Diophantos kaç yıl yaşamıştır?

Bu bilmeceye karşılık gelen denklem: x, Diophantos'un yaşamış olduğu yılı göstermek üzere,

$$x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4$$

olur. Bir bilinmeyenli birinci dereceden olan bu denklem çözülürse, çözümün $x = 84$ olduğu görülür. Buna göre, Diophantos 84 yıl yaşamıştır.

[1]: Bilimin Uyanışı, Eski Mısır, Babilonya ve Eski Yunan Matematiği (s. 460), B.L. Van Der Waerden, Çev. Orhan Ş. İçen ve Yılmaz Öner, Türk Matematik Derneği, İstanbul, 1994.

Çıkarın Kağıtları

1. Bir öğrenci parasının $\frac{3}{5}$'ini harcadıktan sonra 20 lirası kalıyor. Bu öğrencinin harcama yapmadan önceki parası aşağıdakilerden hangisidir?

A) 100 **B)** 60 **C)** 50

D) 40 **E)** 30

2. $2(x+3)+3(x-1)=x+7$ denkleminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** 1 **C)** $\frac{3}{2}$

D) 2 **E)** 3

3. Bir annenin yaşı oğlunun yaşının 5 katıdır. 3 yıl önce annenin yaşı oğlunun yaşının 8 katı olduğuna göre, çocuğun yaşı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7 **B)** 8 **C)** 10

D) 12 **E)** 15

4. $x^2-3x+4=0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{0,1\}$ **B)** $\{-1\}$ **C)** $\{1,2\}$

D) $\{2\}$ **E)** $\emptyset$

5. Ece odasına dikdörtgen şeklinde olan 8 m^2 bir kilim aldı. Bu kilimin uzun kenarı, kısa kenarından 2 metre fazla olduğuna göre kısa kenar uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3

D) 4 **E)** 5

6. $x^2+2x+1=0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{3\}$ **B)** $\{0,2\}$ **C)** $\{1\}$

D) $\{-1\}$ **E)** $\{-2,2\}$

7. Efe'nin 40 TL'si var. Bu paranın 17 TL'si ile bir kitap alıyor. Efe geriye kalan parası ile, tanesi 4 TL olan defterlerden en fazla kaç tane satın alabilir?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5

D) 6 **E)** 7

8. $3(x-1)+2>x+5$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(3,\infty)$ **B)** $(4,\infty)$

C) $(-\infty,3)$ **D)** $(-\infty,4)$

E) $(-3,\infty)$

9. Yarısının 8 fazlası 11'den büyük olan sayıların kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty,3)$ **B)** $(-\infty,6)$

C) $(6,\infty)$ **D)** $(3,\infty)$

E) $\{6\}$

10. $x^2+5x-6<0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-6,1)$ **B)** $(-\infty,-6)$

C) $(1,\infty)$ **D)** $(-6,1)$

E) $(-6,1]$

Çözümler

1. x öğrencinin harcama yapmadan önceki parası olsun. Bu durumda,

$$x = \frac{3}{5}x + 20$$

denklemi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \underset{(5)}{\frac{x}{1}} - \underset{(1)}{\frac{3}{5}}x &= 20 \\ \frac{5x - 3x}{5} &= 20 \\ \frac{2x}{5} &= 20 \\ x &= 50 \text{ TL} \end{aligned}$$

Doğru cevap C şıkkıdır.

2.

$$\begin{aligned} 2(x+3) + 3(x-1) &= x + 7 \\ 2x + 6 + 3x - 3 &= x + 7 \\ 5x + 3 &= x + 7 \\ 4x &= 4 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Doğru cevap B şıkkıdır.

3. Çocuğun bugünkü yaşına x dersek annesinin yaşı $5x$ olur. 3 yıl önce ise çocuk $x-3$ ve anne $5x-3$ yaşındaydı. Buna göre,

$$5x - 3 = 8(x-3)$$

denklemi kurulabilir. Bu denklem çözülürse,

$$\begin{aligned} 5x - 3 &= 8(x-3) \\ 5x - 3 &= 8x - 24 \\ 3x &= 21 \\ x &= \frac{21}{3} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

bulunur. Doğru cevap A şıkkıdır.

4. $x^2 - 3x + 4 = 0$ denklemini çözmek için, önce Δ hesaplanır.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \\ &= 9 - 16 = -7 \end{aligned}$$

$\Delta = -7$ negatif olduğundan gerçel çözüm yoktur.
Doğru cevap E şıkkıdır.

5. Kilimin kısa kenarına x dersek uzun kenarı $x+2$ olur. Kilim dikdörtgen şeklinde olduğundan,

$$x(x+2) = 8$$

denklemi yazılabilir. $x^2 + 2x - 8 = 0$ ikinci dereceden denklem olup,

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 \quad \text{dır.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2 + \sqrt{36}}{2} \\ &= \frac{-2 + 6}{2} \\ &= 2 \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2 - \sqrt{36}}{2} \\ &= \frac{-2 - 6}{2} \\ &= -4 \end{aligned}$$

$x_1 = 2$ ve $x_2 = -4$'dür. Uzunluk negatif olamayacağından $x = 2$ metre kilimin kısa kenarının uzunluğudur.
Doğru cevap B şıkkıdır.

6. $x^2+2x+1=0$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 4-4\cdot1\cdot1\\ &= 4-4=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{-2\mp\sqrt{0}}{2}\\ &= \frac{-2}{2}\\ &= -1\end{aligned}$$

Doğru cevap D şıkkıdır. Bu soruyu şöyle de çözebilirdik:

$$x^2+2x+1=(x+1)^2$$

özdeşliği geçerlidir. O halde,

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &= 0\\ x+1 &= 0\\ x &= -1\end{aligned}$$

bulunur.

7. Efe'nin defterler için $40-17=23$ TL'si kalıyor. x defter sayısını göstermek üzere,

$$\begin{aligned}4x &\le 23\\ x &\le \frac{23}{4}\\ x &\le 5,75\end{aligned}$$

olur. Böylece Efe en fazla beş defter alabilir. Doğru cevap C şıkkıdır.

8.
$$\begin{aligned}3(x-1)+2 &> x+5\\ 3x-3+2 &> x+5\\ 3x-1 &> x+5\\ 2x &> 6\\ \frac{2x}{2} &> \frac{6}{2}\\ x &> 3\end{aligned}$$

Ç=$(3,\infty)$ aralığıdır.
Doğru cevap A şıkkıdır.

9.
$$\begin{aligned}\frac{x}{2}+8 &> 11\\ \frac{x}{2}+8-8 &> 11-8\\ \frac{x}{2} &> 3\\ x &> 6\end{aligned}$$

Ç=$(6,\infty)$ aralığıdır.
Doğru cevap C şıkkıdır.

10. $x^2+5x-6<0$ eşitsizliğinin çözümü için önce,
$x^2+5x-6=0$ denkleminin kökleri bulunur.

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{-5\mp\sqrt{25-4\cdot1\cdot(-6)}}{2}\\ &= \frac{-5\mp7}{2}\end{aligned}$$

$$x_1=\frac{-5-7}{2}$$
$$x_1=\frac{-12}{2}$$
$$x_1=-6$$

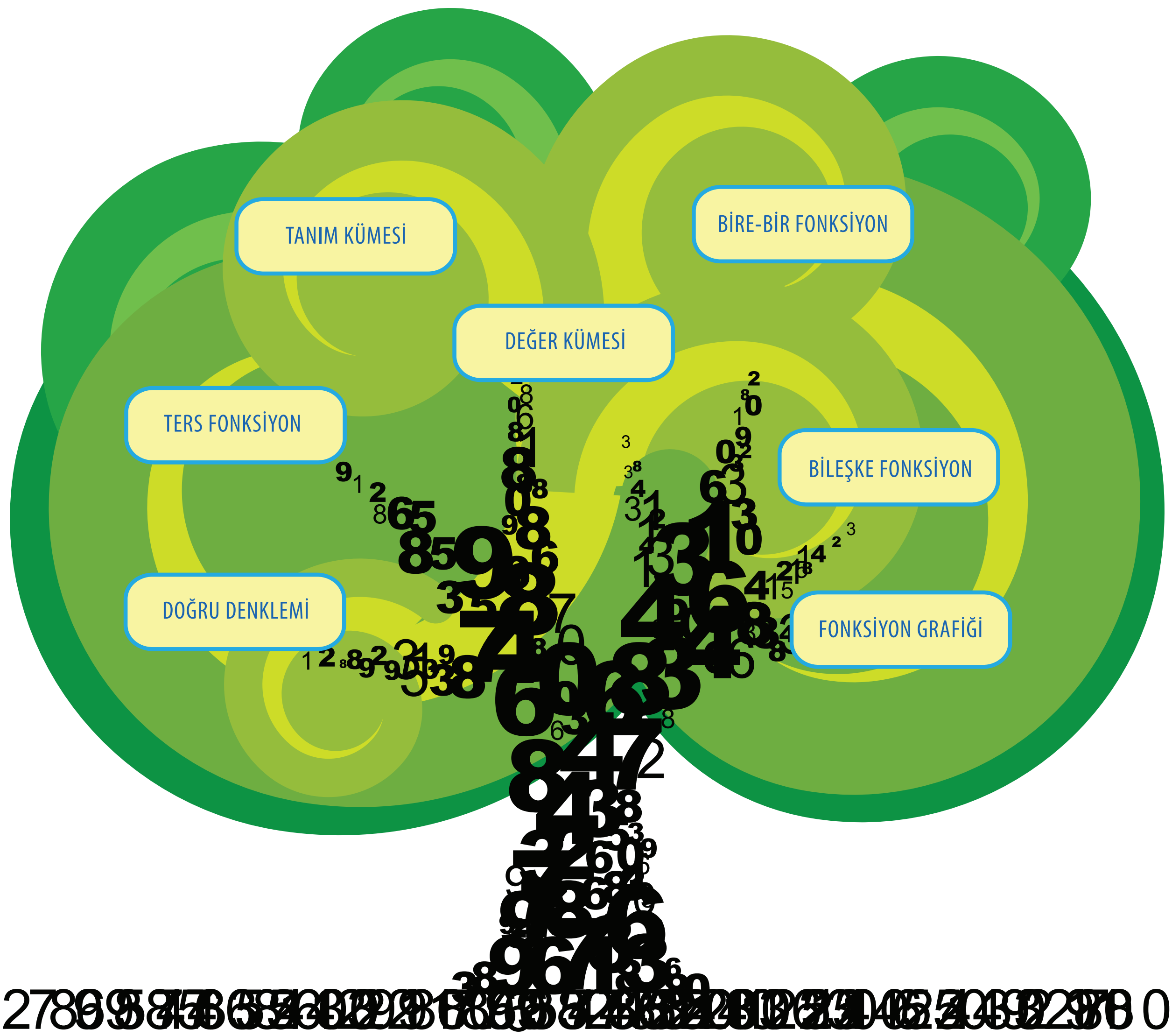
$$x_2=\frac{-5+7}{2}$$
$$x_2=\frac{2}{2}$$
$$x_2=1$$

-6 ile 1 arasında bulunan x değerleri için x^2+5x-6 ifadesinin işaretini bulmak için $(-6,1)$ aralığından $x=0$ seçilip, x^2+5x-6 ifadesinde yerine konulursa $0^2+5\cdot0-6=-6<0$ olur. Böylece x^2+5x-6 ifadesinin bu aralıkta negatif olduğu görülür.

Ç=$(-6,1)$ aralığıdır.
Doğru cevap D şıkkıdır.

Fonksiyonlar

3. GENEL MATEMATİK ÜNİTE



Fonksiyonlarla Tanışma Partisi!

Şairim,
Zifiri karanlıkta gelse şiirin hası,
Ayak seslerinden tanırım.
Ne zaman bir köy türküsü duysam,
Şairliğimden utanırım...

demiş şair. Peki kimdir bu şair biliyor musunuz?

Ben biliyorum hocam. Bedri Rahmi Eyüboğlu. Çok da severim bu şiiri.

Bravo Engin! Gençler bugün size ünlü şairlerin şiirlerinin bulunduğu güzel bir şiir kitabı getirdim.

Yaşasın! Arkadaşlar bugün matematikten kurtulduk.

Olur mu Gökçe? Matematiğin olmadığı bir yer var mı? Ünlü Bilim insanı Galileo bu konuyla ilgili bak ne güzel söylemiş: "*Kainat dediğimiz kitap, yazıldığı dil ve harfler öğrenilmedikçe anlaşılamaz. O, matematik dilinde yazılmış; harfleri üçgen, daire ve diğer geometrik şekillerdir. Bu dil ve harfler olmaksızın kitabın bir tek sözcüğünü anlamaya olanak yoktur.*"

Vay be hocam, bir de biz görebilsek evrendeki matematiği çok güzel olacak. O bizimle saklambaç oynuyor sanki. Mesela bu şiir kitabının neresinde matematik var çok merak ettim doğrusu.

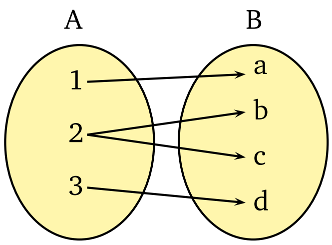
Sabırlı ol Selçuk. Birazdan elimdeki bu kitapla bir fonksiyon tanımlayacağız.

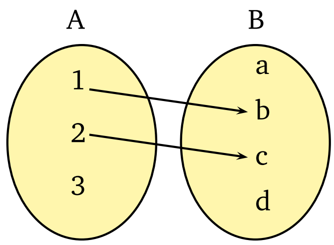
Fonksiyon mu! Oldum olası sevemedim gitti şu fonksiyonlar konusunu! Bana kalırsa kesin fonksiyonlarla ilgili bir şiir var o kitapta, başka ne olabilir ki?

Her zamanki gibi atladın yine Gökçe! Önce bir düşün bakalım, bir fonksiyon tanımlamak için neler gerekliydi?

Öncelikle, fonksiyonun tanım kümesi dediğimiz bir küme ile fonksiyonun değer kümesi adını verdiğimiz bir küme olmalı.

Bravo Zeynep! Sonra da tanım kümesindeki her elemana değer kümesinden bir eleman karşılık getirilmeli. Fakat bir noktayı vurgulayalım. Bu gönderimde tanım kümesindeki bir elemana değer kümesinde birden fazla eleman karşılık getirilmemeli.
Örneğin, $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b, c, d\}$ kümeleri için, aşağıdaki eşlemeler A kümesinden B kümesine birer fonksiyon olamaz.





Bu eşlemelerin neden fonksiyon olmadığını açıklayın bakalım.

Hocam soldaki eşlemede A kümesinin elemanı olan 2, B kümesinin hem b hem de c elemanıyla, yani birden fazla elemanıyla eşlendiğinden bir fonksiyon olamaz. Diğer eşlemede ise A kümesinin elemanı olan 3, B kümesinin hiçbir elemanıyla eşlenmemiştir. Bu yüzden bu eşlemeler fonksiyon olamaz.

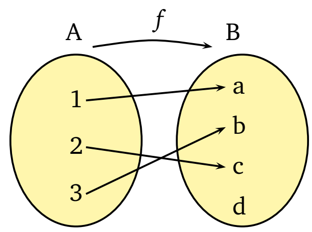
Güzel! Hadi bakalım şimdi de siz bana $A = \{1, 2, 3\}$ kümesinden $B = \{a, b, c, d\}$ kümesine birer fonksiyon tanımlayın.

Ben bir f fonksiyonu tanımladım, ama yer kaplamasın diye vitrine yerleştirdim, malum daha öğreneceğimiz çok şey var. Şekil 3.1'e bakabilirsiniz.

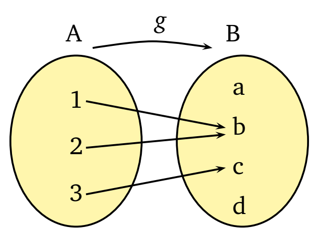
Bir fonksiyon da ben tanımlayayım, adı da g olsun. Ben de vitrine koydum, Şekil 3.2'de.

Tanım Boş kümeden farklı A ve B kümeleri alalım. A kümesinden B kümesine bir f fonksiyonu, A kümesinin her elemanına B kümesinin bir tek elemanını karşılık getirir. Burada A kümesine f fonksiyonunun tanım kümesi, B kümesine ise değer kümesi denir. A kümesinden B kümesine bir f fonksiyonu, $f : A \to B$ veya $A \xrightarrow{f} B$ şeklinde gösterilir.

Fonksiyonun tanım kümesine kalkış kümesi diyebildiğimiz gibi, değer kümesine de varış kümesi diyebiliriz.



Şekil 3.1: $\{1, 2, 3\}$ kümesinden $\{a, b, c, d\}$ kümesine bir fonksiyon.



Şekil 3.2: $\{1, 2, 3\}$ kümesinden $\{a, b, c, d\}$ kümesine bir başka fonksiyon.

Bravo size! Söyleyin bakalım 1'in f altında görüntüsü olan $f(1)$ ve g altında görüntüsü olan $g(1)$ nedir?

Bir $f : A \to B$ fonksiyonunu ve A kümesinin bir a elemanını düşünelim. f fonksiyonunun tanım kümesindeki a elemanını, değer kümesinde eşlediği elemana, a'nın f altındaki görüntüsü diyeceğiz ve $f(a)$ ile göstereceğiz.

Hocam ne var ki bunda, ben bile biliyorum bunu! 1'den çıkan oku takip edince sonucu buluruz. $f(1) = a$ ve $g(1) = b$'dir. Benzer şekilde,

$$f(2) = c \;, \quad f(3) = b \;,$$
$$g(2) = b \;, \quad g(3) = c.$$

Tamam çok iyi. Şimdi de Engin ve Gökçe'nin verdiği fonksiyonların görüntü kümelerini bulalım. Görüntü kümesi deyince, tanım kümesindeki elemanların fonksiyon altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümeyi anlıyoruz. Görüntü kümesinin değer kümesinin alt kümesi olduğuna da dikkat ediniz.

Tanım $f : A \to B$ fonksiyonu için, A kümesindeki elemanların f altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümeye, f'nin görüntü kümesi denir ve bu küme $f(A)$ olarak gösterilir. O halde f'nin görüntü kümesi,

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

kümesidir.

Hocam, o zaman bu fonksiyonların görüntü kümelerini ben bulayım.

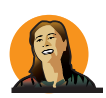
$$f(A) = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{a, b, c\}$$

kümesidir. Şimdi de g'nin görüntü kümesini bulayım:

$$g(A) = \{g(1), g(2), g(3)\} = \{b, c\}.$$

Şimdi gelelim şiir kitabımıza ve onun yardımıyla vereceğimiz fonksiyon örneğimize. Tanımlayacağımız fonksiyonun tanım kümesi bu kitaptaki şiirlerin kümesi olsun. Peki, şimdi size "İstanbul'u dinliyorum gözlerim kapalı" desem, hangi şair gelir aklınıza?

Orhan Veli gelir tabii ki hocam.



Hımm, benim zihnimde ışıklar yanmaya başladı sanki!

Şiirsever Engin'e bravo. Tanımlayacağımız fonksiyonun değer kümesi de, bu kitapta şiirlerine yer verilen şairlerin kümesi olsun. Bir fonksiyon verebilmek için başka neyi belirtmeliyiz?

Tanım kümesindeki herhangi bir elemanı, değer kümesinin hangi elemanıyla eşleyeceğiz onu söylemedik.

Tabii ya, kalkış kümesinden yola çıktık, o eşleme bize her elemanın varış kümesinde nereye varacağını söyleyecek.

Tanım kümesinden aldığım bir şiiri, değer kümesindeki şairiyle eşleyelim. Bu durumda hem tanım kümesinde her eleman eşlenmiş olur, hem de tanım kümesindeki bir eleman, değer kümesindeki birden fazla elemanla eşlenmemiş olur.

Hocam, yalnız o kitapta müşterek yazılmış şiirler yok değil mi? Ondan emin olalım da! Yoksa tanım kümemizdeki bir eleman, değer kümesinin birden fazla elemanıyla eşlenmiş olur ki bu durumda da fonksiyon olamaz.

Yok tabii ki Zeynep, her şiirin tek şairi var bu kitapta. Bakın işte size pırıl pırıl bir fonksiyon örneği. Bu kitaptaki şiirler kümesinden, bu kitapta şiirleri olan şairler kümesine, şiirleri şairleriyle eşleyen...

İyi de hocam, bu nasıl bir fonksiyon şimdi? İçinde ne rakam var ne dört işlem!

Gökçe, biz fonksiyon kavramını tanımlarken içinde illa ki toplama, çıkarma, çarpma, bölme olsun dedik mi?

Düşüneyim, hayır demedik hocam. Tamam o zaman, ben de şairler kümesinden şiirler kümesine bir fonksiyon tanımlayayım. Fonksiyonum, her şairi yazdığı şiirle eşlesin.

Dur bakalım Gökçe! Daha dikkatli olman gerekiyor. Öyle kafana göre kümeler alıp, aradaki ilişkiyi de kafana göre veremezsin. Şair kime denir, şiir neye denir? Bunları halletsen bile, çoğu şairin birden çok şiiri var zaten.

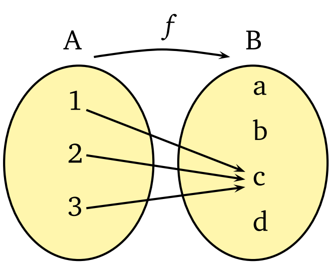
Tanım kümesindeki her elemana, değer kümesinde bir tek elemanın karşılık getirilmesi gerekirdi, yine olmadı!

Hocam benim aklıma da şöyle bir örnek geldi. Tanım kümesi yine kitaptaki şiirler kümesi olsun, ama değer kümesini doğal sayılar olarak değiştirelim. Kalkış kümesinden bir şiir alalım, o şiir kaç mısradan oluşuyorsa, varış kümesindeki o sayı ile eşleyelim.

Evet Selçuk güzel, bu da başka bir fonksiyon örneği oldu. Şimdi yine şiirlere şairlerini karşılık getirdiğimiz örneğimize dönelim. Orhan Veli Kanık'a ait bütün şiirleri, Orhan Veli Kanık ile eşledik hatırlarsanız. Bir fonksiyon için bunun bir sakıncası yok. Verdiğiniz eşleme ile, tanım kümesinde birden fazla eleman, değer kümesinin aynı elemanına gönderilebilir. Hatta tanım kümesinin bütün elemanları bile, değer kümesinin aynı elemanına gönderilebilir.

Tanım $f : A \to B$ fonksiyonu A kümesinin her elemanını B kümesinin aynı elemanı ile eşliyorsa f'ye sabit fonksiyon denir.
Yani $c \in B$ olmak üzere, A kümesinden alınan her a elemanı için $f(a) = c$ ise f'ye sabit fonksiyon denir.

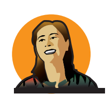
Eğer bir fonksiyon, tanım kümesinin tamamını, değer kümesinin aynı elemanı ile eşliyorsa, o fonksiyona sabit fonksiyon diyorduk değil mi hocam?



Şekil 3.3: $A = \{1, 2, 3\}$ kümesinden $B = \{a, b, c, d\}$ kümesine bir sabit fonksiyon.

Evet Engin, öyle diyorduk. Şimdi de biraz bire-bir fonksiyonlar ne demekti onu hatırlayalım gençler.

Hocam bunu hatırlasa hatırlasa Zeynep hatırlar!



Hazırlanıp geliyoruz derse hayatım. Bire-bir fonksiyon, tanım kümesindeki farklı elemanları, değer kümesinde farklı elemanlarla eşler.

Peki, bire-bir olan bir fonksiyon örneği düşünün bakalım.

Tanım $f : A \to B$ fonksiyonu verilsin. $x_1, x_2 \in A$ olmak üzere $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ oluyorsa, f fonksiyonuna bire-bir(1-1) fonksiyon denir. Buna denk olarak $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ ise f'ye bire-bir fonksiyon denir.

Kalkış kümemiz Türkiye'deki iller kümesi, varış kümemiz de doğal sayılar kümesi olsun. Tanım kümesindeki her ili, değer kümesindeki ilgili şehirlerarası telefon kodu ile eşleyelim. Örneğin, Eskişehir'i 222 ile, Ankara'yı 312 ile...

Engin bugün formundasın. Farklı illerin şehirlerarası telefon kodları birbirinden farklı olduğundan, tanım kümesindeki farklı iki elemana, değer kümesinin aynı elemanı karşılık gelmez.

Evet bu tür fonksiyonlar, piyanonun tuşlarından çıkan sesler gibidir gençler! Basılan her tuştan mutlaka bir notanın sesi çıkar, fakat bir tuştan birden fazla notanın sesi de çıkmaz; çünkü fonksiyondur o herşeyden önce! Ayrıca farklı yerlerde bulunan herhangi iki tuşun sesi de farklıdır, işte bu da bire-birliği temsil eder.

Tanım $f : A \to B$ fonksiyonu verilsin. Her $b \in B$ için $f(a) = b$ olacak şekilde bir $a \in A$ varsa, f fonksiyonuna örten fonksiyon denir. Ya da buna denk olarak, görüntü kümesi değer kümesine eşit olan fonksiyona, örten fonksiyon denir. Yani $f : A \to B$ fonksiyonu için $f(A) = B$ ise f örtendir.

Hocam, değer kümesinde neden ihtiyacımız kadar olan elemanları almıyoruz da fazladan, gereksiz elemanlarla uğraşıyoruz? Mesela Engin'in örneğinde değer kümesi doğal sayılar kümesi olmasın, Türkiye'deki bütün illerin şehirlerarası telefon kodları neyse o sayıların oluşturduğu küme olsun, yani doğal sayıların seksen bir elemanlı alt kümesi olsun, gerisini atalım gitsin.

Ne güzel söylüyorsun Gökçe. Senin söylediğin bu türden fonksiyonların bir adı bile var.

Evet, örten fonksiyon diyorduk galiba...

Tabii ya, örten fonksiyon diyoruz. Değer kümesi görüntü kümesine eşit olan fonksiyonlardır onlar.

O zaman değer kümesini, doğal sayılar kümesi değil de, onun bir alt kümesi olan, seksen bir ilin şehirlerarası telefon kodlarının oluşturduğu küme olarak değiştirelim.

Fonksiyonu değiştiriyorsun yani şimdi, öyle mi?

$f, g : A \to B$ fonksiyonları verilsin. Eğer tanım kümesinden aldığımız her a elemanı için, $f(a) = g(a)$ oluyorsa, f ile g fonksiyonları eşittir.

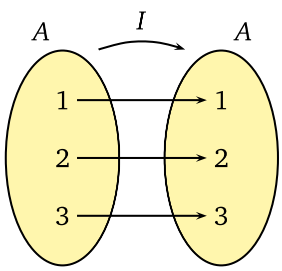
Hayır hocam fonksiyonu değiştirmedim ki, sadece onun değer kümesini daralttım.

Gökçe, değer kümesini değiştirince fonksiyonu da değiştirmiş oluyorsun. İki fonksiyonun eşit olması demek, tanım kümelerinin, değer kümelerinin ve tanım kümesindeki elemanların eşlenme biçimlerinin aynı olması demektir. Bunlardan birisini değiştirdiğin anda, artık o iki fonksiyon aynı değildir.

Evet, mesela az önce verdiğim, iller kümesinden doğal sayılar kümesine, her ili ilgili şehirlerarası kodu ile eşleyen fonksiyon örten değildi ama, Gökçe'nin değer kümesini değiştirmesiyle oluşan yeni fonksiyon, Türkiye'deki illerin kümesinden, şehirlerarası telefon kodlarının oluşturduğu kümeye tanımlı örten bir fonksiyon oldu.

Tanım $f : A \to A$ fonksiyonu A kümesinin her a elemanını yine a ile yani kendisi ile eşliyor ise f'ye A kümesinin birim fonksiyonu denir. Birim fonksiyon genelde f yerine I ile, veya tanım kümesini vurgulamak için I_A ile gösterilir.

Evet Engin haklısın. Demek ki bakın, sadece değer kümesini değiştirmek bile fonksiyonun özelliğini değiştiriyor. Bu yeni fonksiyonda olduğu gibi, bir fonksiyon hem bire-bir hem de örten ise o fonksiyona bire-bir örten fonksiyon diyoruz arkadaşlar. Hadi bakalım, bana bir tane daha bire-bir örten fonksiyon söyleyin.



Şekil 3.4: $A = \{1, 2, 3\}$ kümesinin birim fonksiyonu.

Birim fonksiyonlar hocam.

Evet Zeynep, güzel bir örnek. Tanım kümesi ile değer kümesi aynı olan ve tanım kümesindeki her bir elemanı kendisiyle eşleyen fonksiyona, o kümenin birim fonksiyonu diyoruz.

Elinizde bire-bir örten bir fonksiyon varsa, o fonksiyon yardımıyla hemen başka yeni bir fonksiyon tanımlayabilirsiniz gençler.

Nasreddin Hoca'nın doğuran kazanı gibi yani desenize.

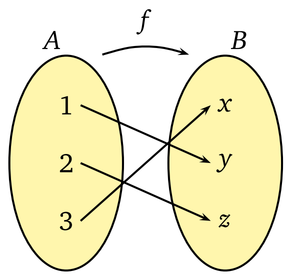
Yine işi dalgaya vuruyorsun Selçuk! Hepinizin kendine has parmak izi var değil mi? Farklı kişilerin parmak izleri de farklıdır. Bu nedenle herhangi bir suç işlendiğinde, olay yerindeki parmak izlerinden şüpheli kişilere ulaşılmaya çalışılır.

Tanım $f : A \to B$, bire-bir örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f fonksiyonunun ters fonksiyonu f^{-1} ile gösterilir. $f^{-1} : B \to A$ fonksiyonu $b \in B$ için $f^{-1}(b) = a$ olarak tanımlanır. Burada a, $f(a) = b$ eşitliğini sağlayan yegane elemandır.

Benzer şekilde, Nüfus ve Vatandaşlık İşleri Genel Müdürlüğü tarafından, Türkiye Cumhuriyeti vatandaşlarına, on bir haneli T.C. kimlik numarası verilir ve farklı kişilerin numaraları da farklıdır. Bu durumda, eğer siz bir kişinin T.C. kimlik numarasını biliyorsanız, o kişinin kim olduğunu da biliyorsunuz demektir.

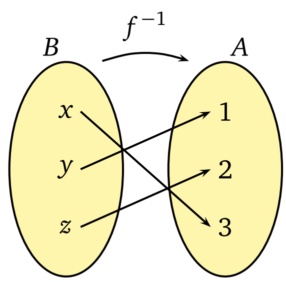
Engin'in Türkiye'deki illerin kümesinden, şehirlerarası telefon kodları kümesine tanımladığı fonksiyon da bire-bir örten olduğundan, o fonksiyonun ters fonksiyonunu, şehirlerarası telefon kodlarının kümesinden, Türkiye'deki illerin oluşturduğu kümeye tanımlayabiliriz.

Genel olarak bire-bir örten bir $f : A \to B$ fonksiyonu verildiği takdirde, o fonksiyonun $f^{-1} : B \to A$ ters fonksiyonu, B kümesinden alınan bir b elemanını $f(a) = b$ özelliğine sahip a elemanına gönderen bir fonksiyondur.



Şekil 3.5: $A = \{1, 2, 3\}$ kümesinden $B = \{x, y, z\}$ kümesine 1-1 örten f fonksiyonu.

İyi de hocam, neden sadece bire-bir ve örten fonksiyonların ters fonksiyonundan söz edebiliyoruz? Diğer fonksiyonların ne günahı var?



Şekil 3.6: f fonksiyonunun ters fonksiyonu.

Gökçe, $f : A \to B$ fonksiyonu örten değilse, o zaman B kümesinde, A kümesindeki hiçbir elemanın görüntüsü olarak ortaya çıkmayan en az bir eleman vardır. Bu durumda ters fonksiyonu tanımlarken bu elemanı nereye göndereceksin? Demek ki örtenlik şartı zorunlu. Diğer yandan fonksiyon bire-bir değilse, A kümesinde a_1 ve a_2 gibi öyle farklı iki eleman vardır ki, bunların görüntüleri aynı b elemanı olur. Bu durumda da, ters fonksiyonu tanımlarken b elemanını hangi elemana göndereceksin? a_1 veya a_2'den birini nedensiz bir şekilde seçmek biraz keyfilik olmaz mı? Demek ki bire-birliğe de ihtiyacımız var. İşte bu nedenlerle, ters fonksiyonları ancak bire-bir örten fonksiyonlar için tanımlarız.

Şimdi de fonksiyonların bileşkesinden bahsedelim. Öncelikle bileşke fonksiyon deyince ne anlıyorsunuz?

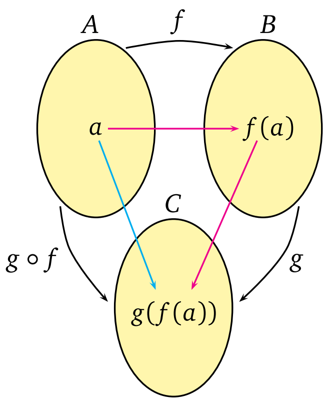
Kümelerin birleşimini görmüştük ama, fonksiyon bileşkesi daha farklı bir şey galiba.

Tamamen birbirinden farklı şeyler Selçuk. Bu sefer elimizde iki tane fonksiyon olsun ve birinin değer kümesi, diğerinin tanım kümesine eşit olsun. Bir örnekle açıklayayım: f fonksiyonunun tanım kümesi, sınıfımızdaki öğrencilerin kümesi, yani Gökçe, Engin, Selçuk ve Zeynep'ten oluşan küme; değer kümesi ise Türkiye'deki iller kümesi olsun. f fonksiyonu, tanım kümesindeki her bir elemana doğduğu şehiri karşılık getirsin. Bildiğim kadarıyla aranızda yurt dışında doğan yok herhalde. g fonksiyonu da, Türkiye'deki iller kümesinden Türk alfabesinin harfleri kümesine giden bir fonksiyon olsun ve her ili baş harfi ile eşlesin.

Tanım $f : A \to B$, $g : B \to C$ fonksiyonları verilsin. Bu durumda $g \circ f : A \to C$,

$$(g \circ f)(a) = g\left(f(a)\right)$$

fonksiyonuna, f ile g fonksiyonunun bileşke fonksiyonu denir.



f'nin değer kümesi ile g'nin tanım kümesi eşit oldu. Yani Türkiye'deki illerin kümesi.

Evet Zeynep, şimdi f'nin tanım kümesinden bir eleman alalım, yani bizim sınıftan birini, örneğin Selçuk'u alalım. f fonksiyonu Selçuk'u neyle eşledi?

Antep doğumluyum hocam, Gaziantep!

Tamam Selçuk. Bu durumda, f fonksiyonu seni Gaziantep ile eşledi. g fonksiyonu da, Gaziantep'e G harfini karşılık getirdi. Dolayısıyla f'nin tanım kümesinden seçilen Selçuk'a karşılık, g'nin değer kümesinden bir eleman bulmuş olduk. Bileşke fonksiyon Selçuk'u G harfi ile eşler. Bunu f'nin tanım kümesinde bulunan her eleman için yapabilirsiniz. İşte, f'nin tanım kümesinden, g'nin değer kümesine giden bu fonksiyona f ile g fonksiyonunun bileşkesi denir ve $g \circ f$ olarak gösterilir.

Şimdi bire-bir ve örten bir $f : A \to B$ fonksiyonu ile bunun $f^{-1} : B \to A$ ters fonksiyonunun bileşkesini alın bakalım.

$f : A \to B$ bire-bir ve örten fonksiyonu için,

$$f^{-1} \circ f = I_A$$

ve

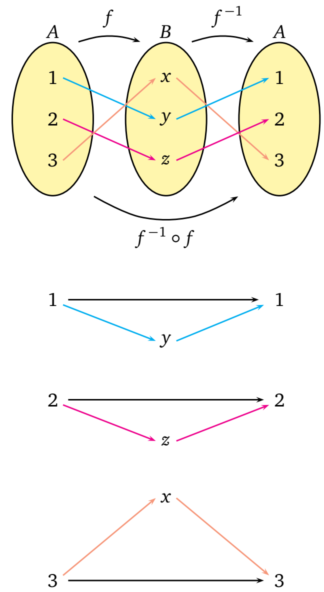
$$f \circ f^{-1} = I_B$$

olduğuna dikkat ediniz.

O fonksiyonla ters fonksiyonunun bileşkesi birim fonksiyon olur hocam.

Güzel Zeynep, ama bileşke alırken sıraya dikkat etmek gerekir. Hangi birim fonksiyonu elde ediyorsun? $f : A \to B$ bire-bir ve örtense,

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{ve} \quad f \circ f^{-1} = I_B \text{ olur.}$$



Gerçel Sayı Havuzunda Yüzen Fonksiyonlar

Arkadaşlar, artık bu aşamadan sonra gerçel sayıların bir alt kümesi üzerinde tanımlı, değer kümesi de gerçel sayıların bir alt kümesi olan fonksiyonlardan söz edeceğiz.

Fonksiyonun tanımlı olduğu küme sonsuz elemanlı da olabilir değil mi hocam?

Evet Selçuk. İşte bu kısımda tanım kümesinde bulunan sonsuz tane elemanın, değer kümesinde hangi elemanlara gönderildiğini söyleyen reçeteler ya da kurallar söz konusu olacak. Örneğin her sayıyı 2 fazlası ile eşleyen fonksiyonun kuralını $f(x) = x + 2$ olarak yazabileceğiz. x dediğimiz şey, tanım kümesinin her hangi bir elemanını temsil edecek.

İlk üniteden, negatif olmayan her sayının karekökünden söz edebildiğimizi hatırlarsınız. Bunu, negatif olmayan gerçel sayılar kümesinden gerçel sayılar kümesine giden bir fonksiyon olarak da düşünebiliriz. Bu fonksiyon, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde yazılabilir.

Ayrıca, bu reçete bazen $y = f(x)$ olarak da yazılabilir. $y = f(x)$ ifadesinde x'e bağımsız değişken, y'ye ise bağımlı değişken de denilmektedir. Örneğin, $y = f(x) = x^2 - 3$ ifadesinde y bağımlı değişkeni, x bağımsız değişkeninin bir fonksiyonudur ve bu fonksiyon her sayıyı kendisinin karesi olan sayının 3 eksiği ile eşler.
Evet arkadaşlar demek ki, fonksiyonun kuralı verildiği takdirde, tanım kümesindeki her sayının görüntüsünü bulabilirsiniz. Mesela, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^2 + x - 2$ kuralı ile verilen fonksiyon için, $x = 3$'e karşılık gelen $y = f(3)$ değerini nasıl bulabiliriz sizce?

$f(x) = x^2 + x - 2$ ifadesinde, x gördüğümüz yere 3 yazarsak

$$f(3) = 3^2 + 3 - 2 = 9 + 3 - 2 = 10$$

olarak buluruz.

Mutlak değer fonksiyonunu, parçalı tanımlı bir fonksiyon olarak ifade edebiliriz:

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$|x| = \begin{cases} -x & , \quad x < 0 \text{ ise} \\ x & , \quad x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Güzel Zeynep. Selçuk söyle bakalım, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & , \quad x < 1 \text{ ise} \\ x^3 - 5 & , \quad x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu için $f(-2)$ ve $f(2)$ nedir?

Hocam bu fonksiyonda iki tane kural var ama, hangisine göre bulayım istersiniz?

Hangisini kullanman gerekiyorsa onu kullanacaksın! Bu bir parçalı tanımlı fonksiyon örneğidir arkadaşlar. Fonksiyon 1'den küçük olan bir x sayısını $2x+3$ sayısına; 1'e eşit ya da 1'den büyük olan bir x sayısını da $x^3 - 5$ sayısına gönderiyor.

Anladım. -2 sayısı 1'den küçük olduğundan $(-2 < 1)$,

$$f(-2) = 2 \cdot (-2) + 3 = -4 + 3 = -1$$

dir. $f(2)$'yi de bulayım. 2 sayısı 1'den büyük olduğundan $(2 \geq 1)$,

$$f(2) = 2^3 - 5 = 8 - 5 = 3$$

olur.

Arkadaşlar şimdi fonksiyonlar arasında yapılan işlemlerden biraz bahsedelim. $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını düşünelim. Bu durumda bu iki fonksiyonun toplamından, farkından, çarpımından söz edebiliriz. Hatta, eğer tanım kümesinden alınan her a elemanı için $g(a)$'nın sıfırdan farklı olduğunu biliyorsak, $\frac{f}{g}$ bölüm fonksiyonundan da söz edebiliriz.

Öncelikle herhangi bir $a \in A$ için $f(a)$ ve $g(a)$ hangi kümenin elemanıdır?

Gerçel sayılar kümesinin elemanıdır tabii ki hocam!

Evet Gökçe, güzel. Peki $f(a)$ ile $g(a)$'yı toplayabilir miyiz?

Tabii ki toplayabiliriz, onlar birer gerçel sayı. Sayıları toplamasını da biliyoruz yani hocam!

Hiç şüphem yok Selçuk. Evet arkadaşlar, A kümesinden keyfi bir a elemanını aldıktan sonra, o sayıya $f(a)+g(a)$ şeklinde bir sayı karşılık getirdik. İşte f ile g fonksiyonlarının toplam fonksiyonu diye, A kümesinden gerçel sayılara tanımlı, bir a elemanını $f(a)+g(a)$ ile eşleyen fonksiyonu anlarız. Benzer biçimde, $f-g$, $f\cdot g$ ve $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonlarını da tanımlayabilirsiniz. Şimdi bunlarla ilgili bir örnek yapalım. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$, $\ g(x)=x-2$ fonksiyonlarını düşünelim. Bu durumda $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ ve $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonlarını bulabilir misiniz?

Tanım $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $g:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. Bu fonksiyonların toplam, fark ve çarpımları, $a\in A$ olmak üzere,

$f+g:A\to\mathbb{R}$,

$(f+g)(a)=f(a)+g(a)$

$f-g:A\to\mathbb{R}$,
$(f-g)(a)=f(a)-g(a)$,

$f\cdot g:A\to\mathbb{R}$,
$(f\cdot g)(a)=f(a)\cdot g(a)$

olarak tanımlanır. Ayrıca A kümesinin her a elemanı için $g(a)\neq 0$ ise bölüm fonksiyonu da,

$\dfrac{f}{g}:A\to\mathbb{R}$,
$\left(\dfrac{f}{g}\right)(a)=\dfrac{f(a)}{g(a)}$

olarak tanımlanır.

Ben bulayım hocam. Öncelikle $f+g$, $f-g$ ve $f.g$ fonksiyonlarının tanım kümesi, f ile g'nin tanım kümeleri ile aynıdır, yani gerçel sayılar kümesidir. O halde bu fonksiyonların her biri $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$ ye fonksiyonlardır. Şimdi de bu fonksiyonların kuralını bulayım.
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2+1+x-2=x^2+x-1$
$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^2+1-(x-2)=x^2-x+3$
$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x^2+1)\cdot(x-2)=x^3-2x^2+x-2$
$x=2$ için $g(2)=2-2=0$ olduğundan, $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonunu $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlayamayız.

Kayıp İlanı: $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 'in Tanım Kümesi Aranıyor!

Eğer bir fonksiyonu tanımlamaya yarayabilecek bir kural verilmiş, fakat tanım kümesi açıkça verilmemişse, o zaman bu fonksiyonun tanım kümesi olarak, bu kuralın anlamlı olduğu en geniş küme alınır ve bu küme D_f olarak gösterilir. Örneğin $f(x)=\dfrac{1}{x}$ kuralı ile verilmiş bir fonksiyonun tanım kümesini bulmak istesek D_f ne olurdu?

Bu kuralın anlamlı olması için payda sıfırdan farklı olmalıdır. Yani $\dfrac{1}{x}$ ifadesi, sıfırdan farklı bütün x'ler için anlamlı sayılar verir. O halde $D_f=\mathbb{R}\backslash\{0\}$'dır.

Güzel. Peki size gerçel sayıların tamamı üzerinde tanımlı bir fonksiyon tanımlayın desem aklınıza ilk neler geliyor?

Sabit fonksiyon geliyor hocam. Örneğin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2$ sabit fonksiyonu gerçel sayıların tamamında tanımlıdır.

Gerçel sayılar kümesinin birim fonksiyonunu da düşünebiliriz. Yani $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$.

$f(x) = x^3 + 1$ fonksiyonu da olur.

Tanım n negatif olmayan bir tam sayı, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ gerçel sayılar ve $a_n \neq 0$ olmak üzere, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ biçiminde tanımlanan fonksiyona n. dereceden bir polinom fonksiyon denir.

Arkadaşlar, verdiğiniz örneklerin hepsi, birer polinom fonksiyon örneğidir. Polinom fonksiyonlar gerçel sayıların tamamında tanımlı fonksiyonlardır. Polinom fonksiyonların genel tanımı için vitrinimize bakabilirsiniz.
Örneğin, $p(x) = x^4 - 2x^3 + 5x - 7$ polinomu dördüncü dereceden bir polinom fonksiyondur ve gerçel sayıların tamamında tanımlıdır.

Dikkat ederseniz, polinom fonksiyonlarda, x değişkeninin negatif olmayan tam sayı kuvvetleri alınmaktadır. Bu durumda,

$$f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = \frac{1}{3x}$$

birer polinom fonksiyon değildir. Fakat,

$$f(x) = \sqrt{3}x,\ g(x) = \frac{1}{3}x$$

birer polinom fonksiyondur.

En geniş tanım kümesi bulmakla ilgili bir soru daha sorayım. $g(x) = \sqrt{x+1}$ fonksiyonu için D_g nedir?

Karekök içindeki ifadenin negatif olmaması gerekir. O halde $x + 1 \geq 0$ yani $x \geq -1$ olmalıdır. Dolayısıyla, $D_g = [-1, \infty)$.

Ters Yöne Yürümek!

Biraz da bire-birlik kavramını pekiştirelim. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ fonksiyonu bire-bir midir, ne dersiniz?

Her gerçel sayıyı karesi ile eşliyoruz. 1'in karesi 1; 2'nin karesi 4; 3'ün karesi 9; $\frac{1}{2}$'nin karesi $\frac{1}{4}$; farklı sayıların karesi farklı, o halde bire-birdir hocam.

Olur mu Gökçe, negatif sayıları unuttun galiba, -1'in karesi de 1'dir. Yani, $-1\neq 1$'dir ama kareleri birbirine eşittir. Dolayısıyla bu fonksiyon bire-bir olamaz.

Bir fonksiyonun bire-bir olmadığını göstermek, bire-bir olduğunu göstermekten çoğu zaman daha kolaydır. Çünkü, birbirinden farklı tek bir tane sayı çifti için, fonksiyon altında görüntülerinin aynı olduğunu göstermek, bire-bir olmadığını söylemek için yeterlidir.

Güzel Zeynep. Peki, $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ fonksiyonu bire-bir midir?

Aynı fonksiyonu tekrar soruyorsunuz hocam! Dalgınlığınıza geldi herhalde.

Hayır Selçuk! Bu fonksiyonun tanım kümesi farklı. Fonksiyonların eşitliğine bir bak istersen. Bu fonksiyon bire-birdir hocam. Tanım kümesinde, görüntüsü aynı olan iki farklı eleman yoktur çünkü.

Bravo Engin! Peki size gerçel sayıların tamamı üzerinde bire-bir olan bir fonksiyon söyleyin desem?

$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı birim fonksiyonu söylerim hocam.

$f(x)=x+1$ de gerçel sayıların tamamında bire-birdir.

Selçuk ve Engin'in örneklerini genelleyebiliriz. a ve b gerçel sayılar, $a\neq 0$ olmak üzere, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$ fonksiyonu bire-birdir. Peki söyleyin bakalım, neden a'nın sıfırdan farklı olmasını istedik?

Hocam $a=0$ olursa fonksiyon sabit fonksiyon olur, sabit fonksiyon da $\mathbb{R}$ üzerinde bire-bir değildir.

Çok güzel Zeynep. Biraz da örtenlikten söz edelim. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+5$ fonksiyonu örten midir, ne dersiniz?

Görüntü kümesi değer kümesine eşit mi yani?

Bunun için değer kümesinden keyfi y elemanı alıp, $f(x)=y$ olacak biçimde x'in olup olmadığına bakacağız. Aldığım keyfi y için bu özellikte bir x varsa, fonksiyon örtendir diyeceğiz. $y=x+5$ denkleminden $x=y-5$ olur. Yani $x=y-5$ için $f(x)=y$'dir. O halde, f örtendir.

Güzel! Örten olmasının yanında bire-bir de. Dolayısıyla bu fonksiyonun ters fonksiyonundan bahsedebiliriz.

Hocam ters fonksiyonunu nasıl bulacağız?

Çok basit Gökçe, geldiğin yoldan geri dönerek bulacaksın! f^{-1}, f'nin değer kümesinden, f'nin tanım kümesine tanımlı bir fonksiyondur ve y'yi $f(x)=y$ olan x ile eşler. Az evvel bize değer kümesinden verilen bir y için, $f(x)=y$ olan x elemanını bulmuştuk. O halde, $f^{-1}(y)=y-5$ şeklindedir. Fakat biz fonksiyonlarda değişken olarak daha çok x sembolünü kullandığımız için gelin bu ters fonksiyondaki y değişkeni yerine x sembolünü kullanalım. Bu durumda, $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=x-5$ olarak elde ederiz.

$y=f(x)$ denkleminden x'i y cinsinden çektik mi iş biter hocam!

Tabii ki fonksiyon bire-bir ve örtense Selçuk! Şimdi de fonksiyonların bileşkesini bir örnekle pekiştirelim. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+1$ ve $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-3$ fonksiyonları için sırasıyla $g\circ f$ ve $f\circ g$ fonksiyonlarını bulalım.

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$ olduğundan g fonksiyonunda x gördüğüm yere $f(x)$ yazarsam, $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(f(x))=f(x)-3=3x^2+1-3=3x^2-2$$

elde ederim.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ olduğundan, f fonksiyonunda x gördüğüm yere $g(x)$ yazarsam, $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(g(x)) = 3g(x)^2 + 1 = 3(x-3)^2 + 1 &= 3(x^2 - 6x + 9) + 1 \\ &= 3x^2 - 18x + 28 \end{aligned}$$

elde ederim.

Gayet güzel arkadaşlar. Şimdi biraz da fonksiyonların grafiklerinden söz edelim.

Fonksiyonların Resmine Bakmak

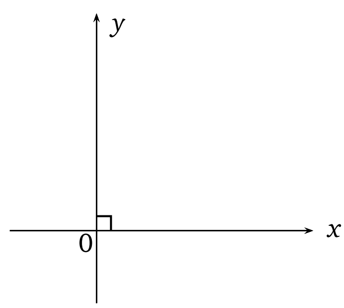
Hocam, fonksiyonların grafiğine neden ihtiyaç duyarız?

Şöyle açıklayayım Selçuk, şimdi ben sana kumral, kıvırcık saçlı, mavi gözlü, uzun boylu vs. şeklinde tanımadığın birini tasvir etmeye çalışsam, hayal dünyanın elverdiği ölçüde zihninde bir kişi oluşturursun. Fakat bahsettiğim kişinin bir fotoğrafını eline versem, herşey berraklaşır değil mi? İşte fonksiyonun grafiğini görmek, fotoğrafa bakmak gibidir. Bir fonksiyonun grafiğine bakarak onunla ilgili özellikleri saptayabilirsin. Hem bizler görerek daha iyi anlarız değil mi?

Hiç şüphesiz hocam!

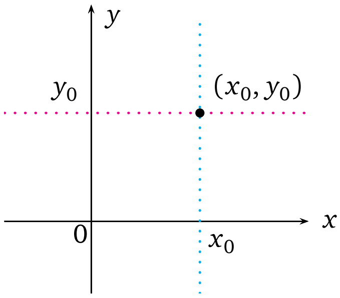
Arkadaşlar, önce grafik çiziminde bir araç olarak kullanacağımız kartezyen koordinat sisteminden söz edeceğiz. 1. üniteden gerçel sayılar kümesi ile sayı doğrusu arasındaki ilişkiyi hatırlarsınız. Şimdi de gerçel sayıların kendisiyle kartezyen çarpım kümesi denilen ve $\mathbb{R}^2$ şeklinde gösterilen kümeyi tanımlayacağız ve düzlemle ilişkilendireceğiz. Sıralı sayı çiftlerinin kümesine $\mathbb{R}$'nin kendisiyle kartezyen çarpım kümesi diyoruz ve bu kümeyi şöyle ifade ediyoruz:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

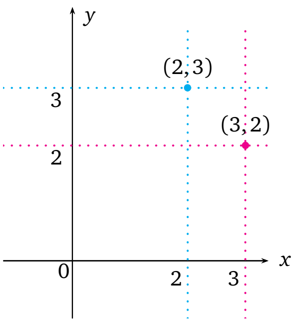


Şekil 3.7: Kartezyen koordinat sistemi.

Ayrıca (x, y) sıralı ikilisinde x'e sıralı ikilinin birinci bileşeni; y'ye de ikinci bileşeni diyoruz. Bileşenlerin sırası çok önemli. Örneğin $(3, 4)$ ikilisi, $(4, 3)$ ikilisinden farklıdır. Zeynep Demir'le Demir Zeynep'in farklı olması gibi.



Şekil 3.8: Kartezyen koordinat sisteminde (x_0, y_0) ikilisine karşılık gelen nokta.



Şekil 3.9: Kartezyen koordinat sisteminde $(2,3)$ ve $(3,2)$ ikililerine karşılık gelen noktalar.

Tanım $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. A kümesinin her bir x elemanı için x ile onun görüntüsü olan $f(x)$'in oluşturduğu $(x, f(x))$ sıralı ikililerinin kümesine f'nin grafiği denir ve bu küme G_f ile gösterilir.

$$G_f = \{(x, f(x) \mid x \in A)\}$$

Şimdi de kartezyen koordinat sistemini tanıyalım. İki sayı doğrusunun, sıfır noktalarında dik olarak düzleme yerleştirilmesi sonucunda kartezyen koordinat sistemi oluşur. Burada yataydaki sayı eksenine x ekseni ya da apsisler ekseni, düşeydeki sayı eksenine ise y ekseni ya da ordinatlar ekseni diyoruz. Ayrıca sayı doğrularının kesiştikleri noktaya başlangıç noktası adını veriyoruz.

$\mathbb{R}^2$'nin elemanları sıralı sayı ikililerinden oluştuğuna göre, her iki sayıyı da temsil etmek için iki tane sayı doğrusuna ihtiyaç duymamız doğal tabii. Peki yerleştirme işini nasıl yapıyoruz hocam?

Gayet kolay Selçuk. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesinden herhangi bir (x_0, y_0) elemanını alalım. Kartezyen koordinat sisteminin yatay ekseninde x_0, düşey ekseninde de y_0 noktasını bulalım. Daha sonra, bu noktalardan eksenlere paralel doğrular çizelim. Bu doğruların kesişim yeri bir tek noktadır. Bu nokta, (x_0, y_0) ikilisinin düzlemdeki yeridir.

Az evvelki işlemde bandı geri sararak izlersek, bu sefer düzlemdeki bir noktaya karşılık bir sıralı ikili buluruz!

Aynen senin dediğin gibi Selçuk. Bu sefer düzlemden bir nokta alalım. O noktadan geçen ve y ve x eksenine paralel doğruları düşünürsek o doğrular x ve y eksenlerini birer noktada kesecektir. Böylece bulunan x_0 ve y_0 sayılarına, verilen noktanın apsisi ve ordinatı, (x_0, y_0) ikilisine de bu noktanın koordinatları denir.

Böylece her sıralı ikiliye karşılık düzlemde bir nokta ve düzlemdeki her noktaya da bir sıralı ikili karşılık getirdik. Bu nedenle $\mathbb{R}^2$ ile düzlemin noktaları arasında fark gözetmiyoruz. Alt yapıyı tamamladık. Şimdi grafik çizmek için hazırız!

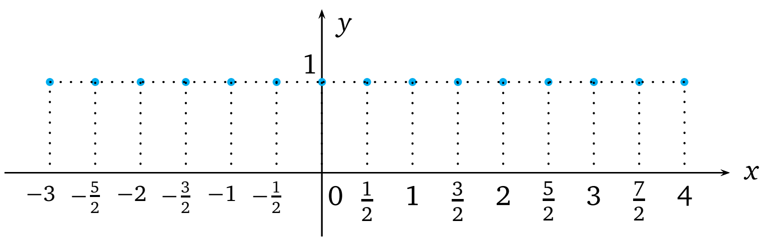
$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun tanım kümesindeki bir eleman ile o elemanın görüntüsünün oluşturduğu sıralı ikiliyi düşünelim. İşte tanım kümesindeki her x elemanı için $(x, f(x))$ sıralı ikililerinin oluşturduğu kümeye f'nin grafiği diyeceğiz ve G_f ile göstereceğiz. Böylece bir fonksiyonun grafiğini kartezyen koordinat sistemine yerleştirip, fonksiyonun fotoğrafına bakabilir duruma geleceğiz.

Hocam önce sabit fonksiyonun fotoğrafına baksak mı?

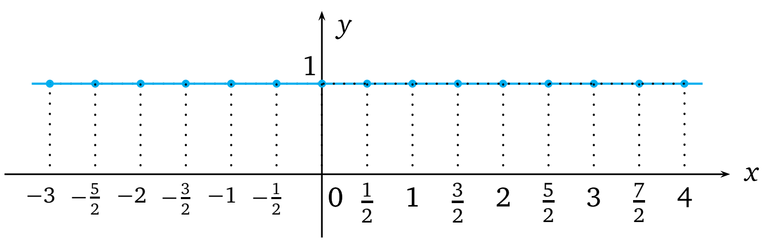
Tabii ki Engin, bak bakalım ne görüyorsun?

Gerçel sayılar kümesinin her elemanını 1'e gönderen fonksiyonu alayım. Yani, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ olsun. Sonsuz tane $(x, f(x))$ ikilisi var. Bunları nasıl taşıyayım?

Hepsini taşımaya ömrümüz yetmez tabii, bunun için öncelikle G_f kümesinden uygun sayıda eleman alıp, o elemanları düzleme taşıyacağız. Ardından, bu noktaları uygun bir şekilde birleştireceğiz. Nokta sayısını ne kadar artırırsak, fonksiyonun gerçek grafiğine o kadar yaklaşmış olacağız. Şimdi Engin'in sabit fonksiyonunun grafiğini çizmeye çalışalım. Öncelikle, $\{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ kümesinden bazı noktaları işaretleyelim...

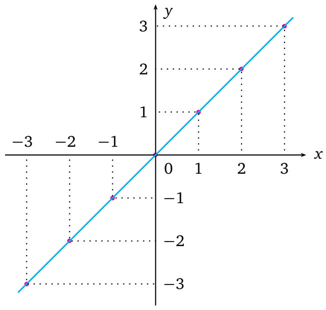


Ve bu noktaları birleştirelim...

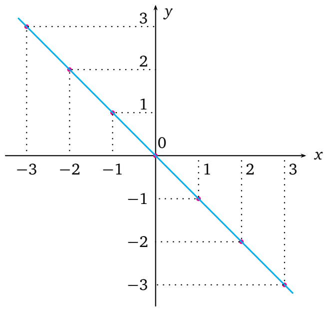


Şekil 3.10: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ sabit fonksiyonunun grafiği.

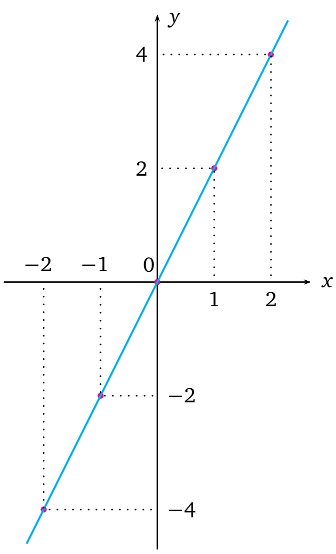
Şimdi de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim. Önce $G_f = \{(x, x-2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ kümesinden bazı noktaları işaretliyoruz:



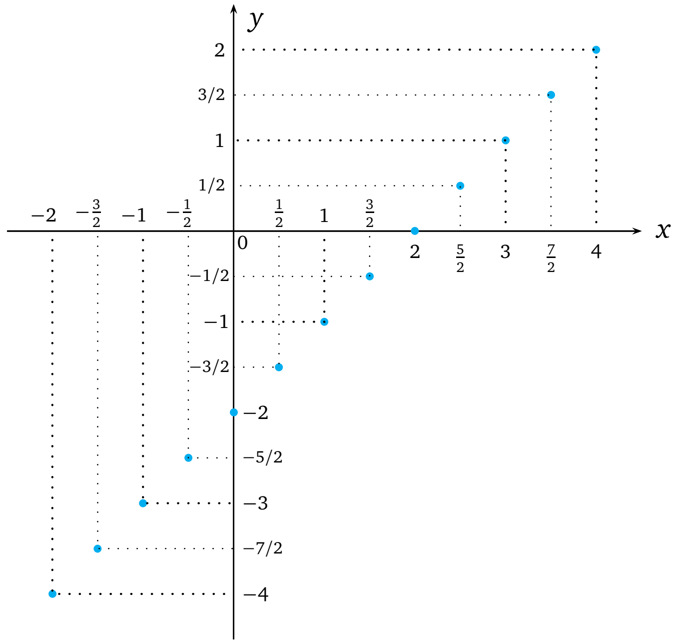
Şekil 3.11: $f(x) = x$'in grafiği.



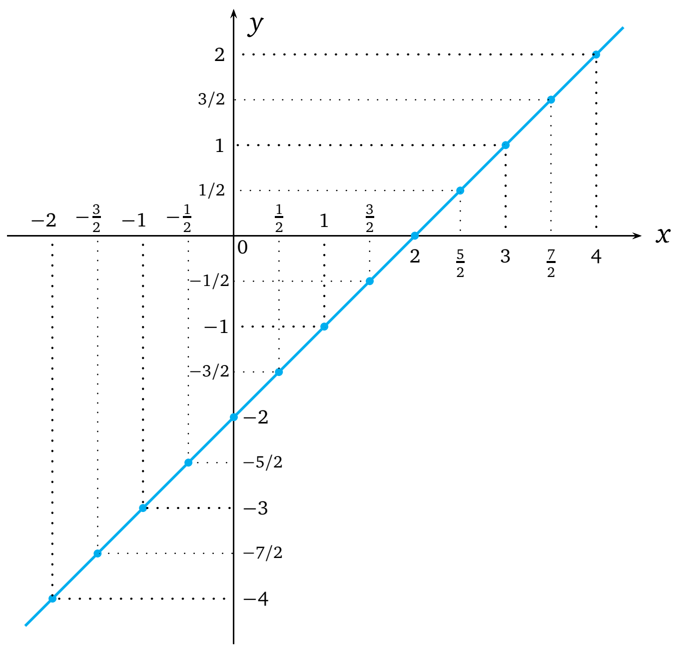
Şekil 3.12: $f(x) = -x$'in grafiği.



Şekil 3.13: $f(x) = 2x$ fonksiyonunun grafiği.



Şimdi de bu noktaları birleştiriyoruz.

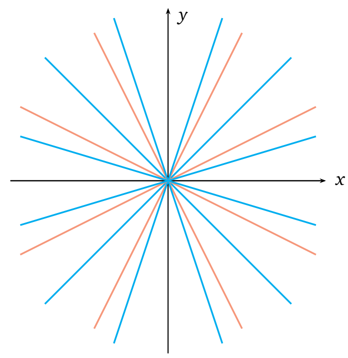


Şekil 3.14: $f(x) = x - 2$ fonksiyonunun grafiği.

Gördüğünüz gibi $f(x) = x - 2$ fonksiyonunun grafiği düzlemde bir doğrudur. Düzlemde doğrular cebirsel olarak birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemlerle ifade edilebilir. Yeri gelmişken biraz da doğru denklemlerinden söz edelim.

Düzlemde bir noktadan sonsuz çoklukta doğru geçmesine karşın, farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.

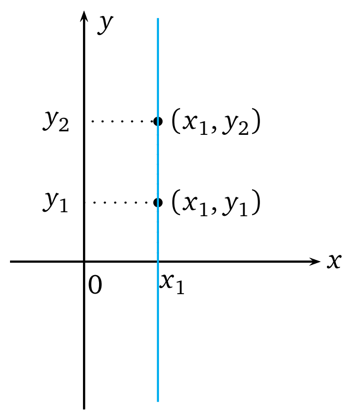
Evet arkadaşlar şimdi, düzlemde farklı iki noktadan bir tek doğru geçer gerçeğinden yola çıkarak, farklı iki noktadan geçen doğrunun denklemini, o noktaların koordinatlarına bağlı olarak ifade edeceğiz.
Öncelikle verilen iki noktanın apsisleri eşit ordinatları farklı olsun. Bu durumda bu noktalardan geçen doğruyu düşünsek ve o doğru üzerinde başka bir nokta alsak, o noktanın koordinatları hakkında ne söylersiniz?



Şekil 3.15: Başlangıç noktasından geçen sonsuz çokluktaki doğrulardan bazıları.

O doğru üzerindeki bütün noktaların apsislerinin eşit olduğunu söyleyebiliriz.

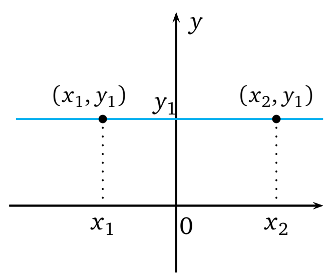
Evet Zeynep, düzlemde apsisleri x_1'e eşit olan bütün (x, y) ikililerine karşılık gelen noktalar bu doğruyu oluşturduğu için, bu doğruyu $x = x_1$ denklemi ile ifade edebiliriz.
Peki verilen noktaların ordinatları eşit apsisleri farklı olsaydı, o zaman doğruyu cebirsel olarak nasıl ifade ederdiniz?



Şekil 3.16: $x = x_1$ doğrusu.

Bu sefer de doğru üzerinde aldığımız her hangi bir noktanın ordinatı, diğer iki noktanın ordinatına eşit olacaktır. Dolayısıyla, düzlemde ordinatları y_1'e eşit olan bütün (x, y) ikililerine karşılık gelen noktalar bu doğruyu oluşturduğu için bu doğruyu $y = y_1$ doğrusu olarak ifade edebiliriz.

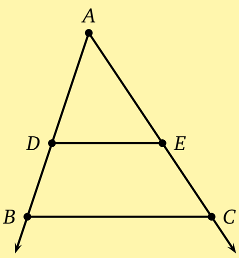
Bravo Engin! Peki arkadaşlar verilen iki noktanın ne apsisleri ne de ordinatları eşitse, bu durumda bu noktalardan geçen doğruyu cebirsel olarak nasıl ifade edebiliriz sizce?



Şekil 3.17: $y = y_1$ doğrusu.

Diğerleri gibi bakar bakmaz bir şey söylemek kolay değil gibi!

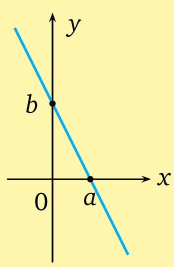
Thales Teoremi



Yukarıdaki şekilde BAC açısının kolları arasında kalan DE doğru parçası ile BC doğru parçası paralel olsun $(DE//BC)$. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|}$$

Doğru üzerinde alınan farklı her hangi iki noktanın, ordinatları farkının apsisleri farkına oranı sabittir. Bu orana doğrunun eğimi diyoruz.



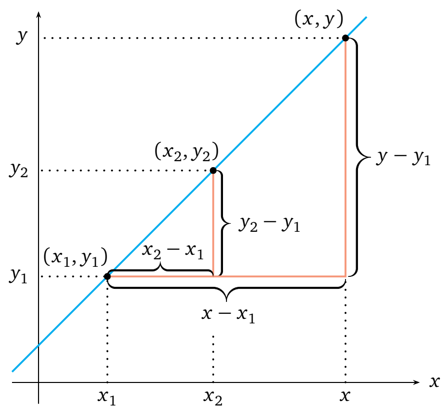
a ve b sıfırdan farklı gerçel sayılar olmak üzere, x eksenini $x = a$ noktasında, y eksenini de $y = b$ noktasında kesen doğrunun denklemi,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

şeklinde yazılabilir.

Karışık görünmesine rağmen, Thales teoreminden faydalanarak bu doğrunun denklemini kolayca bulabiliriz.

$x_1 \neq x_2$ ve $y_1 \neq y_2$ olmak üzere (x_1, y_1) ile (x_2, y_2) noktalarından geçen doğruyu düşünelim ve (x, y) bu doğru üzerinde başka bir nokta olsun.



Şekil 3.18

Thales teoreminden aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Bu eşitliği düzenleyecek olursak,

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

olarak doğrunun denklemini elde ederiz. Burada, $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ oranına bu noktalardan geçen doğrunun eğimi diyoruz ve m harfi ile gösteriyoruz. Bu durumda eğimi m olan ve (x_1, y_1) noktasından geçen doğrunun denklemini, $y = m(x - x_1) + y_1$ olarak elde ederiz.

Örnek olarak, $(1, 2)$ ve $(2, 3)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulalım.

Ben bulayım hocam. $(x_1, y_1) = (1, 2)$ ve $(x_2, y_2) = (2, 3)$ olduğundan doğru denkleminde $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$ ve $y_2 = 3$ yazarsak,

$$y = \frac{3 - 2}{2 - 1}(x - 1) + 2$$

olur. Bu eşitliği düzenlersek, $y = x + 1$ olarak doğru denklemini elde etmiş oluruz.

Aferin Gökçe, peki bu doğrunun eğimi nedir?

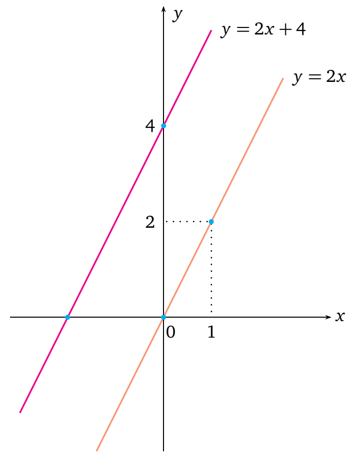
Düzlemde eğimleri eşit olan doğrular paraleldir.

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3-2}{2-1} = 1$ olduğundan doğrunun eğimi 1'dir.

Güzel. Doğru denklemini $y = mx + n$ olarak yazdıktan sonra artık eğimin m olduğunu hemen söyleyebilirsin. Örneğin $y = 3x + 1$ doğrusunun eğimi kaçtır?

Bu ifadede x'in katsayısı 3 olduğundan bu doğrunun eğimi 3 olur.

Evet Engin. Şimdi de düzlemde birbirinden farklı her hangi iki doğru alalım. Bu durumda bu doğrular ya kesişirler, ya da paraleldirler. Paralel doğrular eğimleri birbirine eşit olan doğrulardır. Örneğin $y = 3x - 4$ doğrusu ile $y = -5x + 4$ doğrularını göz önüne alalım. Bu doğrular sizce paralel olabilir mi?

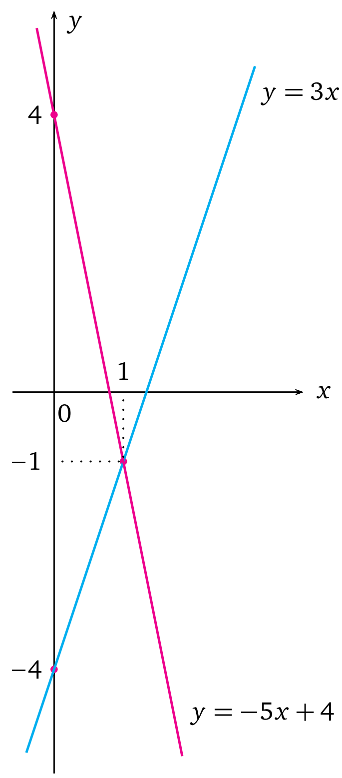


Şekil 3.19: Düzlemde birbirine paralel iki doğru.

İlk doğrunun eğimi 3, diğer doğrunun eğimi −5'tir. Bu doğruların eğimleri eşit olmadığından paralel değildirler.

Evet Zeynep, bu doğrular kesişen iki doğrudur. Bu doğruların kesiştiği noktanın koordinatlarını bulabilir misiniz?

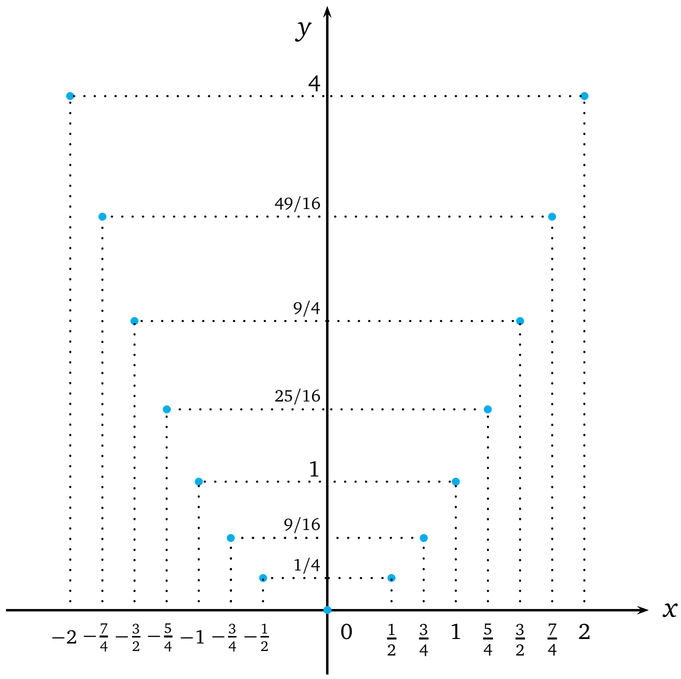
Kesişim noktası her iki doğrunun da üzerindedir. O halde hem birinci denklemi hem de ikinci denklemi sağlayan (x, y) sıralı ikilisini bulmalıyız. Bu yüzden $3x - 4 = -5x + 4$ olmalıdır. Buradan $x = 1$ olarak elde ederiz. Bu değeri denklemlerden her hangi birisinde örneğin $y = 3x - 4$ denkleminde yerine yazarsak, $y = -1$ olarak elde ederiz. O halde kesişim noktası, $(1, -1)$ noktasıdır.



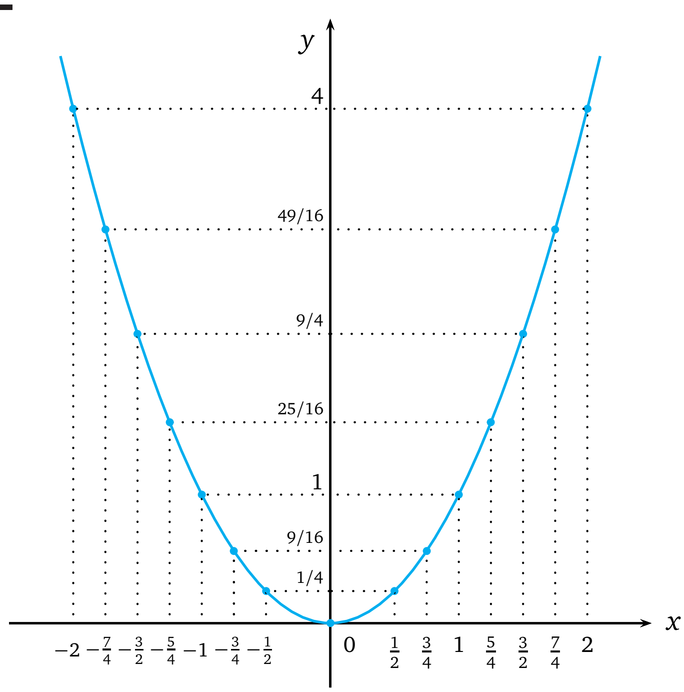
Şekil 3.20: Düzlemde $(1, -1)$ noktasında kesişen iki doğru.

Bravo Engin! Şimdi kaldığımız yerden fonksiyonların resmine bakmaya devam edelim arkadaşlar. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Bunun için önce yine bazı noktaların yerlerini işaretliyoruz:



Sonra da bu noktaları birleştiriyoruz...



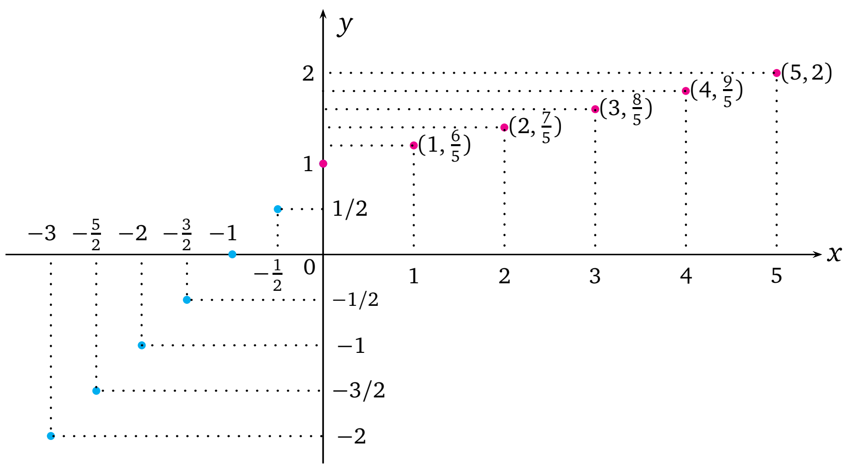
Şekil 3.21: $f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiği.

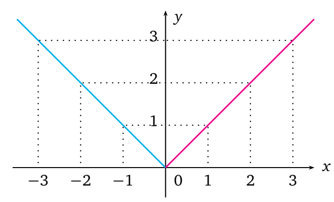
Hocam parçalı fonksiyonlara haksızlık etmeyelim. Biraz da onların fotoğrafına bakabilir miyiz?

Tabii ki Selçuk, ben de şimdi ona örnek verecektim.
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{5}+1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

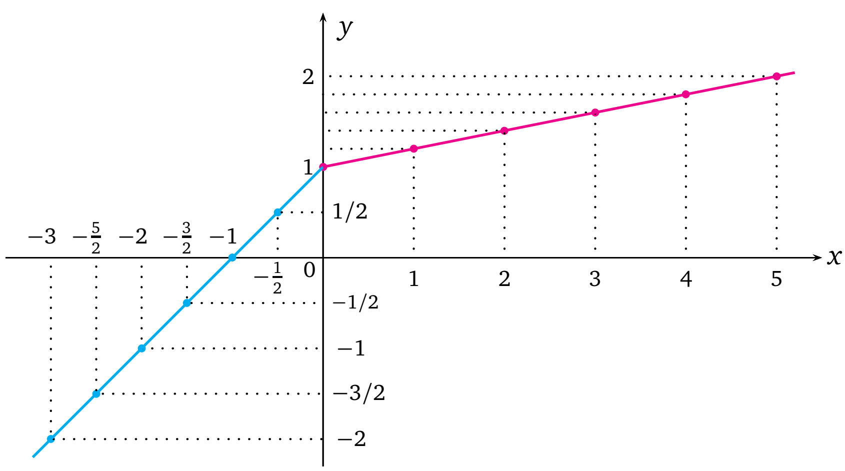
fonksiyonunun grafiğini çizelim. Yine önce bazı noktaları işaretleyelim.





Şekil 3.23: $f(x) = |x|$ fonksiyonunun grafiği.

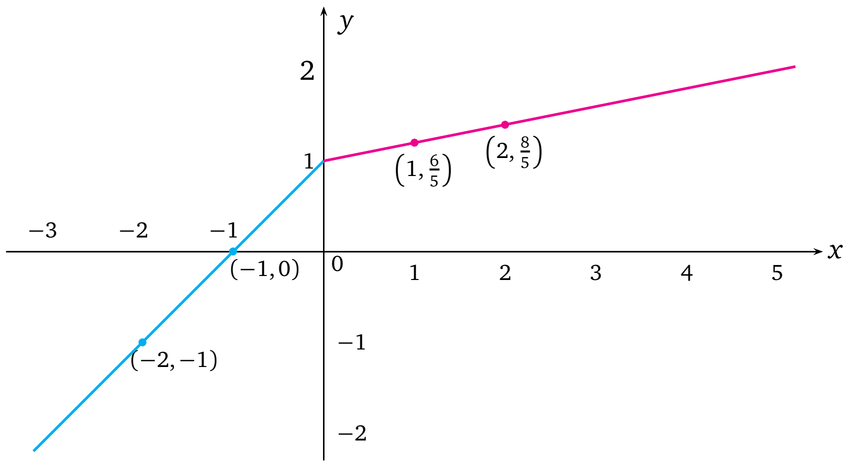
Sonra da bu noktaları birleştirelim:



Şekil 3.24: $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, $x < 0$ için $x+1$ ile, $x \geq 0$ için $\dfrac{x}{5}+1$ olarak tanımlanan parçalı fonksiyon grafiği.

Bu grafiğe şu gözle de bakabiliriz: $x < 0$ (hatta $x \leq 0$) için $y = x + 1$ doğrusunun grafiğini alıyoruz; $x \geq 0$ için de $y = \frac{x}{5} + 1$ doğrusunun grafiğini alıyoruz.

Şimdiye kadar çizdiğimiz grafiklerde, aslında gereğinden fazla yardımcı nokta kullandık. Ama bu sizin grafik çizme olayına ısınmanızı, hatta grafik çizmekten zevk almanızı sağlamak içindi. Mümkün olduğunca fazla sayıda noktanın taşınması, grafiği gerçeğine yaklaştırmak için her zaman faydalıdır, ama bir doğru için buna gerek yok tabii. Bir doğruyu iki noktasını belirledikten sonra çizebilirsiniz. Şimdi bu örneğimizi bir de bu şekilde çizelim.



Özet

Bu ünitede, bir fonksiyonun tanım kümesi, değer kümesi, görüntü kümesi gibi kavramlar üzerinde durduk. Bire-bir fonksiyon ve örten fonksiyon kavramlarını tanımlayıp, bunlara ilişkin örnekler çözdük. Bir fonksiyonun ters fonksiyonundan hangi durumlarda söz edebileceğimizi, eğer varsa nasıl bulacağımızı tartıştık. İki fonksiyonun bileşke fonksiyonundan söz ettik. Ayrıca gerçel sayılar üzerinde tanımlı ve gerçel sayı değerli fonksiyonlardan söz edip, bu tür fonksiyonların özelliklerini inceledik. Polinom fonksiyonları, parçalı tanımlı fonksiyonları tanıdık ve bu tür fonksiyonların grafiklerini çizmeye çalıştık. Bunların yanı sıra, düzlemde doğruların denklemlerini konuştuk.

Okuma Parçası

Çekmece ya da Güvercin Yuvası İlkesi

Bir sihirbaz sahnede yaptığı numarayla küçük dilinizi yutturabilir ama nasıl yaptığını öğrendiğinizde numaranın bütün havası kaybolur. Numaranın gerçekten sihirbazlık olmadığını anlarsınız! Bu bir düş kırıklığı yaratır. Onun için sihirbazlar, numaralarını nasıl yaptıklarını açıklamazlar. Nedendir bilinmez insanoğlu sihirbazlığı bilime yeğler, sihirbazlığı daha eğlenceli bulur.

Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

Matematikte de ilk bakışta zor görünen bazı problemlerin çözümü çok basit olabilir, şaşırtıcı derecede basit bir matematiksel ilkeye dayanabilir. Matematikçilerin sırlarını paylaşmaması (en azından günümüzde) söz konusu olmadığından, bu ilkelerden birini açıklayacağız: Çekmece İlkesi, namı diğer Güvercin Yuvası İlkesi. İlke gerçekten çok basit. Ama önce numaramızı yapalım:

Küçük Gauss babasıyla ormanda gezerken sormuş:

-Bu ormanda yaprak sayısı aynı olan iki ağacın olması için herhangi bir koşul söyleyebilir misin?

Baba Gauss böyle bir koşul düşünemeyince yanıtı küçük Karl vermiş:

-Eğer ormandaki yapraklı ağaç sayısı, bu ormanın en çok yaprağı olan ağacın yaprak sayısından daha fazlaysa, en az iki ağacın yaprak sayısı aynıdır…

Bu öykü büyük olasılıkla uydurmadır. Ama küçük Gauss'un büyüdüğünde dünyanın gelmiş geçmiş en büyük matematikçisi olacağı gerçektir.

Gauss'un yanıtı karışık gibi görünebilir ilk bakışta. Ama çok kolay olduğunu şu açıklamayı okuyunca fark edeceksiniz: Güvercin beslediğinizi düşünelim, her akşam da güvercinler yuvalarına girsinler. Eğer güvercin sayısı güvercin yuvası sayısından fazlaysa, örneğin 4 yuva ve 5 güvercin varsa, en az bir yuvada birden fazla güvercin vardır. İlkeye Güvercin Yuvası adı verilmesinin nedeni bu açıklamadır.

Bu ilke değişik ama denk ifadelerle de verilebilir. Örneğin,

1. *Belli sayıda güvercin aynı sayıda yuvaya yerleştirildiğinde yuvalardan birinin boş kalması için gerek ve yeter koşul, en az bir yuvada birden fazla güvercin olmasıdır.*
2. *İki sonlu küme arasında birebir eşleme olması için gerek ve yeter koşul, bu iki kümenin eleman sayısının eşit olmasıdır.*

Ormana ve ağaçlara dönelim. Ne demişti Gauss? Ormandaki yapraklı ağaç sayısı en fazla yaprağı olan ağacın yaprak sayısından fazlaysa… Ormanda 5 ağaç olsun ve her ağaç en fazla 4 yapraklı olsun. İlk dört ağacın yaprak sayıları 1, 2, 3, 4 olarak farklı olabilir. Ama sona kalan ağacın yaprak sayısı bu sayılardan birine eşit olmak zorunda kalacaktır.

Kaynak: Matematik Dünyası 2003 Kış Sayısı. Yazar: Haluk Oral

Çıkarın Kağıtları

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ fonksiyonu veriliyor. $f(1) - 2f(0)$ kaça eşittir?

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & , \quad x > 0 \text{ ise} \\ 2 & , \quad x \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere, $f(-1) + f(1)$ kaça eşittir?

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$ olmak üzere $f^{-1}(13) = ?$

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

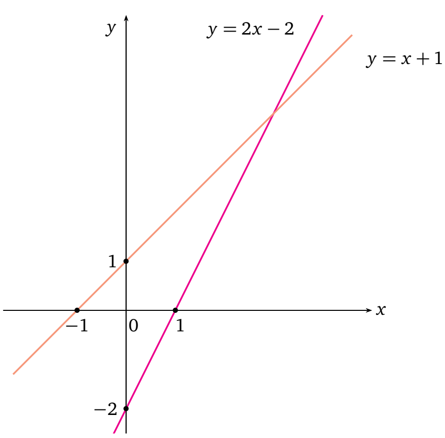
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 5 - x$ olmak üzere $f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonlarını bulunuz.

5. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 3x - 4$ ve $g(x) = \dfrac{2x-1}{3}$ olsun. $(f \circ g)(5)$ kaçtır?

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 10

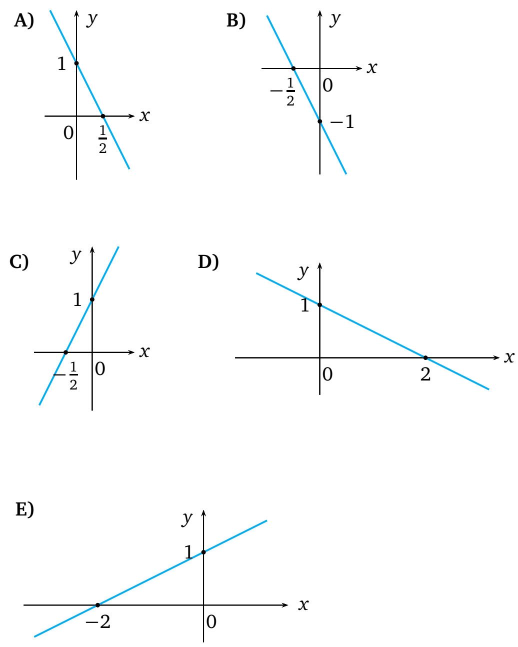
6. a ve b sıfırdan farklı sayılar olmak üzere, x eksenini $x = a$ noktasında, y eksenini de $y = b$ noktasında kesen doğrunun denklemini elde ediniz.

7. Şekildeki doğruların kesişim noktasının koordinatları nedir?

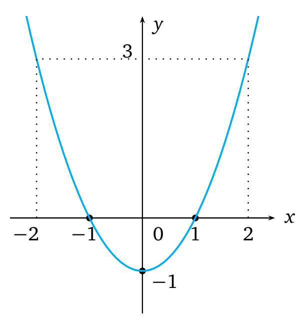


A) $(2,3)$ **B)** $(3,2)$ **C)** $(4,5)$
D) $(2,4)$ **E)** $(3,4)$

8. $y = -2x + 1$ doğrusunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



9. Grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?



A) $f(x) = x^2 + 1$ **B)** $f(x) = x^2 - 1$
C) $f(x) = x - 1$ **D)** $f(x) = x + 1$
E) $f(x) = -x^2 - 1$

10. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x < 1 \text{ ise} \\ 2 & , \quad x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözümler

1. $f(x)=2x+1$ ifadesinde x yerine 1 yazarsak, $f(1)=2\cdot 1+1=3$ olarak elde ederiz. Benzer olarak x yerine 0 yazarsak da, $f(0)=2\cdot 0+1=1$ olarak elde ederiz. Bize $f(1)-2f(0)$ sorulduğuna göre bulduğumuz bu değerleri yerine yazarsak,

$$f(1)-2f(0)=3-2\cdot 1=1$$

olarak elde ederiz.

2. Fonksiyon sıfırdan küçük ya da sıfıra eşit olan sayıları 2 ile eşlediğinden ve $-1\leq 0$ olduğundan, $f(-1)=2$'dir. Fonksiyon sıfırdan büyük x değerlerini $x+2$ ile eşlediğinden ve $1>0$ olduğundan $f(1)=1+2=3$ olur. Bize $f(-1)+f(1)$ sorulduğuna göre bulduğumuz bu değerleri yerine yazarak,

$$f(-1)+f(1)=2+3=5$$

olarak buluruz.

3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$ fonksiyonu birebir ve örten fonksiyon olduğundan bu fonksiyonun ters fonksiyonundan bahsedebiliriz. Fakat bu soruyu ters fonksiyonun genel kuralını bulmaya gerek kalmadan çözebiliriz. Çünkü bize f altında görüntüsü 13 olan eleman sorulmaktadır. Bunun için de $f(x)=13$ olan x'i bulmalıyız. Burada $f(x)=3x+1$ olduğundan, $3x+1=13$ eşitliğinden $x=4$ olarak elde edilir. Doğru yanıt B seçeneğidir.

4. f ve g, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı fonksiyonlar olduğu için her iki taraftan bileşke anlamlıdır ve $f\circ g$ ile $g\circ f$ de $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı fonksiyonlar olacaktır. Şimdi sırasıyla bu fonksiyonların kurallarını bulalım. Her hangi bir x gerçel sayısı için $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ olduğundan $g(x)$'in $f(x)=2x+3$ kuralı ile verilen f fonksiyonu altında görüntüsünü bulacağız. Bu durumda,

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= 2(g(x))+3\\ &= 2(5-x)+3\\ &= 13-2x\end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

Benzer şekilde $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ olduğundan bu sefer, $f(x)$'in $g(x)=5-x$ kuralı ile verilen g fonksiyonu altında görüntüsünü bulacağız. O halde,

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= 5-f(x)\\ &= 5-(2x+3)\\ &= 2-2x\end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

5. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olduğundan $f\circ g$ fonksiyonunun da $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı olduğunu söyleyebiliriz. $(f\circ g)(5)$ sorulduğuna göre, $(f\circ g)(5)=f(g(5))$ olduğundan önce $g(5)$'i bulacağız, daha sonra da bulduğumuz değerin f altındaki görüntüsünü bulacağız.

$$g(5)=\frac{2\cdot 5-1}{3}=3$$

olur. Şimdi bulduğumuz bu değerin yani 3'ün f altında görüntüsünü bulalım. $f(3)=3\cdot 3-4$ olduğundan $f(3)=5$ olarak elde ederiz. O halde doğru yanıt C seçeneğidir.

6. Doğru x eksenini $x=a$ noktasında, y eksenini de $y=b$ noktasında kestiğinden bu doğrunun, $(a,0)$ ve $(0,b)$ noktalarından geçtiğini söyleyebiliriz.

$(x_1, y_1) = (a, 0)$ ve $(x_2, y_2) = (0, b)$ diyecek olursak doğrunun denklemini,

$$\begin{aligned} y &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \\ y &= \frac{b - 0}{0 - a}(x - a) + 0 \\ y &= -\frac{b}{a}(x - a) \\ y &= -\frac{b}{a}x + b \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Bu denklemi daha şık bir hale de getirebiliriz:

$$y = -\frac{b}{a}x + b \ ,$$

yani

$$y + \frac{b}{a}x = b$$

eşitliğinin her iki tarafını b'ye bölersek,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

denklemi elde edilir.

7. $y = 2x - 2$ doğrusu ile $y = x + 1$ doğrularının kesişim noktası her iki doğru üzerinde de olacağı için, bu noktanın koordinatları iki doğrunun denklemini de sağlamalıdır. Bu yüzden, $2x - 2 = x + 1$ olmalıdır. Buradan $x = 3$ olarak elde edilir. Bu değeri doğru denklemlerinden her hangi birisinde yazarak $y = 4$ olarak elde ederiz. O halde kesişim noktasının koordinatları $(3, 4)$ olup, doğru yanıt E seçeneğidir.

8. $y = -2x + 1$ doğrusunun eksenleri kestiği noktaları bulalım. $y = -2x + 1$ denkleminde y yerine sıfır yazarsak x eksenini kestiği noktayı,

$$\begin{aligned} -2x + 1 &= 0 \\ -2x &= -1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Aynı denklemde bu sefer x yerine sıfır yazarak y eksenini kestiği noktayı,

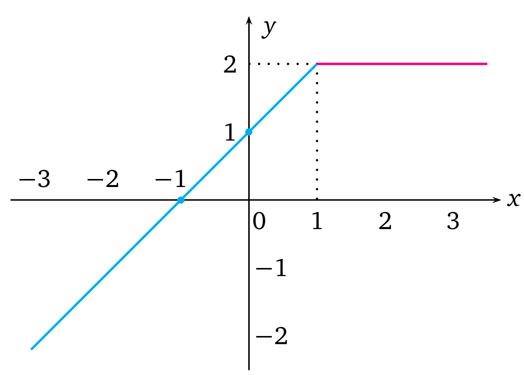
$$\begin{aligned} y &= -0 \cdot 1 + 1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

olarak buluruz. Verilen doğru x eksenini $\frac{1}{2}$ noktasında, y eksenini de 1 noktasında kestiğinden doğru yanıt A seçeneğidir.

9. Verilen grafikten fonksiyonun bazı noktalardaki değerlerini hemen söyleyebiliriz. Örneğin, $f(-1) = 0$, $f(0) = -1$, $f(1) = 0$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu noktalardan geçen fonksiyon ise, B seçeneğinde bulunan $f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonudur.

10. Bir parçalı fonksiyon grafiği çizeceğiz. Bu fonksiyon 1'den küçük bir x sayısını $x + 1$ sayısına; 1'den büyük ya da 1'e eşit olan x sayısını da 2 sayısına göndermektedir. Bu nedenle $(-\infty, 1]$ aralığında $f(x) = x + 1$ doğrusunun; $[1, \infty)$ aralığında da $f(x) = 2$ sabit fonksiyonunun grafiğini çizeceğiz.

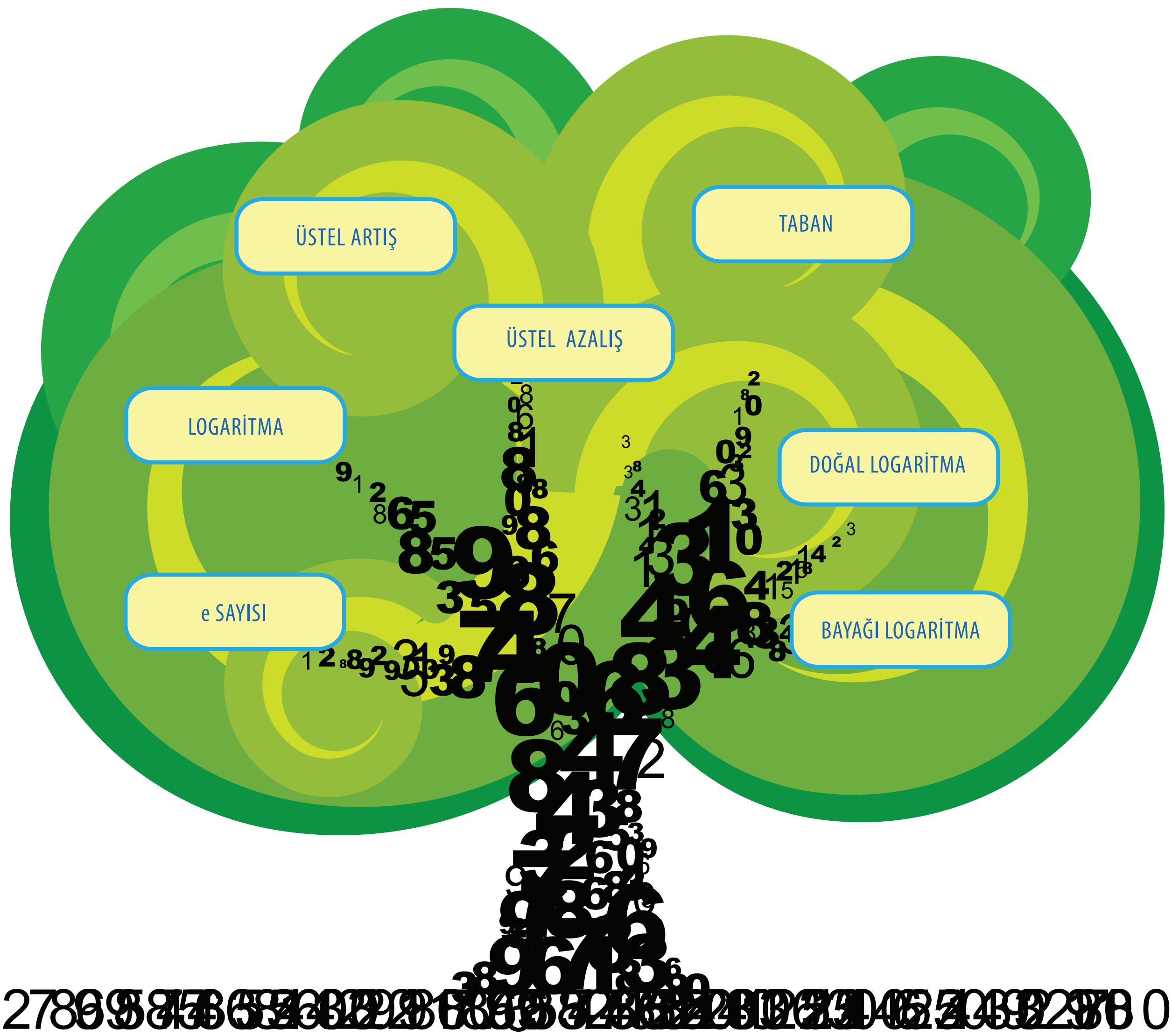
$x = 0$ için $f(0) = 1$ ve $x = -1$ için $f(-1) = 0$ olduğundan $f(x) = x + 1$ doğrusu $(0, 1)$ ve $(-1, 0)$ noktalarından geçer.



Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar

4. ÜNİTE

GENEL MATEMATİK

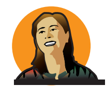


Üstel Fonksiyonlar

Yaz gelse de artık tatil yapsak.

Ooo! Selçuk, sen tatil hayali kurmaya başlamışsın. Muhtemelen sen tatil yapacağın yeri de planlamış, hatta rezervasyonunu bile yaptırmışsındır.

Elbette! Aylar öncesinden hem de. Tatilde havuzdan çıkmayı düşünmüyorum. Siz tatil planı yapmıyor musunuz sanki.

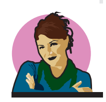


Tabii ki biz de düşünüyoruz, tatilimizi önceden ayarlıyoruz.

Ben düşünmüyorum Selçuk. Çünkü bizim tatil yapacağımız yer belli. Her zamanki gibi yazlığımıza gideceğiz.

Bizim de gideceğimiz yer belli. Her yıl tatile nilüferlerle kaplı gölün kenarındaki, yeşillikler içindeki köyümüze gideriz.

Gökçe, nilüfer çiçeklerinin her gün katlanarak çoğaldığını bilirsin o zaman.



Evet hocam, bir gün gölün üzerinde sadece birkaç tane nilüfer çiçeği varken çok geçmeden gölün büyük bir kısmının bu çiçeklerle dolduğunu görebilirsiniz.

Çok şaşırtıcı değil mi? Bu artış çok düzenli bir biçimde olur aslında. Göldeki çiçeklerin sayısı, her günün sonunda iki katına çıkar. Mesela, başlangıçta 1 tane, bir gün sonra 2 tane, iki gün sonra 4 tane, üç gün sonra 8 tane. . . . Peki size bir soru, bu şekilde devam ederek 15 gün sonunda gölün yarısı çiçeklerle kaplanıyorsa, acaba çiçekler gölün tamamını kaç günde kaplar?

Başlangıçta	1. gün	2. gün	3. gün	$\cdots$	15. gün
1	2	2^2	2^3	$\cdots$	2^{15}

Bunda ne var ki Mete Hocam! Çok kolay, tabii ki 30 günün sonunda…

Hemen her şeye atlıyorsun Selçuk! Önce düşünelim. Her günün sonunda göldeki çiçeklerin sayısı iki katına çıkıyor. 15 gün sonra, gölün yarısı çiçeklerle kaplanıyorsa gölün yarısındaki çiçek sayısı 2^{15} olur.

Gölün tamamının kaplanması için gerekli çiçek sayısı 2^{15} sayısının 2 katı olacaktır.

Yani, 2^{16}. Gölü kaplayan çiçek sayısı 2^{16} olduğuna göre 16 günün sonunda gölün tamamı dolacaktır.

Aaaa! Evet. Bir gün hala gölün yarısı boş olduğu halde sadece bir gün sonra gölün tamamının nilüferlerle kaplanması ne kadar da ilginç.

Evet Selçuk. Sanki gölün yarısı 15 gün sonunda çiçeklerle kaplandığında tamamının 30 gün sonunda çiçeklerle kaplanacağı gibi bir izlenim doğuyor. Aslında bu, beynimizin düşünme tuzaklarına düştüğünün güzel bir göstergesi. Gölün yarısı kaplandıysa, bir gün sonra tamamı kaplanır.

Örnekte gördüğünüz gibi 2'nin doğal sayı kuvvetlerini kullandık. 2'nin gerçel sayı kuvvetlerini de alabiliriz. O zaman karşımıza üstel fonksiyon kavramı çıkar. a pozitif bir gerçel sayı ve $a \neq 1$ olmak üzere her x gerçel sayısı için

$$f(x) = a^x$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona üstel fonksiyon diyoruz. Bu fonksiyonun tanım kümesi gerçel sayılar kümesidir; değer kümemizi de yine gerçel sayılar kümesi olarak alabiliriz. Biz daha çok $a > 1$ durumu ile ilgileneceğiz.

Tanım a pozitif bir gerçel sayı ve $a \neq 1$ olmak üzere $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan fonksiyona üstel fonksiyon denir.

Hocam bu tanımda $a = 1$ olursa ne olur?

O zaman her x gerçel sayısı için $a^x = 1^x = 1$ olacağından bu fonksiyon sabit fonksiyona dönüşür.

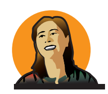
Ben de neden $a > 0$ aldığımızı anlayamadım. Mesela $a = -2$ alamaz mıydık?

(-2) sayısının tamsayı kuvvetlerini alabiliriz. Mesela, $(-2)^2 = 4$, $(-2)^3 = -8$ şeklinde tamsayı kuvvetleri anlamlıdır. Ancak herhangi bir gerçel sayı kuvvetini aldığımızda bu anlamlı olmayabilir. Örneğin, $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ olur. Ancak $\sqrt{-2}$ bir gerçel sayı değildir. Çünkü hiçbir gerçel sayının karesi -2 değildir.

Verdiğim tanıma göre bir üstel fonksiyon örneği verebilir misiniz arkadaşlar?

Mesela, $f(x) = x^2$ fonksiyonunu verebiliriz. Bu fonksiyonu daha önce fonksiyonlar ünitesinde gördük diye hatırlıyorum.

Üstel fonksiyon kavramını, polinom fonksiyon kavramıyla karıştırmayalım. Senin verdiğin fonksiyon örneğinde x değişkeni tabandadır. Ancak bizim verdiğimiz üstel fonksiyon tanımında x değişkeni üs'tedir.



Engin, çok çalışmaktan herşeyi karıştırmaya başladı Pınar Hocam. Ben, $f(x) = 2^x$ ve $g(x) = 10^x$ fonksiyonlarını verebilirim.

Çok Güzel. Peki $f(x) = 2^x$ ve $g(x) = 10^x$ fonksiyonlarının $-1, 1, 2$ ve $\frac{1}{2}$ noktalarındaki görüntülerini bulabilir misiniz?

Elbette.

$$\begin{array}{ll}
x = -1 & \text{için } f(-1) = 2^{-1} = \dfrac{1}{2} \\
x = 1 & \text{için } f(1) = 2^1 = 2 \\
x = 2 & \text{için } f(2) = 2^2 = 4 \\
x = \dfrac{1}{2} & \text{için } f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}
\end{array}$$

Aaa! Ne kadar kolaymış. O zaman $g(x) = 10^x$ fonksiyonunun $-1, 1, 2$ ve $\frac{1}{2}$ noktalarındaki görüntülerini de

$$x = -1 \text{ için } g(-1) = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$x = 1 \quad \text{için } g(1) = 10^1 = 10$$

$$x = 2 \quad \text{için } g(2) = 10^2 = 100$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{için } g\left(\frac{1}{2}\right) = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

şeklinde hesaplayabiliriz.

Çok güzel Gökçe. Şimdi de üstel fonksiyonları irdeleyelim. Her x gerçel sayısı için a^x sayısı daima pozitif bir gerçel sayı olacaktır. Ayrıca $x = 0$ için $a^0 = 1$'dir. $a > 1$ ve x'ler pozitif gerçel sayı ise a^x hakkında ne söyleyebiliriz?

Mesela, 2^x fonksiyonunu düşünelim. $x = 1$ için $2^1 = 2$, $x = 2$ için $2^2 = 4$, $x = 3$ için $2^3 = 8$ şeklinde artarak gider.

x'ler pozitif iken $2^x > 1$ olur.

Hiç şüphesiz Engin. $a > 1$ ve x'ler pozitif gerçel sayı ise $a^x > 1$'dir. x'ler negatif gerçel sayı olsa ne olurdu?

Hocam ne değişirdi ki?

Ne değişir düşünün bakalım.

$a > 1$ ve x pozitif gerçel sayı ise

$$a^x > 1$$

dir.

$y = 2^x$ üstel fonksiyonunda x'e negatif değerler verelim:

$$x = -1 \quad \text{için} \quad 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$x = -2 \quad \text{için} \quad 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$x = -3 \quad \text{için} \quad 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

şeklinde giderek sıfıra doğru yaklaşıyor sanki.

Evet çok güzel. $a > 1$ ve $x < 0$ ise $0 < a^x < 1$'dir.

$a > 1$ ve x negatif gerçel sayı ise

$$0 < a^x < 1$$

dir.

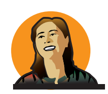
Pınar Hocam, üstel fonksiyonların özelliklerinden bahsedebilir miyiz?

Tabii ki Selçuk. Üstel fonksiyonların özelliklerini şu şekilde sıralayabiliriz. a ve b pozitif sayılar, x ve y gerçel sayılar olmak üzere, şu özellikler geçerlidir:

1. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
2. $a^{x+y} = a^x a^y$
3. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
4. $(a^x)^y = a^{xy}$
5. $(ab)^x = a^x b^x$

Peki, bu fonksiyonların grafiklerini nasıl çizebiliriz?

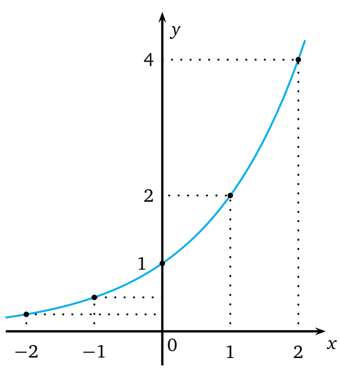
Fonksiyon grafiğini nasıl çizeceğimizi öğrenmiştik ya Gökçe! Pınar Hocam, Gökçe yine unutmuş.



Zeynep sen hatırlıyorsun galiba.

Evet hatırlıyorum Pınar Hocam.

O zaman 2^x üstel fonksiyonunun grafiğini çizebilir misin Zeynep?



Şekil 4.1: $y = 2^x$ üstel fonksiyonunun grafiği.

Tabii ki. x'e bazı değerler vererek bu değerlerin fonksiyon altındaki görüntüleri olan y değerlerini buluruz. Sonra bulduğumuz (x, y) ikililerine karşılık gelen noktaları düzlemde belirleriz. Bu noktaları düzgün bir eğriyle birleştirerek fonksiyon grafiğini bulmuş oluruz. Nokta sayısını artırırsak daha gerçekçi bir grafik elde ederiz.

Aferin sana Zeynep. O halde $f(x) = 2^x$ fonksiyonunda x'e bazı değerler vererek y değerlerini bulalım:

x	-2	-1	0	1	2
2^x	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$

Bulduğumuz bu değerlerden faydalanarak, $f(x) = 2^x$ fonksiyonunun grafiğini çizebiliriz (Şekil 4.1).

Fonksiyon grafiğinde dikkatinizi çeken birşey var mı?

Hocam, 2^x fonksiyonunun grafiğine baktığımızda x değerlerini artırdıkça fonksiyonun aldığı değerler de artıyor. Mesela, $1 < 2$ iken $2^1 < 2^2$ 'dir.

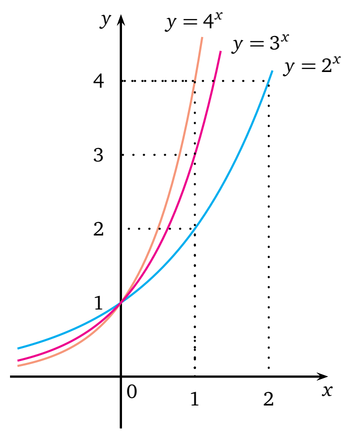
Çok güzel bir gözlem. Bunu genel olarak da söyleyebiliriz. $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonunda, $a > 1$ ise $x_1 < x_2$ için

$$a^{x_1} < a^{x_2}$$

olduğundan fonksiyon artan bir fonksiyondur.

$a > 1$ ise a^x fonksiyonu artan fonksiyondur.

Şimdi bazı üstel fonksiyonların grafiklerini aynı koordinat sisteminde görelim. Örneğin, $y = 3^x$ ve $y = 4^x$ fonksiyonlarının grafiklerini Şekil 4.2'de görebilirsiniz.



Şekil 4.2: $y = 2^x$, $y = 3^x$ ve $y = 4^x$ üstel fonksiyonlarının grafikleri.

Hocam, bu grafiklerde fonksiyonun grafiği hep x ekseninin üstünde kalıyor. Ayrıca tüm grafikler hep $(0, 1)$ noktasından geçiyor.

Neden acaba!

Aferin Selçuk. Çünkü, her x gerçel sayısı için $a^x > 0$ olduğundan üstel fonksiyonun grafiği, daima x ekseninin üstünde kalır. Ayrıca $x = 0$ değerine karşılık $y = a^0 = 1$ değeri karşılık geldiğinden grafik daima $(0, 1)$ noktasından geçmelidir.

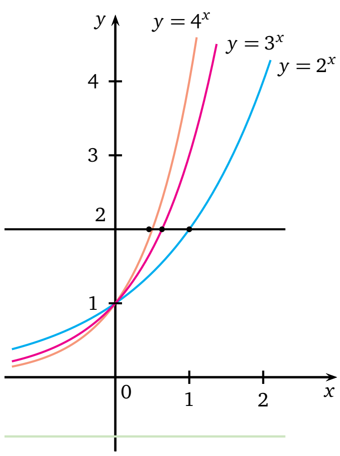
Her x gerçel sayısı için $a^x > 0$ olduğundan üstel fonksiyonun görüntü kümesi $(0, \infty)$ açık aralığıdır, diyebilir miyiz?

Haklısın Engin. Üstel fonksiyonların görüntü kümesi $(0,\infty)$ açık aralığıdır. Şimdi de geçmiş ünitedeki bilgilerimizi hatırlayalım. Fonksiyonlar ünitesinde bire-bir ve örten fonksiyon kavramlarını öğrendiniz. Bu kavramların ne olduğunu hatırlayan var mı?

Evet hocam, bire-bir fonksiyonda, farklı noktalara farklı fonksiyon değerleri karşılık gelir. Örten fonksiyonda fonksiyonun değer kümesinde açıkta eleman kalmaz.

Eğer fonksiyon grafiği veriliyorsa bu grafiğe bakarak fonksiyonun bire-bir mi örten mi olduğunu nasıl anlarız?

Bunu daha önce öğrenmiştik sanki!



Şekil 4.3: x eksenine paralel olarak çizilen bir doğru üstel fonksiyonun grafiğini en fazla bir noktada keser.

Evet Selçuk. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiği verildiğinde, her $y\in\mathbb{R}$ noktasından x eksenine paralel olarak çizilen bir doğru, fonksiyonun grafiğini en fazla bir noktada kesiyorsa fonksiyon bire-birdir, en az bir noktada kesiyorsa fonksiyon örtendir. Buna göre üstel fonksiyonlar hakkında ne söyleyebilirsiniz?

O zaman bizim tanımladığımız üstel fonksiyonlar bire-birdir. Çünkü, üstel fonksiyonun grafiğinde yatay doğrular grafiği en fazla bir noktada kesiyor.

Üstel fonksiyonlar aynı zamanda örtendir, öyle değil mi?

Değer kümesi olarak gerçel sayıları aldığımızda üstel fonksiyonlar örten olmaz. Örneğin, sıfır veya negatif sayılar, üstel fonksiyonun değeri olarak ortaya çıkmaz. Ancak değer kümesini pozitif sayılar olarak alırsak üstel fonksiyonlar örten olur. Dolayısıyla üstel fonksiyonu bundan sonra

$$f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$$

$$f(x)=a^x$$

şeklinde fonksiyonlar olarak düşüneceğiz. $(0,\infty)$ aralığını $\mathbb{R}^+$ ile de gösteriyoruz. Bu şekilde düşündüğümüzde, üstel fonksiyonlar, bire-bir ve örten olur. Bu sayede a^x'in ters fonksiyonunu tanımlayabileceğiz.

Şimdi de özel bir üstel fonksiyonla tanışacağız. $y = e^x$ üstel fonksiyonu.

Leonhard Euler(1707-1783)

Mete Hocam, tabanda bir sayı olmayacak mıydı? O e harfi de nedir?

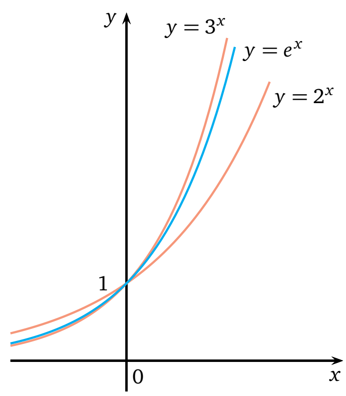
$e = 2,7182818284590\ldots$ şeklinde bir irrasyonel sayıdır. Bu e gösterimi, ilk kez İsviçreli matematikçi Leonhard Euler tarafından 1727 yılında *exponential* kelimesinin ilk harfi e olduğu için kullanılmıştır.

Hocam yoksa Euler'in ilk harfi e olduğu için olmasın?

Selçuk, sen de ne kadar art niyetlisin!

Bu nasıl bir üstel fonksiyondur ben anlamadım?

e sayısı da sonuçta bir sayıdır ve 2 ile 3 arasındadır. Bu üstel fonksiyonun grafiği, yanda gördüğünüz gibi $y = 2^x$ ve $y = 3^x$ üstel fonksiyonları arasındadır.



Şekil 4.4: $y = e^x$ üstel fonksiyonunun grafiği.

Logaritmik Fonksiyonlar

Size bir soru arkadaşlar: $2^x = 16$ eşitliği verildiğinde x değerini nasıl bulabiliriz?

Gayet kolay. 2'nin hangi kuvvetini alırsak 16 eder sorusunun yanıtını aramalıyız. 2'nin 4. kuvveti 16 olacağından x sayısı 4 olmalıdır.

Aferin Engin. Peki $3^x = 12$ eşitliğini sağlayan x değeri ne olur?

Pınar Hocam, bu x değerini bulamayız ki!

Neden?

3 sayısının 2. kuvvetini alırsak 9 sayısını buluruz. 3. kuvvetini alırsak 27 sayısını buluruz. Yani, x sayısı 2 ile 3 arasında bir yerdedir.

$a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonunun ters fonksiyonuna logaritma fonksiyonu denir ve $\log_a$ ile gösterilir. Buna göre

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

Evet çok doğru söylüyorsun Gökçe. x sayısını nasıl belirleyebiliriz ki!

İşte bu noktada karşımıza logaritma fonksiyonu çıkıyor. Üstel fonksiyonların değer kümesini $(0, \infty)$ açık aralığı aldığımızda üstel fonksiyonların bire-bir ve örten fonksiyonlar olduğunu gördük. O halde $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonunun ters fonksiyonundan bahsedebiliriz. İşte bu ters fonksiyona logaritma fonksiyonu diyeceğiz ve $f^{-1}(x) = \log_a x$ şeklinde göstereceğiz. Bu fonksiyonu kısaca $y = \log_a x$ şeklinde de yazıyoruz.

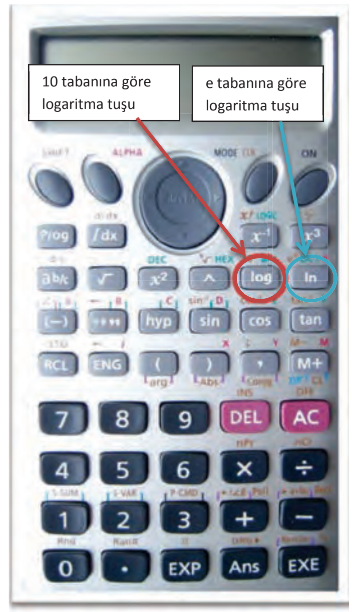
Bu logaritma fonksiyonunun tanımında $a = 1$ olabilir mi?

$y = a^x$ üstel fonksiyonunda a tabanı 1'den farklı pozitif bir gerçel sayıydı. Bunun tersi olan logaritma fonksiyonunda da a tabanı 1'den farklı pozitif bir gerçel sayı olmalıdır. Söyleyin bakalım $y = 10^x$ üstel fonksiyonunun ters fonksiyonu nedir?

$y = 10^x$ üstel fonksiyonunun ters fonksiyonu $y = \log_{10} x$'dir. Hocam $y = e^x$ üstel fonksiyonunun tersi de $y = \log_e x$'dir.

Harikasın Engin! e tabanına göre logaritmaya doğal logaritma denir ve ln ile gösterilir. 10 tabanına göre logaritmaya bayağı logaritma denir. 10 tabanına göre logaritma, çok kullanılan bir logaritma olduğundan $\log_{10} x$ gösterimi yerine tabana herhangi birşey yazmadan $\log x$ gösterimi kulanılır. Sayılar 10 tabanında yazıldığı için 10 tabanına göre logaritma sayısal işlemlerde büyük kolaylık sağlar. Hesap makinelerinde genellikle 10 tabanına ve e tabanına göre logaritma tuşları bulunur (Şekil 4.5).

Tanım 10 tabanına göre logaritmaya **bayağı logaritma**, e tabanına göre logaritmaya **doğal logaritma** denir.



Şekil 4.5: Hesap makinelerinde 10 tabanında ve e tabanında logaritma tuşları vardır.

Mete Hocam, $10^2 = 100$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda $\log_{10} 100 = 2$ diyebilir miyiz?

Elbette. $x > 0$ için $\log_a x$ sayısı, a tabanının x sayısını vermesi için gerekli olan üs'tür. Yani, $x = a^{\log_a x}$ yazabiliriz. Başka örnekler verebilir misiniz arkadaşlar?

Mesela, $2^5 = 32$ olduğundan $\log_2 32 = 5$'dir.

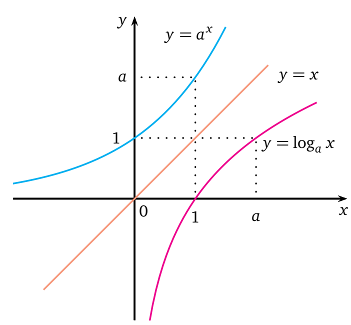
Ben de verebilirim, $10^3 = 1000$ olduğundan $\log_{10} 1000 = 3$ olur. $10^6 = 1000000$ olduğundan $\log_{10} 1000000 = 6$'dır.

Sen de kaptırdın gidiyorsun Selçuk. Çok sevdin bu fonksiyonları galiba.

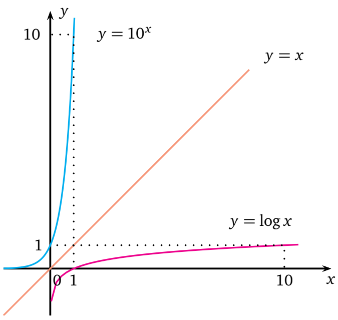
Evet Pınar Hocam, çok zevkliymiş bu fonksiyonlarla işlem yapmak!

Logaritma fonksiyonunun grafiğini çizebilir miyiz Mete Hocam?

Önce logaritma fonksiyonunda x'e bazı değerler vererek logaritma fonksiyonunun aldığı değerleri bulalım.



Şekil 4.6: $a > 1$ için $y = a^x$ ve $y = \log_a x$ fonksiyonlarının grafikleri.

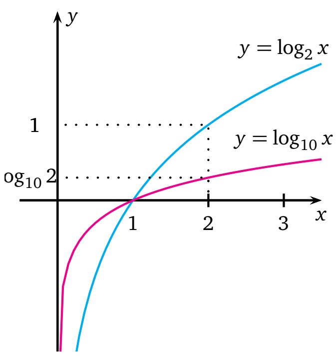


Şekil 4.7: $y = 10^x$ ve $y = \log x$ fonksiyonlarının grafikleri.

Hesaba kitaba gerek yok Zeynep. $a > 1$ için $y = a^x$ üstel fonksiyonun grafiğini biliyoruz. Bu grafiğin $y = x$ doğrusuna göre yansıması bize $y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiğini verecektir (Şekil 4.6).

Burada neden $y = a^x$'in grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre yansımasını aldık anlamadım?

Bir fonksiyonun grafiğini biliyorsak, ters fonksiyonunun grafiğini bulabilmek için $y = x$ doğrusuna göre yansımasını almak yeterlidir. Şekil 4.8'deki $a > 1$ değerleri için bazı logaritma fonksiyonlarının grafiklerine bir bakın bakalım. Neler gözlemliyorsunuz?



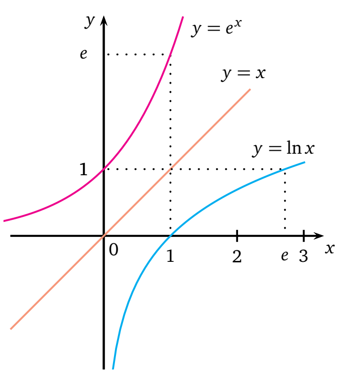
Şekil 4.8: $y = \log_2 x$ ve $y = \log_{10} x$ logaritma fonksiyonlarının grafikleri.

Grafiklerde taban ne olursa olsun logaritma fonksiyonları $(1, 0)$ noktasından geçmektedir. Yani bu da $\log_a 1 = 0$ olduğu anlamına gelir.

Ayrıca grafiklerde x'e artan değerler verdikçe fonksiyon değerleri de artmaktadır, yani logaritma fonksiyonları artan fonksiyonlardır.

Ne kadar kolaymış! Artık tüm logaritma fonksiyonlarının grafiklerini çizebiliriz. Örneğin, $\ln x$ fonksiyonunun grafiği nasıl acaba?

$\ln x$ fonksiyonunun grafiği, $y = e^x$ üstel fonksiyonunun $y = x$ doğrusuna göre yansımasıdır (Şekil 4.9).



Şekil 4.9: $y = \ln x$ doğal logaritma fonksiyonunun grafiği.

Üstel fonksiyonların özelliklerinden daha önceden bahsetmiştiniz. Bunlardan faydalanarak logaritmik fonksiyonların özelliklerinden de bahsedebilir miyiz?

Elbette Engin. Örneğin,

$$\log xy = \log x + \log y$$

olduğunu üstel fonksiyonlara geçiş yaparak kolaylıkla görebiliriz.

Nasıl kolaylıkla görebiliriz Mete Hocam? Size göre her şey kolay tabii.

Uğraşmazsan göremezsin zaten Gökçe.

Sen uğraş bakalım, nasıl buluyorsun?

$\log x = u$ ve $\log y = v$ diyelim. Bu durumda $x = 10^u$ ve $y = 10^v$'dir. Üstel fonksiyonların özelliklerini kullanırsak,

$$xy = 10^u 10^v = 10^{u+v}$$

olduğunu görürüz. Logaritma tanımından da

$$\log xy = u + v = \log x + \log y$$

eşitliğini buluruz.

Evet, gayet kolaymış!

Kendiniz de rahatça keşfedebiliyorsunuz. Diğer bir özellik,

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y.$$

Bunu da keşfedin bakalım.

x ve y pozitif gerçel sayıları için
1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a x^y = y \log_a x$

Bunu ben yapmak istiyorum Mete Hocam. $\log x = u$ ve $\log y = v$ diyelim. Bu durumda $x = 10^u$ ve $y = 10^v$'dir. Üstel fonksiyonların özelliğinden,

$$\frac{x}{y} = \frac{10^u}{10^v} = 10^{u-v}$$

dir. Logaritma tanımından,

$$\log \frac{x}{y} = u - v = \log x - \log y$$

eşitliğini elde ederiz.

Benzer şekilde şu özelliği de gösterebilirsiniz:

$$\log x^y = y \log x$$

Mete Hocam, logaritma fonksiyonu için tanımladığımız özellikler $\ln x$ fonksiyonu için de geçerli midir?

Tabii ki Selçuk, $\ln x$ fonksiyonu da sonuçta bir logaritma fonksiyonudur.

Konuyu pekiştirmek adına biraz örnek yapabiliriz artık. Örneğin,

$$\log 50 + \log 8 - 2\log 2$$

ifadesinin belirttiği sayı kaçtır acaba?

Logaritma özelliklerini sırasıyla kullandığımızda

$$\begin{aligned} \log 50 + \log 8 - 2\log 2 &= \log 50 \cdot 8 - \log 2^2 \\ &= \log 400 - \log 4 \\ &= \log\left(\frac{400}{4}\right) \\ &= \log 100 \\ &= 2 \end{aligned}$$

sonucunu buluruz.

Bravo Gökçe! Peki, $\log 50$ kaçtır acaba?

Hımm. . . 50 sayısı 10 ile 100 arasında olduğundan $\log 50$ sayısı da 1 ile 2 arasındadır. Ama acaba kaçtır?

Bunu bilmeyecek ne var. Tuşa bastın mı çıkıyor: $1,69897000\ldots$

Peki $\ln 50$ kaç o zaman?

O da kolay hayatım. Şimdi de ln tuşuna basayım: $3,91202300\ldots$

Süpersiniz Arkadaşlar! Öğrendiniz bu işi.

Ne İşe Yarar Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar?

Hocam, üstel ve logaritmik fonksiyonları ve bu fonksiyonların özelliklerini anlattınız. Bunlar nerelerde kullanılıyor, ne işimize yarayacak?

Hiçbir işimize yaramayacak, öğreneceksiniz diyorlar öğreniyoruz işte. Bu zamana kadar hiçbir yerde kullanmadım.

Olur mu Gökçe? Aslında farkında olmadan kullanıyoruz. Mesela, 5000 TL paranız var ve bu parayı yıllık %15 bileşik faiz oranıyla bankaya yatırdığınızda kaç yıl sonra bankadaki hesap tutarının iki katına çıkacağını hesaplayabilir misiniz?

Böyle bir param olmadığı için hesaba kitaba gerek yok.

Şu an gerekli olmayabilir ama belki ilerde ihtiyaç duyabilirsin! Faiz hesaplarında üstel ve logaritmik fonksiyonlar kullanılmaktadır. Faiz hesapları daha sonraki ünitelerde ayrıntılı olarak ele alınacağı için burada bu hesaplara girmeyeceğiz. Ancak üstel ve logaritmik fonksiyonların nasıl kullanıldığını görmeniz için biraz önceki örneği hesaplayabiliriz.

Hocam bileşik faiz de neymiş? İlk defa duydum.

Bileşik faiz, belirli zaman aralıklarında kazanılan faizin, anaparaya eklenmesiyle elde edilen tutarın faizidir.

1 yıl sonra hesaptaki para ne kadar olur?

Başlangıçtaki para 5000 TL olduğundan 1 yıl sonra hesaptaki para

$$5000 + 5000 \cdot \frac{15}{100} = 5000 + 50 \cdot 15 = 5750$$

olur.

Bunu $5000 \cdot \left(1+\frac{15}{100}\right)$ olarak da düşünebiliriz. Yani elimizdeki parayı $\left(1+\frac{15}{100}\right)$ ile çarpıyoruz. Peki, 2 yıl sonra hesaptaki para ne kadar olur?

Bir yıl sonraki hesaptaki para $5000 \cdot \left(1+\frac{15}{100}\right)$ oluyor. O halde 1 yıl daha geçerse bu parayı da $\left(1+\frac{15}{100}\right)$ ile çarpmamız gerekecek. Demek ki elimizde 2 yıl sonra

$$5000 \cdot \left(1+\frac{15}{100}\right) \cdot \left(1+\frac{15}{100}\right) = 5000 \cdot \left(1+\frac{15}{100}\right)^2 = 6612,5$$

kadar para olacaktır.

Hocam, sanki bu şekilde devam ettiğimizde t yıl sonra hesaptaki para

$$5000 \cdot \left(1+\frac{15}{100}\right)^t$$

olacak gibi geliyor.

Haklısın Engin. O halde t yıl sonra hesaptaki paranın iki katına çıkması için t'nin ne olması gerektiğini bulun bakalım.

t yıl sonra hesaptaki para 10000 olmalıdır. Yani,

$$\begin{aligned} 5000 \cdot \left(1+\frac{15}{100}\right)^t &= 10000 \\ \left(1+\frac{15}{100}\right)^t &= 2 \end{aligned}$$

olur. Burada t'yi bulabilmek için logaritmayı kullanmamız gerekir. Her iki tarafın 10 tabanına göre logaritmasını alırsak

$$\begin{aligned} \log\left(1+\frac{15}{100}\right)^t &= \log 2 \\ t \cdot \log\left(1+\frac{15}{100}\right) &= \log 2 \\ t &= \frac{\log 2}{\log(1,15)} \\ &\approx 4,96 \text{ yıl} \end{aligned}$$

Harikasın Gökçe. Bu hesaplardan sonra 5000 TL'nin yıllık %15 bileşik faiz oranıyla iki katına çıkabilmesi için 5 yıla yakın bir süre beklenmesi gerektiği sonucu çıkıyor.

Üstel ve logaritmik fonksiyonlar, bileşik faiz dışında, nüfus artışının hesabında da kullanılmaktadır. Belli bir zaman başlangıcında nüfus y_0, birim zamandaki nüfus artış yüzdesi x olsun. t zaman sonra, başlangıçtaki nüfus ile nüfus artışının toplamı olan toplam nüfus y_t olsun. Nüfus artışını, $y_t = y_0 \cdot \left(1 + \dfrac{x}{100}\right)^t$ formülü ile hesaplayabiliriz.

Bunu bir örnekle açıklayalım. Yaşadığınız şehrin nüfusunu biliyor musunuz?

Elbette. Yaklaşık 600 bin diyebiliriz.

Ortalama yıllık nüfus artış yüzdesi %1,2 olarak düşünülürse 10 yıl sonra yaşadığınız şehrin nüfusu ne kadar olacaktır?

Başlangıçtaki nüfus $y_0 = 600000$, artış yüzdesi $x = 1,2$ olduğundan 10 yıl sonraki nüfus

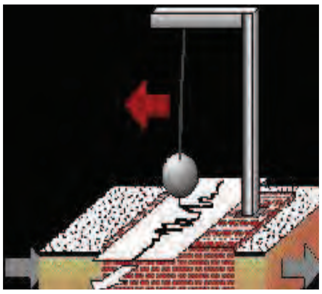
$$600000 \cdot \left(1 + \frac{1,2}{100}\right)^{10} \approx 676015$$

olur.

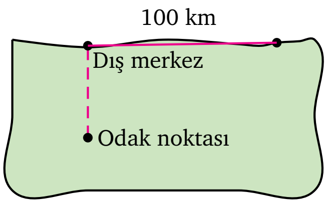
Yani, şehrimizin nüfusu 10 yıl sonra 676015 mi olacak?

Artış yüzdesi bu şekilde olursa evet, ancak artış yüzdesi düşerse yani daha yavaş artma olursa nüfus, 676015'den daha az olacaktır. Artış yüzdesi yükselirse yani daha hızlı bir artış olursa nüfus, 676015'den daha fazla olacaktır.

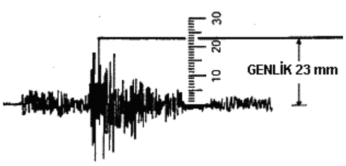
Vay canına! Üstel ve logaritmik fonksiyonları daha başka nerelerde kullanıyoruz?



Şekil 4.10: Sismograf.



Şekil 4.11: Depremin büyüklüğü, dış merkezden 100 km uzaklıkta ve sert zemine yerleştirilmiş özel bir sismografla hesaplanır.



Şekil 4.12: Sismografda genliğin hesaplanması.

Aslında bilimde pek çok alanda kullanılır. Mesela, ülkemizde ve dünyada birçok yerde deprem gerçeğiyle karşı karşıya kalmaktayız. Haberlerde duyuyoruz "Richter ölçeğine göre $5,5$ büyüklüğünde deprem meydana geldi" diye. Ama bu $5,5$'in nereden geldiğini bilmiyoruz. İşte bu değer, 10'luk tabandaki logaritma kullanılarak bulunan bir değerdir.

Mete Hocam, bu büyüklüğü logaritmayı kullanarak nasıl buluyoruz?

Amerika Birleşik Devletleri'nden Profesör Charles F. Richter, dış merkezden 100 km uzaklıkta ve sert zemine yerleştirilmiş özel bir sismografla kaydedilmiş zemin hareketinin, mikron (1 mikron 1/1000 mm) cinsinden ölçülen maksimum genliğinin 10 tabanına göre logaritmasını depremin büyüklüğü olarak tanımlamıştır. Richter ölçeği logaritmik olduğundan, ölçekteki her tamsayı farkı deprem genliğinde 10 kat artışa denk gelir. Yani, örneğin Richter ölçeğine göre 5 büyüklüğündeki bir depremin genliği, 4 büyüklüğündeki bir depremin genliğinin 10 katı, 3 büyüklüğündeki depremin genliğinin ise 100 katıdır.

Müthiş! Gerçekten, bunu bilmiyordum.

Şekil 4.12'de gördüğünüz gibi depremin genliği 23 mm olarak ölçülmüştür. Acaba depremin büyüklüğü kaç olabilir?

Öncelikle 23 mm'yi mikron'a çevirmemiz gerekir. 1 mikron 1/1000 mm olduğundan 23 mm 23000 mikrondur. 23000 mikronun 10 tabanına göre logaritması

$$\log 23000 \approx 4,3$$

olacağından Richter ölçeğine göre büyüklüğü yaklaşık $4,3$ olur.

Harikasın Engin! Deprem hakkında bu kadar konuştuğumuz yeter. Deprem hakkında daha ayrıntılı bilgiyi okuma parçasında bulabilirsiniz.

Ben de kimyadaki kullanım alanından bahsetmek istiyorum. Marketlerden aldığınız pet şişedeki suların üzerine baktığınızda mineral değerleriyle birlikte pH değeri de yazmaktadır. İşte hergün içilen suyun kalite ve sınıflandırma faktörlerinden biri olan pH derişiminin hesaplanmasında logaritma kullanılır. Sulu çözeltilerdeki [H+] veya [OH-] derişimleri genellikle çok küçük sayılar olduğundan işlemlerde kolaylık sağlaması için derişimlerin 10 tabanına göre eksi logaritmalarını alarak derişimler tamsayılarla ifade edilir. pH değeri, sulu çözeltideki [H+] iyonu derişiminin 10 tabanına göre eksi logaritmasıdır, yani, pH$= -\log[\mathrm{H+}]$'dır. pOH değeri ise, sulu çözeltideki [OH+] iyonu derişiminin 10 tabanına göre eksi logaritmasıdır, yani, pOH$= -\log[\mathrm{OH+}]$'dır. Örneğin, şehrimizdeki kaynak suyunun pH değeri $7,15$'dir.

Kimya demişken, lise yıllarımdayken yaptığımız deneyler aklıma geldi.

Evet ben de hatırlıyorum. Bakteri popülasyonundaki çoğalmayı mikroskopla inceliyorduk ve bakteri popülasyonu çok hızlı bir şekilde artıyordu.

O zaman hayalimizde şöyle bir deney yapalım: Bir besi ortamındaki bakteri popülasyonunu düşünelim. Belli zaman aralıklarında örnekler alarak bakteri popülasyonunun her saatte bir üç katına çıktığını belirlediğimizi düşünelim. Başlangıçtaki bakteri sayısı 100 olsun. t saat sonra bakteri popülasyonunu $y(t)$ ile gösterirsek, t saat sonraki bakteri popülasyonunu hesaplayabilir misiniz?

Başlangıçtaki bakteri sayısı 100 olduğuna göre
$y(0) = 100$'dür.

$$\begin{aligned} y(1) &= 3 \cdot y(0) = 3 \cdot 100 \\ y(2) &= 3 \cdot y(1) = 3 \cdot 3 \cdot 100 = 3^2 \cdot 100 \\ y(3) &= 3 \cdot y(2) = 3 \cdot 3^2 \cdot 100 = 3^3 \cdot 100 \end{aligned}$$

Buradan

$$y(t) = 100 \cdot 3^t$$

şeklinde bir genelleme yapabiliriz. Yani, bakteri popülasyonu artış fonksiyonu, bir sabit ile $y = 3^t$ üstel fonksiyonunun çarpımıdır.

Ne kadar hızlı bir artış! Çok geçmeden bakteriler tüm dünyayı kaplayabilir.

Yeterli besin, sınırsız alan gibi ideal koşullar altında t zaman sonraki artışı hesaplıyoruz aslında. Yani, teorik olarak kağıt üstü hesaplamalarımızda böyle astronomik sonuçlara ulaşsak da, doğa, bakterinin çoğalarak dünyayı kaplamasına izin vermez neyse ki.

Pınar Hocam, bu zamana kadar yaptığımız örneklerde hep üstel artış söz konusuydu. Üstel azalışın söz konusu olduğu örnekler var mı?

Olmaz mı? Üstel azalışın en güzel örneği radyoaktif bozunmadır. Maddenin başlangıçtaki kütlesi y_0 olsun. t zaman sonra kalan kütle $y(t)$ olmak üzere $y(t)$'yi

$$y(t) = y_0 \cdot e^{kt}$$

formülüyle buluruz. Burada k, üstel azalış katsayısıdır.

Şu örneğe bakalım: Bizmut-210'un yarı-ömrü 5 gündür. Başlangıçtaki kütlesi 1600 miligram ise 3 hafta sonra kalan kütleyi bulabilir misiniz?

Yarı-ömür de neymiş?

Maddenin yarısının bozunması için gereken süredir.

Tamam o zaman, ben bulabilirim. Başlangıçtaki kütlesi 1600 miligram ise $y_0 = 800$'dür. Yarı-ömrü 5 gün olduğundan $y(5) = \frac{1}{2} \cdot 1600 = 800$ olacaktır.

Miktar	t gün sonra	Kalan Miktar
1600	5	800
800	5	400
400	5	200
200	5	100

Yani, 1600 miligram Bizmut-210'un 20 gün sonra kalan kütlesi 100 miligramdır. 25 gün sonra 50 miligram kalacağına göre, 3 hafta da 21 gün olduğuna göre... Hımm... Demek ki 100 miligramdan az 50 miligramdan fazla madde kalacaktır.

Kesin değeri bulmak isterseniz biraz önce yazdığımız formülü kullanmanız gerekecek. Haydi biraz çalışın bakalım.

Bravo Gençler! Böylece üstel ve logaritmik fonksiyonların nerelerde kullanıldığını öğrenmiş oldunuz. Bundan sonra "Bu fonksiyonlar ne işimize yarayacak?" şeklinde serzenişte bulunmazsınız umarım.

Özet

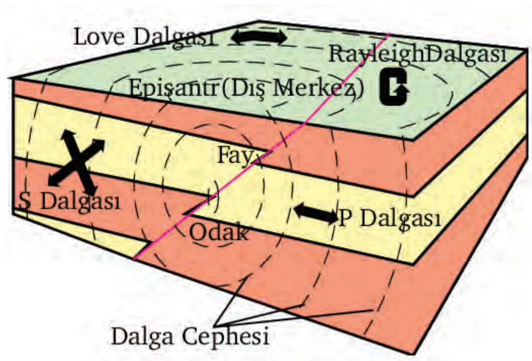
Bu ünitede, $y = a^x$ şeklindeki üstel fonksiyonların tanımı, üstel fonksiyonların özellikleri ve grafik çizimleri üzerinde durduk. $y = a^x$ üstel fonksiyonun ters fonksiyonu olan $y = \log_a x$ logaritmik fonksiyon kavramını verdik ve logaritmik fonksiyonun özellikleri ve bu fonksiyonların grafik çizimleri üzerinde durduk. Üstel ve logaritmik fonksiyonlar, matematiksel modellemede ve bileşik faiz hesapları, nüfus artışı, radyoaktif bozunma gibi birçok problemlerin çözümünde yaygın şekilde kullanılmaktadır. Bu fonksiyonların nerelerde kullanıldığına dair örnekler vererek konunun pekiştirilmesini sağladık.

Okuma Parçası

DEPREM ve LOGARİTMA

Yerkabuğu içindeki kırılmalar nedeniyle ani olarak ortaya çıkan titreşimlerin dalgalar halinde yayılarak geçtikleri ortamları ve yer yüzeyini sarsma olayına "DEPREM" denir. Deprem, insanın hareketsiz kabul ettiği ve güvenle ayağını bastığı toprağın da oynayacağını ve üzerinde bulunan tüm yapıların da hasar görüp, can kaybına uğrayacak şekilde yıkılabileceklerini gösteren bir doğa olayıdır.

Odak noktası, yerin içinde depremin enerjisinin ortaya çıktığı noktadır. Gerçekte, enerjinin ortaya çıktığı bir nokta olmayıp bir alandır, fakat pratik uygulamalarda nokta olarak kabul edilmektedir. Episantr (Dış Merkez), odak noktasına en yakın olan yer üzerindeki noktadır. Burası aynı zamanda depremin en çok hasar yaptığı veya en kuvvetli olarak hissedildiği noktadır. Aslında bu, bir noktadan çok bir alandır.



Odak noktası, dış merkez ve sismik deprem dalgalarının yayılışı

Depremin dış merkez alanı depremin şiddetine bağlı olarak çeşitli büyüklüklerde olabilir. Bazen büyük bir depremin odak noktasının boyutları yüzlerce kilometreyle de belirlenebilir. Bu nedenle "Episantr Bölgesi" ya da "Episantr Alanı" olarak tanımlama yapılması gerçeğe daha yakın bir tanımlama olacaktır.

Şiddet, herhangi bir derinlikte olan depremin, yeryüzünde hissedildiği bir noktadaki etkisinin ölçüsü olarak tanımlanmaktadır. Diğer bir deyişle depremin şiddeti, onun yapılar, doğa ve insanlar üzerindeki etkilerinin bir ölçüsüdür. Bu etki, depremin büyüklüğü, odak derinliği, uzaklığı yapıların depreme karşı gösterdiği dayanıklılık dahi değişik olabilmektedir. Şiddet, depremin kaynağındaki büyüklüğü hakkında doğru bilgi vermemekle beraber, deprem dolayısıyla oluşan hasarı yukarıda belirtilen etkenlere bağlı olarak yansıtır.

Magnitüd, deprem sırasında açığa çıkan enerjinin bir ölçüsü olarak tanımlanmaktadır. Enerjinin doğrudan doğruya ölçülmesi olanağı olmadığından, Amerika Birleşik Devletleri'nden Prof. C. Richter tarafından 1930 yıllarında bulunan bir yöntemle depremlerin aletsel bir ölçüsü olan "Magnitüd" tanımlanmıştır. Prof. Richter, episantr'dan 100 km. uzaklıkta ve sert zemine yerleştirilmiş özel bir sismografla (2800 büyütmeli, özel periyodu 0.8 saniye ve %80 sönümü olan bir Wood-Anderson torsiyon Sismografı ile) kaydedilmiş zemin hareketinin mikron cinsinden (1 mikron 1/1000 mm) ölçülen maksimum genliğinin 10 tabanına göre logaritmasını bir depremin "magnitüdü" olarak tanımlamıştır. Bugüne dek olan depremler istatistik olarak incelendiğinde kaydedilen en büyük magnitüd değerinin 8.9 olduğu görülmektedir (31 Ocak 1906 Colombiya-Ekvator ve 2Mart 1933 Sanriku-Japonya depremleri).

Gözlemevleri tarafından bildirilen depremin magnitüdü, depremin enerjisi hakkında fikir vermez. Çünkü deprem sığ veya derin odaklı olabilir. Magnitüdü aynı olan iki depremden sığ olanı daha çok hasar yaparken, derin olanı daha az hasar yapacağından arada bir fark olacaktır. Yine de Richter ölçeği (magnitüd) depremlerin özelliklerini saptamada çok önemli bir unsur olmaktadır.

Depremlerin şiddet ve magnitüdleri arasında birtakım ampirik bağıntılar çıkarılmıştır. Bu bağıntılardan şiddet ve magnitüd değerleri arasındaki dönüşümleri aşağıdaki gibi verilebilir.

Şiddet	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Richter Magnitüdü	4	4.5	5.1	5.6	6.2	6.6	7.3	7.8	8.4

Kaynak: T.C. Başbakanlık Afet ve Acil Durum Yönetimi Başkanlığı Deprem Dairesi Başkanlığı, www.deprem.gov.tr

Çıkarın Kağıtları

1. $\log_2 32$ kaçtır?

2. Bir milyarın 10 tabanına göre logaritması kaçtır?

3. Richter ölçeğine göre 6 büyüklüğündeki bir deprem ile, 3 büyüklüğündeki bir depremi mukayese edebilir misiniz?

4. Milyonda birin 10 tabanına göre logaritması kaçtır?

A) -5

B) -6

C) -7

D) -8

E) -9

5. $\log 2 \approx 0,3$ ise $\log 8$ kaçtır?

A) $1,2$

B) $-0,4$

C) $0,6$

D) $0,9$

E) $1,6$

6. $\log_2 x = 6$ ise x'in değeri kaçtır?

A) 4

B) 8

C) 16

D) 32

E) 64

7. $\log_a 32 = 5$ ise a'nın değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$

B) 2

C) 4

D) $\frac{1}{4}$

E) -2

8. 1 ay süreli bir işe giren bir kişi için aşağıdaki ücret alma şekillerinden hangisi en avantajlıdır?

A) 1000 TL

B) İlk hafta 6 TL, ikinci hafta 6^2 TL gibi 6'nın kuvvetleri şeklinde artan bir ücret

C) İlk 15 gün 450 TL, son 15 gün 600 TL

D) İlk 10 gün 300 TL, ikinci 10 gün 400 TL, son 10 gün 500 TL

E) Her 5 günde bir 150 TL

9. Aşağıdaki sayıların hangisi en büyüktür?

A) $\log_2 16$

B) $\log_3 9$

C) $\log_5 25$

D) $\log 10$

E) $\log 1000$

10. Aşağıdaki sayılardan hangisi en küçüktür?

A) 2^{10}

B) 10^2

C) 2^{-10}

D) 10^{-2}

E) 0

Çözümler

1. $2^5 = 32$ olduğundan $\log_2 32 = 5$'dir.

2. Bir milyar sayısı $1\ 000\ 000\ 000 = 10^9$ olduğundan bir milyarın 10 tabanına göre logaritması $\log_{10} 10^9 = 9$ olur.

3. Richter ölçeğine göre depremin büyüklüğü, dış merkezden 100 km uzaklıkta ve sert zemine yerleştirilmiş özel bir sismografla kaydedilmiş zemin hareketinin, mikron (1 mikron 1/1000 mm) cinsinden ölçülen maksimum genliğinin 10 tabanına göre logaritması idi. Richter ölçeği logaritmik olduğundan, ölçekteki her tamsayı farkı deprem genliğinde 10 kat artışa denk gelir. Yani, Richter ölçeğine göre 4'lük bir deprem, 3'lük bir depremden 10 kat daha büyük, 5'lik bir deprem, 4'lük bir depremden 10 kat daha büyük ve 6'lık bir deprem, 5'lik bir depremden 10 kat daha büyük olduğuna göre 6'lık bir deprem, 3'lük bir depremin 1000 katıdır.

4. Milyonda biri $\frac{1}{10^6} = 10^{-6}$ şeklinde yazabiliriz. Bu sayının 10 tabanındaki logaritması

$$\log 10^{-6} = -6$$

şeklinde bulunur. Doğru cevap B şıkkıdır.

5. $\log 2 \approx 0,3$ ise

$$\begin{aligned} \log 8 &= \log 2^3 \\ &= 3 \cdot \log 2 \\ &\approx 3 \cdot 0,3 \\ &= 0,9 \end{aligned}$$

6. $\log_2 x = 6$ ise logaritmanın tanımından $x = 2^6 = 64$ olmalıdır. Doğru cevap E şıkkıdır.

7. $\log_a 32 = 5$ ise üstel fonksiyonlara geçersek $a^5 = 32$ olur. Buradan $a^5 = 2^5$ eşitliğinde üsler eşit olduğundan tabanlar da eşit olmalıdır. Yani $a = 2$ olmalıdır. Doğru cevap B şıkkıdır.

8. A şıkkında aylık ücret 1000 TL,

C şıkkında aylık ücret $450 + 600 = 1050$ TL,

D şıkkında aylık ücret $300 + 400 + 500 = 1200$ TL'dir.

E şıkkında her 5 günde bir 150 TL kazanacağından ayda $150 \times 6 = 900$ TL kazanır.

Ancak B şıkkında üstel artış söz konusudur. İlk hafta 6 TL, ikinci hafta $6^2 = 36$ TL, üçüncü hafta $6^3 = 216$ TL ve son hafta $6^4 = 1296$ TL alacaktır. Bu durumda aylık ücret

$$6 + 36 + 216 + 1296 = 1554$$

TL olur. Yani, en avantajlı olanı B şıkkıdır.

9. A şıkkında $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$,

B şıkkında $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$

C şıkkında $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$

D şıkkında $\log 10 = 1$

E şıkkında $\log 1000 = \log 10^3 = 3$

eşitlikleri vardır. O halde bu sayılardan en büyük olanı 4 olduğundan cevap A şıkkıdır.

10. A şıkkındaki sayı $2^{10} = 1024$ ve

B şıkkındaki sayı $10^2 = 100$ olduğundan 1'den büyük sayılardır.

C şıkkındaki sayı

$$2^{-10} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$$

ve D şıkkındaki sayı

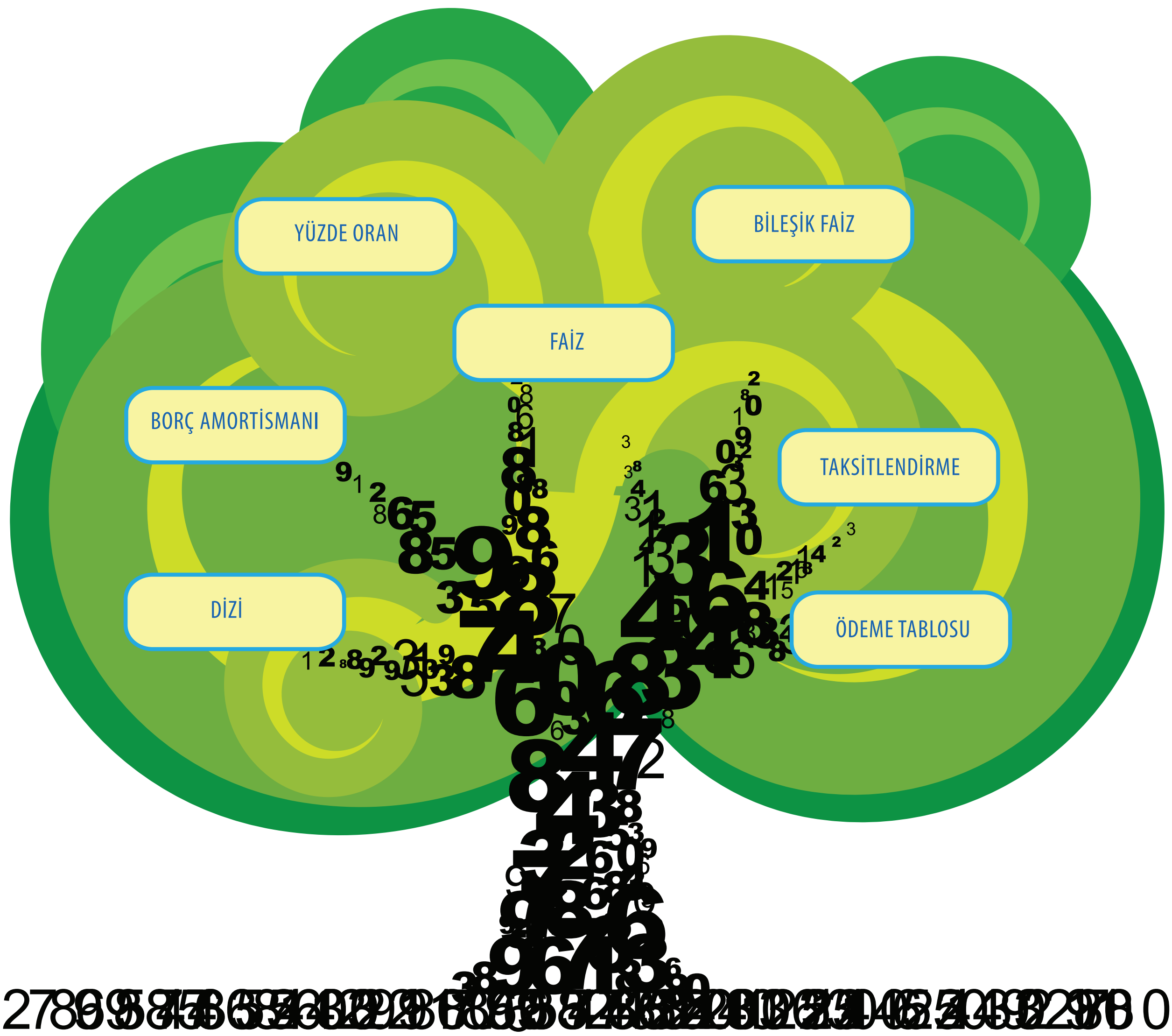
$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

0 ile 1 arasındadır. Dolayısıyla en küçük sayı E şıkkındaki 0 sayısıdır.

Yüzde ve Faiz Hesapları

100 liralık haftalığımı önce %10 indirdiler, sonra %10 arttırdılar, oldu 99 lira. Nerde benim 1 lira?

5. GENEL MATEMATİK ÜNİTE



Yüzde Hesapları

Biraz da uygulama arkadaşlar! Şimdiye kadar her derste yeni bir matematiksel kavramla tanıştık. Bu derste yüzde ve faiz hesaplarının nasıl yapıldığını öğreneceğiz.

Yüzde hesaplarını öğrenmemiz ne kadar iyi olur hocam. Yılbaşına doğru her yerde indirim vardı. Bazıları yarı fiyatına, bazıları %20, bazıları %60, hatta daha fazlası da vardı!

Bir büyüklüğün %60'ı demek, eğer o büyüklük 100 birim olsaydı 60 birimi demektir.

Kocaman indirim ilanlarıyla dükkanların vitrinlerini süslüyorlar.

Üstelik yüzde işaretini de kimi sayının önüne kimi de ardına yazıyor. Hocam, bu yüzde gösterimine neden gerek duyuluyor?

Arkadaşlar, aslında %20 demek $0,20$ demektir. Ama hepimiz bir nedenle kesirli ya da ondalık sayıları pek sevimli bulmayız. Bu, belki tamsayıların bize daha tanıdık olmasındandır.

Ne olurdu yalnızca tam sayılar yeterli olsaydı!

Hayat o kadar kolay değil arkadaşlar. Yüzde hesaplarında, hatta genel olarak oranlarda, her zaman değilse de büyük çoğunlukla birden küçük sayılardan bahsederiz. Bundan dolayı muhtemelen insanlar 0,20 demek yerine $\frac{20}{100}$ ya da %20 demeyi tercih ediyor. Yani bu yüzde gösterimi paydası 100 olan bir bayağı kesirden başka bir şey değildir. Yüzde gösterimleri bağıl değişimlerin söz konusu olduğu durumlarda faydalıdır. Ama bir de mutlak değişimler var tabii. Örneğin, bir malın fiyatının 20 TL artmasından ya da 40 TL azalmasından söz edebiliriz. Bunlar malın fiyatı üzerindeki mutlak değişimlerdir. Bu sayılar şüphesiz değişimin değeri hakında bilgi verir, hatta değişimin ne olduğunu tüm açıklığı ile söyler.

Yüzdeler büyüklük değil, yalnızca orandır! Yani bir büyüklüğün ne kadarından bahsettiğimizi ifade eder.

Tamam işte! Sayı ne kadar artmış ya da azalmış bildiğimize göre, ne gerek var başka bir şeye?

Ama bu mutlak sayılar, söz konusu değişimin mahiyetini tam anlamıyla ifade etmez arkadaşlar. Bu durum, örneğin menkul kıymetler borsasında, sıkça görülür. Borsada iki farklı kağıt düşünelim. Bir ay içinde bunlardan birinin fiyatı 5 TL'den 12 TL'ye, diğerinin fiyatı da 100 TL'den 180 TL'ye yükselsin. Mutlak olarak bakıldığında birinci kağıdın fiyatı 7 TL ve ikinci kağıdın fiyatı da 80 TL artmıştır. Yani ikinci kağıdın değeri mutlak olarak kat be kat fazla artmıştır. Ama gerçekte durum böyle midir, hangisi daha fazla kâr getirir? Bir yatırımcı elindeki 500 TL ile fiyatı 5 TL olan kağıttan alsaydı bunlardan $\frac{500}{5} = 100$ tane alıp ay sonunda parasını $100 \times 12 = 1200$ TL'ye yükseltir, yani 700 TL kâr ederdi. Eğer diğer kağıttan alsaydı bunlardan $\frac{500}{100} = 5$ tane alıp ay sonunda parasını $5 \times 180 = 900$ TL'ye yükseltir, dolayısıyla 400 TL kâr ederdi. Buradan görülüyor ki, fiyatı mutlak olarak daha az artan kağıt çok daha fazla kâr sağlayabilir. Yani bir kısım değişimlerin mevcut büyüklüğün ne kadarı olduğunu bilmek o değişimin mutlak miktarını bilmekten çok daha anlamlı olabilir. İşte yüzde gösterimi bu bağıl değişimleri ifade etmek için çok faydalıdır. Örneğin bir hisse senedinin değeri 100 TL'den 180 TL'ye yükseldiyse hissenin değeri, bağıl olarak $\frac{180-100}{100} = \frac{80}{100}$ oranında artmıştır. İşte bu artışı %80 olarak gösteriyoruz. Yani, %p demek $\frac{p}{100}$ demenin başka bir şeklidir.

$\frac{3}{5}$ kesirli sayısı hem "üç bölü beş" olarak hem de "beşte üç" olarak okunur. Bu kesri 20 ile genişletirsek $\frac{60}{100}$ olur. İşte %60 budur.

Ben de bu % gösterimini hep başka bir şey sanırdım hocam. Yani %12 derken $\frac{12}{100}$ kesrini sadece başka türlü okuyormuşuz! Sayının yarısı, üçte biri ya da çeyreği derken bunlara bir çözüm bulmuşuz, diğerlerini de bu yüzde oranlarla ifade ediyoruz.

Şimdi bir sayının yarısı derken bu sayıyı yarıma karşılık gelen $\frac{1}{2}$ kesri ile çarpıyoruz. O halde bir sayının %25'i dediğimizde de bu sayıyı $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ kesri ile çarpacağız.

Yüzde hesapları günlük hayatın ayrılmaz bir parçasıdır. Bir büyüklüğün %p'si deyince, bu büyüklüğün 100 kısmından p kısmının kastedildiğini anlıyoruz.
Örneğin 12'nin %25'i olan sayı $12 \times \frac{25}{100} = 3$'dür. Önceki derslerde denklemleri de öğrendiğinize göre %20'si 15 eden sayıyı da bulabilirsiniz, değil mi?

Bir sayının %p'si

$$\boxed{sayı \times \frac{p}{100}}$$

sayısıdır.

Bundan kolay ne olabilir hocam! Yani $sayı \times \frac{20}{100} = 15$ olmalıymış. Buradan $sayı = \frac{15 \times 100}{20} = 75$ bulunur.

Şekil 5.1: Fatih'in altın sikkeleri.

Bravo Zeynep, sessiz duruyorsun ama her şeyi de bir güzel anlamışsın. Bir de bir büyüklüğün bir yüzde oran artışı ya da azalışı sonucu oluşan yeni değeri de çok konu edilir. Örneğin 50 sayısını %4 artırdığımızda yeni sayı ne olur?

Bu da çok fazla zor olmamalı hocam. Başlangıçta verilen sayıya yüzde oran artışı kadar eklenmeli ya da yüzde oran eksilişi kadar çıkarılmalı sanırım, değil mi?

Haklısın Selçuk. 50 sayısını %4 artırdığımızda oluşan sayı $50 + 50 \times \frac{4}{100} = 52$'dir. Bu durumda bir genelleme yapılırsa, bir sayı $\%p$ artırıldığında oluşan yeni sayı,

$$\mathit{sayı} + \mathit{sayı} \times \frac{p}{100}$$

olur.
Benzer şekilde bir sayı $\%p$ azaltıldığında oluşan yeni sayı,

$$\mathit{sayı} - \mathit{sayı} \times \frac{p}{100}$$

olur. a bir sayı ve b de bu a sayısını $\%p$ artırdığımızda oluşan yeni sayı ise $b = \left(1 + \frac{p}{100}\right) a$ olur. Benzer şekilde, bu a sayısının $\%p$ azalışı sonucunda oluşan sayı da $\left(1 - \frac{p}{100}\right) a$ olur.

Bir a sayısını $\%p$ artırsak sonuç $\left(1 + \frac{p}{100}\right) a$ olur. Aynı a sayısını $\%p$ azaltırsak sonuç $\left(1 - \frac{p}{100}\right) a$ olur.

Örneğin, haftalık harçlığı 50 TL olan bir çocuğun harçlığı %20 oranında azaltılırsa bu çocuğun haftalık harçlığı ne olur arkadaşlar?

Harçlığın azalma oranı %20 olduğunda, bunun harçlıkta meydana getirdiği mutlak azalma $50 \times \frac{20}{100} = 10$ TL'dir. Yani yeni harçlık $50 - 10 = 40$ TL olur.

İnşallah bu çocuğun harçlığını yine %20 oranında artırırlar da, çocuk eski harçlığına kavuşur.

Bakalım! 40'ın %20'si $40 \times \frac{20}{100} = 8$'dir. Dolayısıyla harçlık, aynı oranda artırılırsa yeni harçlık 50 TL olmaz, 48 TL olur. Ortada 2 liralık bir kayıp var. Yüzde hesapları yaparken hangi sayının yüzdesinin alındığı çok önemlidir. Çünkü, yüzde değişim o büyüklüğün kendisiyle orantılı bir değişimdir.

Ben de buna son bir örnek vereyim. Geçenlerde bir ceket aldım. Ceketin sezon fiyatı 200 TL olmasına karşın ucuzlukta 130 TL ye düşmüş, ben de kaçırmadım. Acaba bu ceketin fiyatında yüzde kaç indirim yapılmıştır, bulabilir misiniz?

Zevkle hocam. Aldığınız ceket mutlak olarak $200-130=70$ TL ucuzlamış. Bu durumda "70 sayısı 200 ün yüzde kaçıdır?", sorusunu yanıtlamak yeterli. Yani

$$70 = 200 \cdot \frac{x}{100}$$

denklemini çözmeliyiz. Bu denklemden $x = \frac{70 \times 100}{200} = 35$ bulunur. İndirim oranı %35 olmuş hocam.

Teşekkürler Zeynep.

Aritmetik ve Geometrik Diziler

Şimdi de belli orandaki artışların tekrar tekrar gerçekleştiği durumları ele alalım. Bunun için de dizi kavramına değinmemiz yerinde olacaktır. Dizi denilen şey her n doğal sayısına, belli bir kuralla, bir sayı karşılık getirme işidir.
Eğer n doğal sayısına karşılık getirilen sayıyı a_n ile gösterirsek, bazı dizilerde n ne olursa olsun $a_{n+1}-a_n$ sayısı sabit olabilir. Hiç değişmeyen bu sayıya ortak fark ve böyle bir diziye bir aritmetik dizi denir. Örneğin $a_n = 3n+2$ şeklinde verilen dizi, ortak farkı 3 olan bir aritmetik dizidir. Bu dizinin ilk bir kaç terimi

$$a_1 = 3\cdot 1+2=5, \quad a_2 = 3\cdot 2+2=8, \quad a_3 = 3\cdot 3+2=11$$

şeklindedir.

Bazı dizilerde de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ oranı sabit olabilir. Bu sabit orana ortak çarpan ve böyle bir diziye de bir geometrik dizi denir. Örneğin $a_n = 10^n$ şeklinde verilen dizi de, ortak çarpanı 10 olan bir geometrik dizidir. Bu dizinin ilk bir kaç terimi

$$a_1 = 10^1 = 10, \quad a_2 = 10^2 = 100, \quad a_3 = 10^3 = 1000$$

şeklindedir. Biz daha çok geometrik dizilerle ilgileneceğiz.

Ben de başka bir geometrik dizi örneği vereyim hocam.
$b_n = 3 \times 10^n$ şeklinde verilen dizi de bir geometrik dizidir ve $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 10$ olduğundan ortak çarpanı da 10'dur. Diziye ait bir kaç terim ise

$$b_1 = 3 \cdot 10 = 30, \quad b_2 = 3 \cdot 10^2 = 300, \quad b_3 = 3 \cdot 10^3 = 3000$$

olarak verilebilir.

Şekil 5.2: Matematikçi Euler'in resmini taşıyan 10 İsviçre Frangı.

Aslında geometrik diziler çok yaygındır. Örneğin üstel ve logaritmik fonksiyonlar dersinde gördüğünüz, gölü kaplayan nilüfer çiçeklerinin sayılarının oluşturduğu dizi de ortak çarpanı iki olan bir geometrik dizidir. (a_n ile n'inci gündeki nilüfer çiçeği sayısını gösteriyoruz.)

Dizilerle ilgili son olarak, geometrik bir dizinin ve aritmetik bir dizinin ilk n terimlerinin toplamından bahsedelim arkadaşlar. a_n dizisi ortak farkı k olan bir aritmetik dizi olsun. Bu durumda her n için $a_{n+1} - a_n = k$ olacağından, dizinin bütün terimleri a_1 ve k cinsinden yazılabilir. Bazılarını açık olarak yazarsak:

$$\begin{array}{rcl}
a_2 - a_1 = k & \text{olduğundan} & a_2 = a_1 + k \\
a_3 - a_2 = k & \text{olduğundan} & a_3 = a_2 + k = a_1 + 2k \\
\vdots & & \vdots \\
a_n - a_{n-1} = k & \text{olduğundan} & a_n = a_1 + (n-1)k
\end{array}$$

olur. Bu gözlemden sonra aritmetik bir dizinin ilk n teriminin toplamı,

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= a_1 + (a_1 + k) + (a_1 + 2k) + \cdots + (a_n + (n-1)k) \\
&= a_1 + (n-1).a_1 + [1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]\, k \\
&= n.a_1 + [1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]\, k
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Hocam, o uzun toplamı ne yapacağız?

Gauss 10 yaşındayken bu toplam için, zekice bir manevrayla, kısa bir formül bulmuş. Size bu hikayeyi anlatayım. Gauss ilkokuldayken sınıfın gürültüsünden sıkılan öğretmen, sınıfı bir süre meşgul edip kafasını dinlemek için, öğrencilerden 1'den 100'e kadar olan sayıları toplamalarını istemiş. Kısa bir süre sonra küçük Gauss'un bir şey yapmadan oturduğunu görünce şaşkınlıkla "ne oldu, neden yapmıyorsun?" diye sormuş. Fakat, Gauss'un "bitirdim" yanıtı, öğretmeni çok şaşırtmış. Gauss'un zekâ dolu yöntemi aslında çok basitti.

$$1+2+3+\cdots+98+99+100=S$$

olsun. Eğer bu toplamı ters sırada yazarsak $100+99+98+\cdots+3+2+1$ yine S olur, çünkü ters sırada yazmak toplamın değerini değiştirmez. Şimdi bu iki toplamı aşağıda görüldüğü gibi alt alta yazıp toplayalım.

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
 & 1 & + & 2 & + & \cdots + & 98 & + & 99 & + & 100 & = & S \\
+ & 100 & + & 99 & + & \cdots + & 3 & + & 2 & + & 1 & = & S \\
\hline
 & 101 & + & 101 & + & \cdots + & 101 & + & 101 & + & 101 & = & 2S
\end{array}$$

Görüldüğü gibi son satır 101'lerin toplamı oldu. Son satırda 100 tane 101 olduğundan $100 \times 101 = 2S$ olur. Yani $S = \frac{100.101}{2} = 5050$ dir.

Şekil 5.3: Matematikçi Gauss'un resmini taşıyan 10 Alman Markı.

Bu küçük çocuğun yönteminin aynısını kullanarak

$$S=1+2+3+\cdots+(n-1)+n$$

toplamını da bulabiliriz. Aynı işlemi uygularsak bu defa son satırda n tane $(n+1)$'in toplamı çıkacak. Yani $2S=n(n+1)$, dolayısıyla

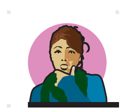
$$S=\frac{n(n+1)}{2}$$

elde edilir. Bu formülü kullanarak aritmetik dizinin ilk n teriminin toplamını artık şöyle yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
a_1+a_2+\cdots+a_n &= na_1+[1+2+3+\cdots+(n-1)]\,k \\
&= na_1+\frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}k \\
&= na_1+\frac{(n-1)n}{2}k.
\end{aligned}$$

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Benzer basitlikte bir toplam ifadesi geometrik diziler için de elde edilebilir mi hocam?



Evet Gökçe. Geometrik dizilerin toplam formülü ilerde işimize de yarayacak.

a_n dizisi ortak çarpanı k olan bir geometrik dizi olsun. O halde

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{a_2}{a_1}=k & \text{olduğundan} & a_2=a_1k \\
\dfrac{a_3}{a_2}=k & \text{olduğundan} & a_3=a_2k=a_1k^2 \\
\dfrac{a_4}{a_3}=k & \text{olduğundan} & a_4=a_3k=a_2k^2=a_1k^3 \\
\vdots & & \vdots \\
\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=k & \text{olduğundan} & a_n=a_1k^{n-1}
\end{array}$$

olur. Şimdi ilk n terimin toplamı

$$\begin{aligned}
a_1+a_2+\cdots+a_n &= a_1+a_1k+a_2k^2+\cdots+a_1k^{n-1} \\
&= a_1(1+k+k^2+\cdots+k^{n-1})
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Şekil 5.4: Matematikçi Cahit Arf'ın resmini taşıyan 10 Türk Lirası.

Hocam, burda da yine uzun bir toplam var.

Evet Gökçe, yine bir kurnazlık gerekiyor. $1+k+k^2+\cdots+k^{n-1}$ ifadesini k ile çarpalım:

$$(1+k+k^2+\cdots+k^{n-1})k=k+k^2+\cdots+k^{n-1}+k^n$$

Şimdi bu eşitliğin sağ tarafına 1'i ekleyip, çıkaralım:

$$(1+k+k^2+\cdots+k^{n-1})k=1+k+k^2+\cdots+k^{n-1}+k^n-1$$

olur. Eğer $1+k+k^2+\cdots+k^{n-1}=T$ dersek,

$$T\cdot k=T+k^n-1, \text{ yani } Tk-T=k^n-1 \text{ ya da } T(k-1)=k^n-1$$

olup, buradan

$$T=\frac{k^n-1}{k-1}$$

elde edilir. Eğer k sayısı 1'den küçükse bu formül daha estetik olsun diye

$$T=\frac{1-k^n}{1-k}$$

şeklinde de yazılır. Demek ki $a_1+a_2+\cdots+a_n$ toplamını $a_1\cdot\left(\frac{1-k^n}{1-k}\right)$ şeklinde ifade etmiş olduk.

$$1+k+k^2+\cdots+k^n=\frac{k^{n+1}-1}{k-1}$$

Okul yıllarımda, geometrik diziyle tanıştığımda, öğretmenim şöyle bir soru sormuştu: Önümüzde bir tas çorba ve elimizde bir kaşık, bu çorbayı içmek istiyoruz; ama belli bir kuralla. Kural da şöyle: içtiğimiz her kaşık çorba bir önceki kaşığın yarısı kadar olacak. Yani ilk hamlemiz bir dolu kaşık, ikinci hamle yarım kaşık, üçüncü hamle $\frac{1}{4}$ kaşık, dördüncü hamle $\frac{1}{8}$ ve bu şekilde sürüp gidecek; soru da bu tastaki çorbanın ne zaman biteceğiydi.

İki dakikada biter o çorba hocam!

Biz de, o zamanlar öyle düşünmüştük! İlk hamlede 1 kaşık çorba içiyoruz. İkinci hamle sonunda $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ kaşık çorba içiyoruz. Üçüncü hamle sonunda $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$ kaşık çorba içiyoruz. Bu şekilde $n+1$ hamle yaptığımızı düşünelim. $n+1$'inci hamle sonunda,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

kaşık çorba içeriz. $1+k+k^2+\cdots+k^{n-1}=\frac{1-k^n}{1-k}$ olduğunu görmüştük. Burada n yerine $n+1$ alırsak,

$$1+k+k^2+\cdots+k^n=\frac{1-k^{n+1}}{1-k}$$

olur. Burada da k yerine $\frac{1}{2}$ koyarsak,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^n}$$

olur. Bu son elde edilen sayı da gördüğünüz gibi 2'den küçüktür. Yani ne kadar uğraşırsak uğraşalım, değil tası bitirmek, 2 kaşık çorba bile içemeyiz.

Bileşik Faiz

Arkadaşlar, üstel ve logaritmik fonksiyonlar dersinde bileşik faizi tanımlayıp faiz hesaplarının ilk örneklerini görmüştük. Bu hesapların nasıl yapıldığını tekrarlamayalım isterseniz. O derste 5000 TL'nin %15 yıllık bileşik faizle bankaya yatırıldığında, t yıl sonra $5000\cdot\left(1+\frac{15}{100}\right)^t$ TL'ye ulaştığını elde etmiştik.

Gösterimler sözcüklerin ingilizce karşılıklarının ilk harflerinden geliyor. P "principal" sözcüğünden, r "rate" sözcüğünden ve t de "time" sözcüğünden.

Bunun bir genellemesini yapalım. Yani 5000 TL yerine P TL ve faiz oranı olarak da %15 (yani $0,15$) yerine keyfi bir r oranı alınırsa formülde yalnızca bunları değiştirmek yeterlidir. Bu durumda t yıl sonra elimize geçecek para miktarı $P(1+r)^t$ TL olur.

Tabii yılın da öyle pek önemi yok; yıl yerine ay, üç ay ya da başka bir zaman dilimi alınabilirdi.

Evet, yıl yerine dönem terimini kullanarak bu ilişkiyi şöyle ifade edebiliriz: P TL tasarrufumuzu bir bankada, dönemlik r bileşik faizle değerlendirirsek n dönem sonra tasarrufumuzun ulaşacağı değer nedir? Eğer paramızın n dönem sonra ulaşacağı değeri P_n ile gösterirsek

$$P_n = P(1+r)^n$$

olur.

İsterseniz şimdi benim karşılaştığım bir problemi tartışalım. Geçenlerde eşimle bir otomobil almak istedik, hatta birini beğendik, fiyatı da 30000 TL idi. Eşim ve ben ayda ancak 1000 TL biriktirebiliyoruz. Bir banka ayda %$0,50$ faiz veriyormuş birikimlerimize. Biz her ay biriktirdiğimiz bu parayı o bankaya yatırsak ve aldığımız faizleri de üzerine eklesek kaç ay sonra o otomobili alacak paramız olur?

Çözüme başlamadan önce şunu belirtelim arkadaşlar, faiz hesaplarında sayıları virgülden sonra iki hane olacak şekilde yuvarlayacağız. Nihayetinde kuruştan daha küçük bir para birimimiz yok. Zaten bankalar da bu şekilde kullanıyor.

Şimdi problemi çözmeye çalışalım arkadaşlar. Bu yöntemle n ayda kaç lira biriktirebileceğimizi hesaplayalım. Başlangıçtaki 1000 liramız n ay sonra $1000 \cdot (1+0,005)^n$ olacak. 2'nci ay yatıracağımız 1000 lira ise $n-1$ ay bankada kalacağı için sonuçta $1000 \cdot (1+0,005)^{n-1}$ liraya ulaşacak. 3'üncü ay yatıracağımız 1000 lira $n-2$ ay bankada kalacağı için sonuçta $1000 \cdot (1+0,00)^{n-2}$ liraya ulaşacak. Bu şekilde devam edersek $(n-1)$'inci ayda yatıracağımız para bir ay faizde kalacağı için $1000 \cdot (1+0,005)$ lira olacak. Ve nihayet n'inci ayda da 1000 lira o ayın birikimi olarak elimizde olacak. Demek ki n ay sonra elimizde toplam,

$$
\begin{aligned}
&1000 \cdot (1,005)^n + 1000 \cdot (1,005)^{n-1} + \cdots + 1000 \cdot 1,0050 + 1000 \\
&= 1000 \cdot [(1,005)^n + (1,005)^{n-1} + \cdots + 1,005 + 1] \text{ TL}
\end{aligned}
$$

olacak.

Yine aynı toplam karşımıza çıktı, hocam!
$1 + k + k^2 + \cdots + k^n = \frac{k^{n+1}-1}{k-1}$ formülünü kullanacağız.
$k = 1,005$ için

$$
\begin{aligned}
1000 \cdot [(1,005)^n + \cdots + 1,005 + 1] &= 1000 \cdot \frac{(1,005)^{n+1} - 1}{1,005 - 1} \\
&= 1000 \cdot \frac{(1,005)^{n+1} - 1}{0,005}
\end{aligned}
$$

olur.

Biz bu miktarın n'nin hangi değeri için 30000 TL'ye ulaşacağını arıyorduk. Yani, hangi n için ilk defa

$$1000 \cdot \frac{(1,005)^{n+1} - 1}{0,005} \geq 30000$$

olur. Önce,

$$1000 \cdot \frac{(1,005)^{n+1} - 1}{0,005} = 30000$$

eşitliğini göz önüne alalım. Buradan

$$(1,005)^{n+1} - 1 = 0,15 \quad \text{ya da} \quad (1,005)^{n+1} = 1,15$$

olur. Şimdi her iki tarafın logaritmasını alıp, hesap makinasına bakarsak

$$(n+1) \log 1,005 = \log 1,15 \quad \Rightarrow \quad n + 1 = \frac{\log 1,15}{\log 1,005} \approx 28,02$$

bulunur. Demekki $n \approx 27,02$ olup, 27'nci ay sonunda, hemen hemen 30000 TL'ye ulaşmış oluruz.

Hocam, "hemen hemen" dediğiniz ne oluyor?

Peki Selçuk, onu da tam hesaplayalım. 27'nci ayın sonunda elimizde $1000 \cdot \frac{(1{,}005)^{28}-1}{0{,}005} = 29974,52$ TL olur.

Hocam, bu kadar ay para biriktirip bekleyeceğinize, otomobil kredisi çekseniz daha iyi olmaz mı? Bir taraftan arabanızı kullanırken, diğer taraftan da borcunuzu ödersiniz.

Borç Amortismanı

Gökçe bizi borç amortismanı konusuna getirmiş oldu. Ben de zaten bu konudan bahsetmek istiyordum. Borç amortismanından kastımız, uygun bir faizle borç alınan bir paranın, taksitler halinde geri ödenmesidir. Eskiden borcun itfası denilirdi. Sanırım, amortisman daha yaygın kullanılan bir terim.

İtfa sözcüğü günlük hayatta pek kullanılmamasına rağmen bundan türeyen itfaiye ne kadar yaygın bir kullanıma sahip. İtfa borcu söndürürken, itfaiye de yangın söndürüyor!

Geri ödeme desek daha kolay olmaz mıydı hocam?

Belki de olurdu. Ama burada asıl vurgulanan şey borcun taksitler halinde geri ödenmesi. Pınar Hoca'nın otomobil kredisine biraz sonra döneriz, başlangıç olarak şöyle daha basit bir problem düşünelim arkadaşlar. Bankadan aylık %1,37 faizle 5000 TL kredi aldığımızı varsayalım. Bu borcu da aylık 1000 TL eşit taksitlerle bankaya geri ödemek istersek bu borç kaç ayda biter?

Bu problemi, genel duruma daha rahat hakim olabilmek için adım adım çözelim. Borcu aldıktan bir ay sonra aldığımız borç için aylık bir faiz uygulanacak ve bu faiz de $5000 \times 0,0137 = 68,50$ TL olacaktır. Aylık taksit 1000 TL'yi ödedikten sonra kalan borç miktarı $5068,50 - 1000 = 4068,50$ TL olacaktır. Bankaya birinci ay için ödenen 1000 TL'nin 68,50 TL'si faiz ödemesi ve geri kalan
$1000 - 68,50 = 931,50$ TL'si ise anapara ödemesidir.

Birinci ayın sonu itibarı ile

Devreden borç	5000 TL
Faiz ödemesi	$5000 \times 0,0137 = 68,50$ TL
Aylık taksit	1000 TL
Anapara ödemesi	931,50 TL
Kalan borç	$5000 + 68,50 - 1000 = 4068,50$ TL

olacaktır.

İkinci ay daha az faiz ödeyeceğiz arkadaşlar. Devreden borcumuz $4068,50$ TL olduğundan bu miktar için faiz vereceğiz, bu da $4068,50 \times 0,0137 = 55,74$ TL'dir. Aylık taksit 1000 TL'yi ödedikten sonra kalan borç $4068,50 + 55,74 - 1000 = 3124,24$ TL olur. Bu ay sonunda ödediğimiz 1000 TL'nin $55,74$ TL'si faiz ödemesi ve kalan $1000 - 55,74 = 944,26$ TL'si anapara ödemesidir.

İkinci ayın sonu itibarı ile

Devreden borç	4068,50 TL
Faiz ödemesi	$4068,50 \times 0,0137 = 55,74$ TL
Aylık taksit	1000 TL
Anapara ödemesi	944,26 TL
Kalan borç	$4068,50 + 55,74 - 1000 = 3124,24$ TL

olacaktır.

Üçüncü ayın sonunda ne olacağını da ben hesaplayabilir miyim? Devreden borç $3124,24$ TL olduğundan bu miktar için faiz ödeyeceğiz, bu da $3124,24 \times 0,0137 = 42,80$ TL'dir. Faiz biraz daha aşağıya çekildi! Aylık taksit 1000 TL'yi ödedikten sonra, kalan borç $3124,24 + 42,80 - 1000 = 2167,04$ TL olur. Bu ay ödenen taksidin $42,80$ TL'si faiz ve kalan $1000 - 42,80 = 957,20$ TL'si anapara ödemesidir. Özetleyecek olursak:

Her defasında kalan borcumuz için yalnızca bir dönemlik faiz ödüyoruz.

Üçüncü ayın sonu itibarı ile

Devreden borç	3124,24 TL
Faiz ödemesi	$3124,24 \times 0,0137 = 42,80$ TL
Aylık taksit	1000 TL
Anapara ödemesi	$1000 - 42,80 = 957,20$ TL
Kalan borç	$3124,24 + 42,80 - 1000 = 2167,04$ TL

olacaktır.

Sanırım olay anlaşıldı arkadaşlar. Her ay bir önceki aydan devreden borca %$1,37$ faiz uyguluyoruz. Sonra da 1000 TL taksit ödedikten sonra kalan miktar bizim yeni borcumuz oluyor. Kısalık için bunları doğrudan yazalım.

Dördüncü ayın sonu itibarı ile

Devreden borç	2167,04 TL
Faiz ödemesi	$2167,04 \times 0,0137 = 29,69$ TL
Aylık taksit	1000 TL
Anapara ödemesi	$1000 - 29,69 = 970,31$ TL
Kalan borç	$2167,04 + 29,69 - 1000 = 1196,73$ TL

Beşinci ayın sonu itibarı ile

Devreden borç	1196,73 TL
Faiz ödemesi	$1196,73 \times 0,0137 = 16,39$ TL
Aylık taksit	1000 TL
Anapara ödemesi	$1000 - 16,39 = 983,61$ TL
Kalan borç	$1196,73 + 16,39 - 1000 = 213,12$ TL

Altıncı ayın sonu itibarı ile

Devreden borç	213,12 TL
Faiz ödemesi	$213,12 \times 0,0137 = 2,92$ TL
Ödeme	216,04 TL

Sonuç olarak altıncı ayın sonunda borcumuz bitmiş oldu. Altıncı ay sonunda bir önceki aydan devreden $213,12$ TL ile bu miktara uygulanan bir aylık faizin toplamı $213,12 + 2,92 = 216,04$ TL'yi ödeyip borcu bitirdik; çünkü son çıkan miktar aylık taksitten daha küçüktür.

Son ay ödenen $216,04$ TL bizim bu borç için fazladan ödediğimiz para, yani ödediğimiz toplam faiz oldu. Faiz miktarı da borç azaldıkça azaldığı için ilk aylarda en yüksek seviyedeydi, zamanla gittikçe azaldı.

Bütün bunları bir tabloda özetleyebiliriz arkadaşlar, bankalarda benzer ödeme tabloları vermiyorlar mı zaten!

	Devreden Borç	**Faiz Ödemesi**	**Aylık Taksit**	**Kalan Borç**
1. ay sonunda	5000	68,50	1000	4068,50
2. ay sonunda	4068,50	55,74	1000	3124,24
3. ay sonunda	3124,24	42,80	1000	2167,04
4. ay sonunda	2167,04	29,69	1000	1196,73
5. ay sonunda	1196,73	16,39	1000	213,12
6. ay sonunda	213,12	2,92	216,04	

Bu tablo ve hesaplar için bir kaç noktayı açıklığa kavuşturalım. Tabloda gördüğünüz gibi (hesaplarda da) bir ayın sonunda kalan borç miktarı (tabloda son sütun) devam eden ay için birinci sütunda olup, bu devreden borçtur. Her ay için bu devreden borca bir aylık faiz ödüyoruz.

Şimdi bu örnekten sonra genel durumu anlamaya çalışalım arkadaşlar. Yine bu hesapta da borcun ne zaman biteceğini araştırıp buradan genel duruma geçelim. Bir bankadan A TL borcu dönemlik r faiz oranı ile alalım. Eğer bankaya bu borcu her dönem B TL lik eşit taksitlerle ödemek istersek borcu hangi dönemde amorti etmiş oluruz?

Biz bir önceki problemde dönemi ay olarak almıştık değil mi hocam?

Evet Engin. Ama yıl ya da başka bir zaman dilimi de olabilir, bunun önemi yoktur.

Her dönemin sonunda B TL miktarı bankaya ödüyor ve borcumuzu bir miktar azaltıyoruz. Yani her dönemin sonunda borç miktarımız değişime uğruyor. n dönem sonra borcumuzun sıfırlanacağını varsayalım ve $k = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere, k'ıncı dönem sonundaki borcumuzu A_k ile gösterelim. Yani,

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{Birinci dönemin sonunda kalan borç miktarı} \\ A_2 &= \text{İkinci dönemin sonunda kalan borç miktarı} \\ \vdots &\quad \vdots \\ A_k &= k\text{'ıncı dönem sonunda kalan borç miktarı} \\ \vdots &\quad \vdots \\ A_n &= 0 \end{aligned}$$

olur.

O zaman A_k'yı A_{k-1} cinsinden hesaplarsak işimizi kolaylaştırmış oluruz. $(k-1)$'inci dönem sonunda borcumuz A_{k-1} olduğundan k'ıncı dönemde yalnızca bu miktar için faiz ödeyeceğiz. Bir dönem için faiz oranı r olduğundan k'ıncı dönemde $r \times A_{k-1}$ kadar faiz ödemeliyiz. Diğer yandan dönemin sonunda da B TL taksit ödeyeceğimizden, k'ıncı dönem sonunda kalan borç:

$$A_k = (1 + r)A_{k-1} - B$$

olur. Bunu küçük bir tablo ile daha anlaşılır hale getirelim.

Dönem	Devreden Borç	Faiz Ödemesi	Aylık Taksit	Kalan Borç
$k-1$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	A_{k-1}
k	A_{k-1}	rA_{k-1}	B	$(1+r)A_{k-1}-B$

Şimdi arkadaşlar,

$$A_1 = (1+r)A - B$$

olduğunu biliyoruz. O halde bulduğumuz denklem bize A_2'yi verir. Yani

$$\begin{aligned} A_2 &= (1+r)A_1 - B \\ &= (1+r)[(1+r)A - B] - B \\ &= (1+r)^2A - B[(1+r)+1)] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Artık A_2'yi bildiğimize göre A_3'ü de bize yine aynı denklem verir. Belki A_3'ü yazarsak bir tahminde bulunabiliriz!

Bu hesabı da ben yapayım hocam.

$$\begin{aligned} A_3 &= (1+r)A_2 - B \\ &= (1+r)((1+r)^2A - B[(1+r)+1)]) - B \\ &= (1+r)^3A - B[(1+r)^2 + (1+r) + 1] \end{aligned}$$

olur.

Her bir k için

$$A_k = (1+r)^kA - B[(1+r)^{k-1} + (1+r)^{k-2} + \cdots + (1+r) + 1]$$

olur. Bu tahminimizin doğru olduğunu tümevarımla hemen gösterebiliriz, ama şimdi buna hiç girmeyelim.

B nin katsayısı olan toplamı daha önce öğrendiğimiz formül yardımıyla

$$1 + (1+r) + (1+r)^2 + \cdots + (1+r)^{k-1} = \frac{(1+r)^k - 1}{(1+r) - 1} = \frac{(1+r)^k - 1}{r}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Buradan da

$$A_k = (1+r)^kA - B\frac{(1+r)^k - 1}{r}$$

bulunur.

Biz $A_n = 0$ olan n değerini aradığımız için

$$(1+r)^n A - B\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0 \quad \text{yani} \quad r(1+r)^n A = B[(1+r)^n - 1]$$

ilişkisine ulaşmış oluruz. İşte bu denklem borç amortismanına hükmeden denklemdir. Bu denklem gördüğünüz gibi dört değişkene bağlıdır. Bunlar A, B, r ve n'dir. Eğer bunlardan üçünü bilirsek dördüncüsünü denklemden çözeriz. Bizim için önemli olan aylık taksit miktarıdır; anapara, faiz oranı ve dönem sayısı verildiğinde bu denklemden aylık taksidi hesaplayabiliriz:

$$B = A\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

Şimdi benim otomobil kredisine dönebiliriz artık.

Hocam ben de bu arada otomobil kredisi faizinin %1,14 olduğunu cep telefonundan öğrendim.

Gökçe'nin söylediği faiz oranıyla 30000 TL kredi çekelim. Eğer ayda 1000 TL taksitle bu borcu geri ödersek kaç ayda biteceğini formülümüzle hesaplayalım. $r = 0,0114$, $B = 1000$ ve $A = 30000$ değerleri formülde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 1000 &= 30000 \cdot \frac{0,0114(1+0,0114)^n}{(1+0,0114)^n - 1} \\ &= 30000 \cdot \frac{0,0114(1,0114)^n}{(1,0114)^n - 1} \end{aligned}$$

olur. $(1,0114)^n = x$ denilirse

$$1000 = 30000 \cdot \frac{(0,0114)x}{x-1} \quad \text{yani} \quad x - 1 = (0,342)x$$

olur. Buradan $x = \frac{1}{0,658}$ bulunur. $x = (1,0114)^n$ olduğunu anımsarsak $(1,0114)^n = \frac{1}{0,658}$ olur. Her iki tarafın logaritmaları alınırsa

$$n \log 1,0114 = -\log 0,658 \Rightarrow n = -\frac{\log 0,658}{\log 1,0114} \approx 36,94$$

elde edilir. O halde banka kredisi ile arabayı alırsak borcumuz ancak 37'nci ayda biter. Yani bankaya faiz olarak hemen hemen 7000 TL fazladan ödeme yapmış oluruz. Fakat otomobilimizi de hemen almış olacağımız için bir an önce de istediğimizi elde etmiş olacağız. Tabii bu zor bir karar, bu faizi mi ödemeli yoksa paranın birikmesini mi beklemeli?

Son olarak amortisman formülümüz için şu örneği yapalım ve dersi bitirelim arkadaşlar. Bir arkadaşım bir bankadan ihtiyaç kredisi kullandı. Aldığı kredi miktarı 10000 TL, vadesi 24 ay ve aylık bileşik faiz $\%1,27$ idi. Buna göre arkadaşımın aylık taksidi ne kadar olacak?

Ben hesaplayayım hocam. Formülümüz

$$B = A\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

şeklindeydi. Burada $A = 10000$, $r = \%1,27 = 0,0127$ ve $n = 24$ alırsak:

$$B = 10000 \cdot \frac{0,0127(0,0127+1)^{24}}{(0,0127+1)^{24} - 1} = 486,01 \text{ TL}$$

bulunur.

Özet

Bu bölümde yaşantımızın bir parçası olan yüzde ve faiz hesaplarını inceleyip, bileşik faiz uygulamaları yaptık. Sonrasında bankalardan kredi kullanırken işin en önemli öğesi olan borç amortismanı formülünü elde edip uygulamadan örnekler verdik.

Okuma Parçası

Kaime

Osmanlı İmparatorluğu'nda ilk banknotlar idari, sosyal ve yasal reformların gündeme geldiği tanzimat döneminde tedavüle çıkarılmıştır. Banknotlar bu dönemde esas olarak reformların finanse edilmesi amacıyla basılmıştır. İlk Osmanlı banknotları Abdülmecit tarafından 1840 yılında "Kaime-ı Nakdiye-ı Mutebere" adıyla, bugünkü dille "Para Yerine Geçen Kağıt", bir anlamda para olmaktan çok faiz getirili borç senedi veya hazine bonosu niteliğinde olmak üzere çıkarılmıştır. Bu paralar matbaa baskısı olmayıp, elle yapılmış ve her birine de resmi mühür basılmıştır. Kaimelerin zaman içerisinde taklidinin kolayca yapılması ve kağıt paraya olan güvenin azalması nedeniyle 1842 yılından itibaren matbaada bastırılmasına başlanarak, el yapımı olanlarla değişimi sağlanmıştır. Osmanlı İmparatorluğu'nda 1862 yılına kadar çeşitli şekil ve miktarlarda kaime ihraç edilmiştir. Osmanlı İmparatorluğu'nda, 1856 yılında İngiliz sermayesi ile kurulan Osmanlı Bankası "Bank-ı Osmani", 1863 yılında Fransız ve İngiliz ortaklığında "Bank-ı Osmanii Şahane" adıyla bir devlet bankası niteliğini kazanmıştır. Osmanlı İmparatorluğu'nun sık sık Avrupa piyasalarından borçlanmak zorunda kaldığı dönemlerde İngiltere ve Fransa, devletten ziyade, kendi idaresi altındaki bu bankaya güven duymuş ve mali ilişkilerini bu banka kanalıyla yürütmeyi tercih etmiştir. Osmanlı İmparatorluğu, Osmanlı Bankası'na hükümetin hiç bir biçimde kağıt para basmayacağı ve başka bir kuruma da bastırmayacağı taahhüdünde bulunarak, 30 yıl süre ile kağıt para ihracı imtiyazını vermiştir. Osmanlı Bankası ilk olarak 1863 yılında, istendiğinde altına çevrilmek üzere, Maliye Nezareti ve kendi mühürlerini taşıyan banknotları tedavüle çıkarmış, 1863-1914 yılları arasında da çeşitli şekil ve miktarlarda banknot ihraç etmiştir. Yukarıda belirtilen taahhüt verilmekle birlikte, Osmanlı yönetimi Osmanlı Bankası ile anlaşarak, halk arasında "93 Harbi" olarak bilinen 1876-1877 Osmanlı-Rus Savaşı sırasında, savaş masraflarını karşılayabilmek amacıyla kaime ihraç etmiştir. Kaimeler, 30 Mart 1915 yılında çıkarılan bir kanunla "Evrak-ı Nakdiye"ye dönüştürülmüştür. Kuruluş yıllarında Türkiye Cumhuriyeti Hükümetinin kendine ait madeni ve kağıt paraları olmadığından 1927 yılına kadar Osmanlı İmparatorluğu döneminden devren kalan madeni paralarla "Evrak-ı Nakdiye"ler tedavülde kalmıştır.

20 kuruşluk kaimenin ön yüzü ve arka yüzü

Kaynak: http://www.tcmb.gov.tr/

Çıkarın Kağıtları

1. Bir bankadan %1,25 aylık faiz oranı ve 12 ay vade ile 5000 TL tüketici kredisi çekilirse, aylık geri ödeme taksitleri ne kadar olur?

A) 453,12 **B)** 450,55
C) 470,70 **D)** 440,46
E) 465

2. Bir bankadan %1,25 aylık faiz oranı ve 24 ay vade ile 5000 TL tüketici kredisi çekilirse, aylık geri ödeme taksitleri ne kadar olur?

A) 252,25 **B)** 250,50
C) 245,11 **D)** 242,43
E) 160,74

3. Bir bankadan %1,25 aylık faiz oranı ve 36 ay vade ile 5000 TL tüketici kredisi çekilirse, aylık geri ödeme taksitleri ne kadar olur?

A) 185,65 **B)** 160,50
C) 184,25 **D)** 165,70
E) 173,32

4. Bir sayının %17'si ile %25'inin toplamı 21 olduğuna göre, bu sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 30 **B)** 40
C) 50 **D)** 100
E) 200

5. Ortak çarpanı 2 ve ilk terimi 3 olan bir geometrik dizinin dördüncü terimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 24 **B)** 30
C) 26 **D)** 32
E) 28

6. Bir yatırımcı 10000 TL parasının %70'i ile fiyatı 5 TL olan bir hisse senedi alıyor. Kalan parası ile de fiyatı 20 TL olan başka bir hisse senedi alıyor. Bir ay sonra fiyatı 5 TL olan kağıt 7 TL'ye ve fiyatı 20 TL olan kağıt 25 TL'ye yükseliyor. Bu yatırımcının toplam kârı yüzde kaç olmuştur?

7. Bir bankanın aylık faiz oranı %1,2 ise yıllık faiz oranı aşağıdakilerden hangisidir?

A) %10 **B)** %18
C) %13 **D)** %21
E) %15

8. Aylık enflasyon oranının %0,8 olduğu bir ülkede yıllık enflasyon oranı nedir?

9. Bir bankadan %1,25 aylık faiz oranı ve 12 ay vade ile 10000 TL tüketici kredisi çekilirse, borcun amortismanı sonucunda ödenen toplam faiz miktarı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 830,99 TL **B)** 830,20 TL
C) 850,60 TL **D)** 835,50 TL
E) 840,45 TL

10. Sezon fiyatı 180 TL olan bir ayakkabının fiyatı indirimde 135 TL'ye düşmüştür. Bu durumda ayakkabıdaki indirim oranı aşağıdakilerden hangisidir?

A) %20 **B)** %35
C) %25 **D)** %40
E) %30

Çözümler

1. Geri ödeme için bulduğumuz borç amortismanı formülünde

$$B = A \cdot \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

idi. $n = 12$, $r = 0,0125$, $A = 5000$ TL değerlerini formülde yerlerine yazarsak:

$$\begin{aligned} B &= 5000 \cdot \frac{0,0125(1+0,0125)^{12}}{(1+0,0125)^{12}-1} \\ &= 5000 \cdot \frac{0,0125(1,0125)^{12}}{(1,0125)^{12}-1} \\ &= 5000 \cdot \frac{0,0125 \cdot 1,16}{1,16-1} \\ &= 5000 \cdot \frac{0,0145}{0,16} \\ &= 453,12 \end{aligned}$$

bulunur. Doğru yanıt bu nedenle A seçeneğidir.

2.

$$B = A \cdot \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

borç amortismanı formülünde $n = 24$, $r = 0,0125$, $A = 5000$ TL değerleri yerlerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} B &= 5000 \cdot \frac{0,0125(1+0,0125)^{24}}{(1+0,0125)^{24}-1} \\ &= 242,43 \text{ TL} \end{aligned}$$

elde edilir. Doğru yanıt bu nedenle D seçeneğidir.

3.

$$B = A\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

borç amortismanı formülünde $n = 36$, $r = 0,0125$, $A = 5000$ TL değerlerine yerlerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} B &= 5000 \cdot \frac{0,0125(1+0,0125)^{36}}{(1+0,0125)^{36}-1} \\ &= 173,32 \text{ TL} \end{aligned}$$

elde dilir. Doğru yanıt bu nedenle E seçeneğidir.

4. Aranan sayıyı x ile gösterelim. Bu sayının,

$$\%17\text{'si} \quad x \cdot \frac{17}{100} \quad \text{ve} \quad \%25'\text{i} \quad x \cdot \frac{25}{100}$$

olduğundan toplamları,

$$\frac{17x}{100} + \frac{25x}{100} = \frac{42x}{100}$$

bulunur. Bu toplam da 15 olarak verildiğine göre

$$\frac{42x}{100} = 21$$

den $x = 100 \cdot \frac{21}{42} = 50$ olarak bulunur.
Doğru yanıt C seçeneğidir.

5. Bu geometrik dizinin ilk terimi 3 ve ortak çarpanı da 2 olduğundan ilk dört terimi:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 2 \cdot a_1 = 6 \\ a_3 &= 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 6 = 12 \\ a_4 &= 2 \cdot a_3 = 2 \cdot 12 = 24 \end{aligned}$$

olarak bulunurlar. Dördüncü terim 24 olur.
Doğru yanıt A seçeneğidir.

6. Bu yatırımcının parasının,

$$\%70\text{'i} \quad 10000 \cdot \frac{70}{100} = 7000\text{TL}$$

dir. Bu miktar ile 5 TL'lik hisse senedinden $\frac{7000}{5} = 1400$ tane, kalan 3000 TL'si ile 20 TL'lik hisse senedinden $\frac{3000}{20} = 150$ tane alır. Bir ay sonra birincisinin değeri toplamda $1400 \cdot 7 = 9800$ TL ye ulaşırken, ikincisinin değeri toplamda $150 \cdot 25 = 3750$ TL'ye ulaşır. Yani toplam parası $9800 + 3750 = 13550$ TL olur. Bu yatırımcının kârı 3550 TL'dir. Bu kârın anaparaya oranı $\frac{3550}{10000} = 0,355$'dir. Yani yatırımcı %35, 5 kâr etmiştir.

7. Faiz oranının ne olduğunu tekrar anımsayalım: Bankaya yatırılan P_1 lira bir zaman dilimi sonunda P_2 liraya ulaşıyorsa bu zaman dilimi için uygulanan faiz oranı $\frac{P_2-P_1}{P_1}$ dir. Burada başlangıçta ne kadar paranın bankaya yatırıldığının da bir önemi yoktur, dolayısıyla bankaya 1 lira yatırıldığını düşünebiliriz. Şimdi aylık %1, 2 faiz oranı ile 1 liranın 12 ay sonra kaç lira olacağını bulalım. Bunu da bulduğumuz

$$P_n = P(1+r)^n$$

formülünde faiz oranı r yerine $0,012$, n yerine 12 ve P yerine de 1 alırsak

$$\begin{aligned} P_{12} &= (1+0,012)^{12} \\ &= 1,012^{12} \\ &= 1,15 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda bir yılda 1 lira 1,15 liraya yükselmiştir. Dolayısıyla yıllık faiz 0, 15 olur. Yani yıllık faiz %15 dir.

Doğru yanıt E seçeneğidir.

8. Enflasyon da aynen faiz mantığı ile çalışır. Faizin ne kadar getirisi varsa enflasyonun da o kadar götürüsü vardır. Yani yine

$$P_n = P(1+r)^n$$

bileşik faiz formülünü $P = 1,\ r = 0,008$ ve $n = 12$ alarak kullanabiliriz. Sonuçta $P_{12} - 1$ yıllık enflasyon oranı olur.

$$P_{12} = (1+0,008)^{12} - 1 = 0,1$$

yani yıllık enflasyon oranı %10 olur.

9. Öncelikle 12 ay vade ve %15 faiz oranı ile alınan 10000 TL'nin aylık taksidini hesaplayalım.

$$B = A\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

formülünde

$A = 10000,\ r = 0,0125$ ve $n = 12$ alınırsa,

$$\begin{aligned} B &= 10000\frac{0,0125(1+0,0125)^{12}}{(1+0,0125)^{12} - 1} \\ &= 902,58 \end{aligned}$$

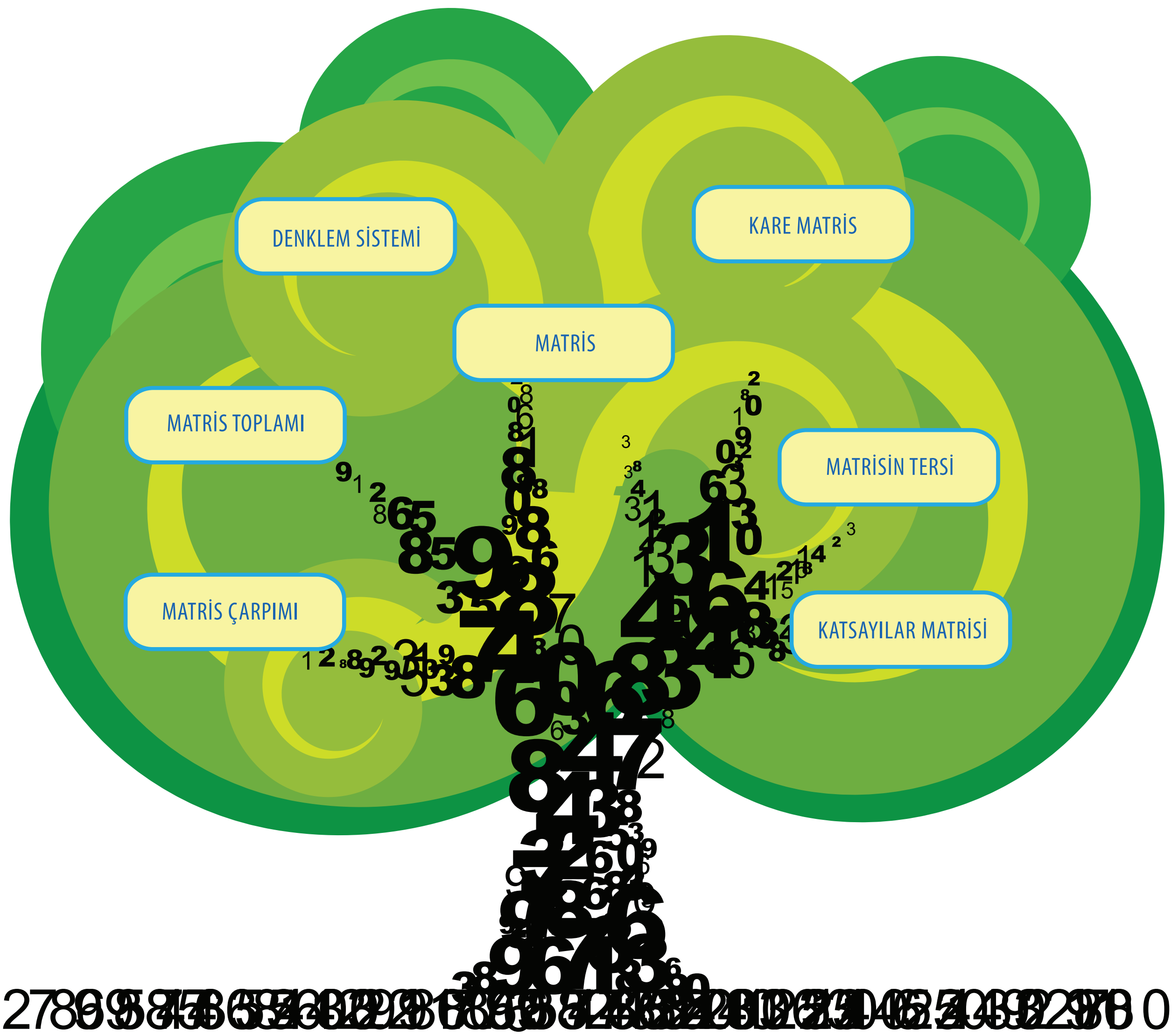
bulunur. Buradan, toplam ödenilen para miktarının $902,58 \times 12 = 10830,99$ TL olduğu görülür. Dolayısıyla fazladan ödenilen miktar $10830,99 - 10000 = 830,99$ TL olup bu da ödenen toplam faizdir.
Doğru yanıt A seçeneğidir.

10. Ayakkabının fiyatında oluşan mutlak değişim $180 - 135 = 45$ TL'dir. Dolayısıyla yüzde değişim oranı $\frac{45}{180}$ TL'dir. Bu ise $\frac{45}{180} = \frac{25}{100}$ dir. Yani ayakkabı fiyatındaki indirim oranı %25 dir. Doğru yanıt bu nedenle C seçeneğidir.

Doğrusal Denklem Sistemleri ve Matrisler

6. ÜNİTE

GENEL MATEMATİK



İki Bilinmeyenli Doğrusal Denklem Sistemleri

Gökçe, bugün seni biraz neşesiz gördüm. Canını sıkan birşey mi var?

Evet hocam, uzun süredir görmediğim bir arkadaşımı gördüm ve bana çok kilo aldığımı söyledi. Moralim çok bozuldu.

Diyet yap sen de o zaman Gökçe. Son zamanlarda diyet yapmak gündemde biliyorsun. Kitaplar, televizyon programları, internet bunlarla dolu.

Haklısın Zeynep. Uygun bir diyet listesi bularak bir an evvel diyete başlayayım.

Eee, bu kadar diyet sözü ettiniz madem. Size diyet ile ilgili bir problem söyleyeyim.

Hocam, diyetin de problemi mi olurmuş?

Evet, diyelim ki diyetisyene gittiniz ve o size her öğün için yiyecek listesi vermek yerine her öğünde almanız gereken protein ve karbonhidrat miktarlarını yazan bir liste; beraberinde de yiyeceklerin protein ve karbonhidrat miktarlarını gösteren bir tablo verdi. Kolaylık olsun diye yağları bir kenara bırakalım. Varsayalım ki öğle yemeğinde 8 gr protein ve 36 gr karbonhidrat almanız gerekiyor ve iki çeşit yiyeceğiniz var.

Tabii ki hocam. Öğrenci bütçesiyle bir öğünde beş çeşit yiyecek halimiz yok!

Haklısın belki Selçuk. Ancak her öğrenci ekmek ve çorba bulabilir herhalde. Bir dilim ekmekte 2 gr protein ve 12 gr karbonhidrat, 1 kâse çorbada 4 gr protein ve 12 gr karbonhidrat var olsun. Diyetteki bir kişi öğle yemeğinde kaç dilim ekmek yeme ve kaç kâse çorba içme hakkına sahiptir?

	Protein (gr)	Karbonhidrat (gr)
Ekmek (dilim)	2	12
Çorba (kâse)	4	12
Öğün için gerekli miktar	8	36

Hocam, bence bu problem denklem kurmadan çözülemez.

Haklısın Engin. Bu problem denklem kurmadan hatta iki tane denklem kurmadan kolay çözülemez.

Haydi o zaman denklemlerimizi kuralım artık!

Önce protein ile ilgili denklemimizi kuralım mı arkadaşlar? x ile dilim sayısını, y ile de kâse sayısını gösterirsek; bir dilim ekmekte 2 gr protein varsa x dilim ekmekte $2x$ gr protein olacaktır. Bu kadar basit. O halde çorbanın da bir kâsesinde 4 gr protein varsa y kâse çorbada $4y$ gr protein olacaktır. Üstelik öğün için gerekli protein miktarı 8 gr olduğundan ekmek ve çorbadaki proteinlerin toplamı da 8 gr olmalıdır. O halde denklemimiz $2x + 4y = 8$ olmalıdır, değil mi arkadaşlar?

Denklemimizin biri kuruldu bile.

Evet Engin. Bu kadar işte. Gökçe, sen de karbonhidrat hesabına uygun denklemi söyleyebilirsin bize artık.

Çok basit hocam! Hemen söylüyorum:
Bir dilim ekmekte 12 gr karbonhidrat varsa x dilim ekmekte $12x$ gr karbonhidrat ve 1 kâse çorbada 12 gr karbonhidrat varsa y kâse çorbada $12y$ gr karbonhidrat olur. Öğün için gerekli olan karbonhidrat miktarı 36 gr idi. O halde bu denklem de $12x + 12y = 36$ olur.

Bravo Gökçe! Gerçekten bu kadar basit. O zaman koşullarımız bize iki bilinmeyenli iki denklem vermiş oldu değil mi?

İyi de hocam, iki denklem varken x ve y'yi nasıl bulalım? Çözüme hangi denklemden başlayacağız?

İki veya daha fazla denklemimiz varsa bunlara denklem sistemi diyoruz Gökçe. Denklem sistemimiz

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 4y & = & 8 \\ 12x & + & 12y & = & 36 \end{array}$$

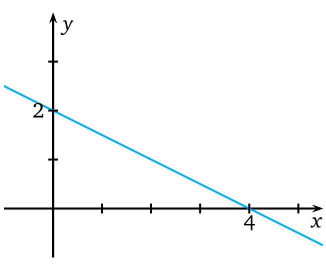
olduğuna göre bu denklemlerin ortak çözümünü araştıralım.

Ortak çözüm mü? Bu da nereden çıktı?

Şimdi anlayacaksın Selçuk. Kurduğumuz denklemlerin her ikisinde de bilinmeyenlerin yani x ile y'nin derecelerinin bir olduğuna dikkat edelim. O halde geometrik olarak bu denklemlerden her biri düzlemde birer doğru gösterir. Bunu biliyorsunuz değil mi?

Ben bu doğruları çizebilirim hocam. Daha önce farklı iki noktadan bir tek doğru geçtiğini öğrenmiştik.

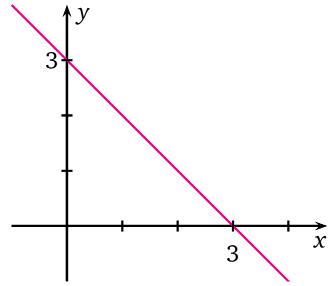
Tamam o zaman. Hemen birinci denkleme karşılık gelen doğrudan başla Engin.



Şekil 6.1: $2x + 4y = 8$ doğrusu.

İlk olarak bu doğruların eksenleri kestiği noktaları bulayım hocam. İlk denklemimizde $x = 0$ alırsak $2 \cdot 0 + 4y = 8$ olduğundan $y = \dfrac{8}{4} = 2$ bulunur. Şimdi de y'ye sıfır vereyim; $2x + 4 \cdot 0 = 8$ olduğundan $x = \dfrac{8}{2} = 4$ olur. İşte size iki nokta; $(0, 2)$ ve $(4, 0)$. Bu noktalardan geçen doğru ilk denklemimizi belirten doğrudur, değil mi hocam?

Evet öyle. Sıra ikinci denklemde.

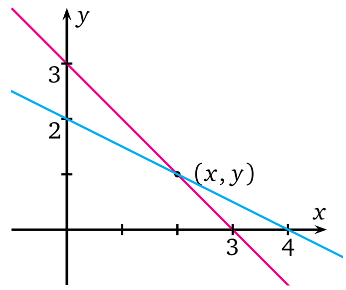


Şekil 6.2: $12x + 12y = 36$ doğrusu.

Benzer biçimde ikinci doğrunun eksenleri kestiği noktaları sırayla x ve y'ye sıfır vererek $(0,3)$ ve $(3,0)$ olarak elde ederiz.

Doğruların çizimlerini yaptık. Tamam ama, bunlar tek tek ne işe yarar ki? Biz ortak çözüm aramıyor muyuz?

Çok haklısın Gökçe. Haydi gelin bunları bir de aynı düzlemde çizelim. Bakalım ne çıkacak?



Şekil 6.3: $2x + 4y = 8$ ve $12x + 12y = 36$ doğrularının kesişimleri.

Aaaa hocam, doğrular tek bir noktada kesiştiler (Şekil 6.3). Yoksa bu kesişim noktası denklem sisteminin çözümü mü?

Kesinlikle Engin.

İyi güzel de bu ortak noktanın yani iki doğrunun kesiştiği noktanın koordinatlarını nasıl bulacağız? Milimetrik kağıt mı kullanacağız?

Milimetrik kağıdı nereden bulacağız hocam? Bunun bir başka yolu yok mu?

Tabii ki var, hatta birden fazla yolu var Gökçe. Bunlardan biri ilk denklemdeki bilinmeyenlerden birini çekip ikinci denklemde yerine yazmaktır. Bu durumda ikinci denklem tek bilinmeyenli bir denkleme indirgenecektir. Böylece bulunan denklemin çözümünden bir bilinmeyenin değeri elde edilecektir. Önce bunu gerçekleştirelim. Biliyorsunuz denklem sistemimiz

$$\begin{aligned} 2x &+ 4y &= 8 \\ 12x &+ 12y &= 36 \end{aligned}$$

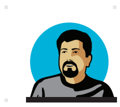
idi. Birinci denklemden y'yi çekelim isterseniz. $y = \dfrac{8-2x}{4} = 2 - \dfrac{1}{2}x$ olur.

Şimdi de bunu diğer denklemde yerine yazalım arkadaşlar.

Ben yazdım bile hocam. $12x + 12\left(2 - \frac{1}{2}x\right) = 36$, yani

$$\begin{aligned} 12x + 12 \cdot 2 - 12 \cdot \frac{1}{2}x &= 36 \\ 12x - 6x &= 36 - 24 \\ (12-6)x &= 12 \\ 6x &= 12 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

buldum.

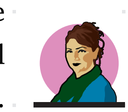


$y = 2 - \frac{1}{2}x$ bulmuştuk, şimdi bu denklemde bulduğumuz x değerini yani 2'yi yerine yazalım.

$y = 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$ oldu hocam.

İşte bu kadar. Gördünüz mü? İki doğrunun kesişim noktası olan (x, y)'yi $(2, 1)$ olarak buldunuz arkadaşlar.

O halde hocam bu sonuç, diyet yapan kişinin öğle yemeğinde 2 dilim ekmek ve 1 kâse çorba hakkının olduğunu söyler değil mi? Ne güzel! Hem ucuz hem kolay diyet. Hemen başlıyorum.



Bu çözüm yöntemine yerine koyma yöntemi denir.

Bu işi kavradınız, haydi şimdi de şu sistemin çözümüne bakalım:

$$\begin{aligned} 4x+3y &= 18 \\ 6x-3y &= 12. \end{aligned}$$

Bunu ben deneyeyim hocam. Denklemleri taraf tarafa toplarsak

$$\begin{array}{rrcrcr} & 4x & + & 3y & = & 18 \\ + & 6x & - & 3y & = & 12 \\ \hline & 10x & & & = & 30 \end{array}$$

olur. $3y$ ile $-3y$ sadeleşiverdi ve $x = \frac{30}{10} = 3$ çıktı işte. Bunu da denklemlerden birinde yerine yazabilir miyim hocam?

Evet Engin. Hiç farketmez istediğin birinde yerine yazabilirsin.

Birincide yazayım. $4 \cdot 3 + 3y = 18,\ 12 + 3y = 18,\ 3y = 6,$ $y = 2$ çıktı. O halde sistemin çözümü $(3, 2)$ noktası oldu.

Böylece yeni bir çözüm yönteminiz oldu arkadaşlar. Eğer verilen iki denklemde de bilinmeyenlerden birinin katsayıları eşit ise ya da uygun bir sayıyla denklemlerden birinin her iki yanı çarpılarak katsayılar eşitlenebiliyorsa bu bilinmeyeni yok edebiliriz. Bu yolla sistemin çözümünü bulmaya da yok etme yöntemi denir.

Arkadaşlar Mete Hoca'nın söylediklerini kullanarak

$$\begin{aligned} 2x-3y &= -7 \\ x+6y &= 34 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemini çözebilir miyiz? Ne dersiniz?

Artık olayı kavradık. Bunu ben bile çözebilirim. İlk olarak her iki denklemde de bir bilinmeyenin katsayılarını eşit hale getireceğiz değil mi Pınar Hocam?

Evet Selçuk. Katsayıları eşit hale getirirseniz, denklemleri taraf tarafa çıkartırsınız; katsayıları zıt işaretli hale getirirseniz, denklemleri taraf tarafa toplarsınız.

Tamam hocam. Sistemin birinci denkleminin her iki yanını 2 ile çarpıyorum.

Neden denklemin her iki yanını da 2 ile çarptık? Bilinmeyenler sol tarafta, sadece sol tarafı çarpsak olmaz mı?

O zaman eşitliği bozardık.

Aferin Selçuk.

O halde devam ediyorum:

$$\begin{array}{rcl} 2\cdot(2x-3y) & = & 2\cdot(-7) \\ x+6y & = & 34 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 4x-6y & = & -14 \\ x+6y & = & 34 \end{array}$$

olur. Şimdi de denklemlerin her iki yanını taraf tarafa toplarsak

$$\begin{array}{rrcrcr} & 4x & - & 6y & = & -14 \\ + & x & + & 6y & = & 34 \\ \hline & 5x & & & = & 20 \end{array}$$

ve $x=4$ buluruz.

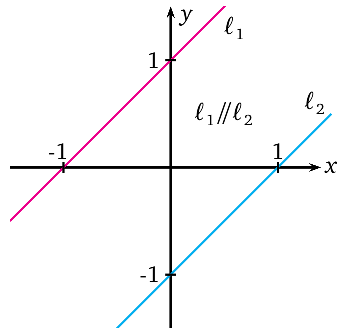
Bu x değerini denklemlerimizden birinde yerine yazmak y'yi bulmak için yeterli değil mi Selçuk?

Evet Zeynep. $x=4$ değerini ben ikinci denklemde yerine yazdım ve $y=5$ buldum. O halde denklem sisteminin çözümü $(x,y)=(4,5)$ olur.

Mete Hocam, kafama bir soru takıldı: İki bilinmeyenli her denklem sisteminin her zaman bir çözümü var mıdır? Varsa hep tek midir?

Bu sorunun cevabı olumsuz Engin. Sistemdeki her bir denklem düzlemde bir doğruya karşılık geldiğinden, bu soru geometrik olarak iki doğru her zaman kesişir mi, kesişirse tek noktada mı kesişir sorusuna dönüşür ki bunun cevabını grafikle verebiliriz.

Örneğin yandaki grafikteki ℓ_1 ve ℓ_2 paralel doğrularını göz önüne alalım. ℓ_1 ve ℓ_2 doğrularının hiçbir ortak noktası olmadığından bu doğruların denklemlerinden oluşan sistemin çözümü yoktur.



Şekil 6.4: Birbirlerine paralel olan ℓ_1 ve ℓ_2 doğruları.

Grafikleri verilen bu doğruların denklemlerini kolayca yazabiliyorduk hocam.

$$\ell_1 \; : \; \frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad -x + y = 1 \text{ yani } y = x + 1$$

$$\ell_2 \; : \; \frac{x}{1} + \frac{y}{-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad x - y = 1 \text{ yani } y = x - 1$$

doğruların denklemleri olur, değil mi?

$\ell_1 : \; y = m_1 x + n_1$
$\ell_2 : \; y = m_2 x + n_2$
olmak üzere $m_1 = m_2$ ve $n_1 \neq n_2$ ise doğrular paralel; $m_1 = m_2$ ve $n_1 = n_2$ ise doğrular çakışık olur.

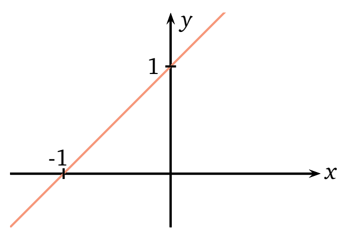
Bu doğruların eğimleri aynı çıktı!

Tabii, paralel doğruların eğimleri aynıdır.

Bir de

$$\begin{array}{rcrcr} -x & + & y & = & 1 \\ -2x & + & 2y & = & 2 \end{array}$$

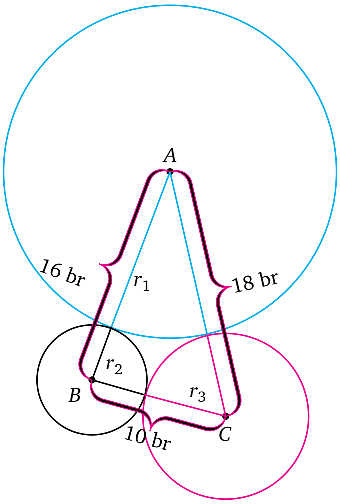
denklem sistemini oluşturan doğruların grafiklerini çizin bakalım.



Şekil 6.5: Çakışık olan $-x+y=1$ ve $-2x+2y=2$ doğruları.

Bu iki denklem de aynı doğruyu verdi hocam. Bu durumda ne diyeceğiz?

Bu durumda bu iki doğrunun bütün noktaları ortak olduğundan sistemin sonsuz çözümü vardır deriz (Şekil 6.5).



Şekil 6.6: İkişer ikişer birbirine dıştan teğet olan üç çember ve çemberlerin merkezleri arasındaki uzaklıklar.

Üç Bilinmeyenli Doğrusal Denklem Sistemleri

Şimdi size geometriden bir problem sorayım. İkişer ikişer birbirine dıştan teğet olan ve merkezleri A, B ve C olan üç tane çember ve bu çemberlerin merkezlerinin arasındaki uzaklıklar $|AB| = 16$ birim (br), $|AC| = 18$ br ve $|BC| = 10$ br olarak verilirse her bir çemberin yarıçapını bulabilir misiniz?

Burada üç çember var. O zaman üç yarıçap var. Üstelik üçünü de bilmiyoruz!

Bravo Gökçe, bunu anladım da asıl iş bu yarıçapları bilinmeyen kabul eden denklemleri bulmakta.

Telaşlanmayın arkadaşlar. Bir şekil yardımıyla bu denklemleri kurabiliriz. A merkezli çemberin yarıçapına r_1, B merkezli çemberin yarıçapına r_2 ve C merkezli çemberin yarıçapına r_3 dersek merkezler arasındaki uzaklıklar her defasında iki yarıçapın toplamı olacağından

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 16 \\ r_1 + r_3 &= 18 \\ r_2 + r_3 &= 10 \end{aligned}$$

olur. Böylece üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan bir sistem bulmuş oluruz.

Üç denklem, üç bilinmeyen. Oley!

Aferin Selçuk. Peki bu üç bilinmeyenli doğrusal denklem sistemini nasıl çözeriz?

Yerine koyma yöntemini denesek? Onu öğrenmiştik. Örneğin, birinci denklemden r_2'yi, ikinci denklemden r_3'ü çekip son denklemde yerine yazsak

$$(16 - r_1) + (18 - r_1) = 10$$

denklemini bulmuş oluruz, hem de tek bilinmeyenli. Buradan $34 - 2r_1 = 10$, $\;2r_1 = 24$, yani $r_1 = 12$ bulunur.

O zaman,

$$\begin{array}{lll} r_2 = 16 - r_1 & \text{olduğundan} & r_2 = 4 \\ r_3 = 18 - r_1 & \text{olduğundan} & r_3 = 6 \end{array}$$

olur.

Mükemmel! Böylece çemberlerin yarıçapları da $r_1 = 12$ br, $r_2 = 4$ br ve $r_3 = 6$ br oldu. Sistemin tek çözümü de

$$(r_1, r_2, r_3) = (12, 4, 6)$$

olarak bulunmuş oldu.

Üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan bir denklem sisteminin çözümleri sıralı üçlüler biçiminde yazılabilir.

Hocam, üç bilinmeyenli denklem sistemleri ile ilgili bir örnek daha yapabilir miyiz?

Tabii ki Engin. Haydi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ -x & + & 3y & & & = & -4 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \end{array}$$

sistemini çözelim. Engin soruyu sen sordun, dene bakalım yok etme yöntemiyle çözebilecek misin?

Hay Allah! Sormasa mıydım acaba bu soruyu? İki bilinmeyenli denklem sistemlerinden farklı olarak bir bilinmeyen ve bir denklem fazla. Bir düşüneyim...

Engin'i fazla yormayalım. Birinci denklemle ikinci denklemi taraf tarafa toplayıp sonra bunu ikinci denklemin yerine yazalım:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \end{array}$$

Birinci denklemle ikinci denklemi taraf tarafa topladık:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} & x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ + & -x & + & 3y & & & = & -4 \\ \hline & & & y & + & 3z & = & 5 \end{array}$$

Şimdi de birinci denklemi -2 ile çarpıp üçüncü denklemle taraf tarafa toplayalım, onu da üçüncü denklemin yerine yazalım:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & - & y & - & z & = & -1 \end{array}$$

Birinci denklemi -2 ile çarpıp üçüncü denklemle taraf tarafa topladık:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} & -2x & + & 4y & - & 6z & = & -18 \\ + & 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \\ \hline & & & -y & - & z & = & -1 \end{array}$$

Mete Hocam, son iki denklemdeki x'li terimler yok oldu.

Daha sistemi çözmedik ama arkadaşlar. Yeni elde edilen sistemin son iki denklemini toplayıp üçüncü denklemin yerine yazalım:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ 2z &= 4. \end{aligned}$$

Artık bu sistemin kolayca çözülebileceğini görüyorsunuzdur. Üçüncü denklem bize doğrudan z bilinmeyeninin değerini verir, $2z = 4$'ten $z = 2$ olur. Bunu ikinci denklemde yerine yazarsak $y + 3 \cdot 2 = 5$'ten $y = -1$ olur. Son olarak da birinci denklemde z yerine 2 ve y yerine -1 yazılırsa $x - 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 9$'dan $x = 1$ bulunur. Demek ki çözümümüz $x = 1$, $y = -1$ ve $z = 2$'dir.

Yani basamak basamak aşağıdan yukarı yerine yazarak sistemin çözümünü bulduk.

Bir denklem sistemini çözmek için sırasıyla aşağıdaki işlemler uygulanırsa sistemin çözümü değişmez.

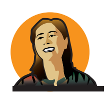
1. İki denklemin yeri değiştirilebilir,
2. Sistemdeki bir denklem sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılabilir,
3. Bir denklem bir sayı ile çarpılıp, sistemdeki diğer bir denkleme eklenebilir.

Mete Hocam, iki bilinmeyenli doğrusal denklem sistemlerinde olduğu gibi üç bilinmeyenli denklem sistemlerinde de her zaman çözüm olmayabilir değil mi?

Haklısın Engin. Şimdiye kadar yaptığımız örneklerde çözüm var ve tekti. Şimdi de

$$\begin{aligned} 3x + 5y + 7z &= 10 \\ 2x + 4y - z &= 6 \\ 2x + 4y - z &= 7 \end{aligned}$$

sistemini düşünelim.



Hocam, son iki denklemin sol yanları eşit fakat sağ yandaki sayılar farklı. Aynı ifade farklı iki sayıya eşit olur mu hiç? Bizden imkansızı bulmamızı istiyorsunuz herhalde!

Çok iyi gördün Zeynep! Bu çelişkiden dolayı sistemin hiçbir çözümü yoktur.

Matrisler

Biraz önce bir doğrusal denklem sistemini çözerken yok etme yöntemini kullandınız. Bu işlemi yaparken de dikkat ettiyseniz x, y, z bilinmeyenleri ile değil de bunların katsayıları ile işlem yaptınız. Şimdi

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & - & z & = 6 \\ 2x & - & y & + & 3z & = 11 \\ 4x & + & 2y & - & 3z & = 14 \end{array}$$

sistemini göz önüne alalım. Bakalım neler olacak?

Sihirli değneğinizi sisteme dokunduracaksınız ve sistem çözülmüş olacak, değil mi hocam?

O kadar olmasa da benzer işleri başka yoldan yapacağız Selçuk. Böylece sistem kolayca çözülmüş olacak. Bir an için x, y, z bilinmeyenlerini ve eşitlik işaretini görmeyip sadece katsayıları yazalım:

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & 2 & -3 & 14 \end{array}$$

Böyle yaparak bana göre sadece bir sayı yığını elde ettik hocam.

Gökçe biraz dikkat edersen bunun bir sayı yığını olmadığını, her satırı sistemin bir denklemine karşılık gelen bir tablo olduğunu hemen göreceksin.

Birinci sütun x'in, ikinci sütun y'nin ve üçüncü sütun da z'nin katsayılarından oluşuyor. Son sütun da eşitliklerin diğer yanındaki sayılardan, değil mi hocam?

Aynen öyle Engin. Dahası da var: Bu tabloyu, denklem sistemini çözmek için yok etme yöntemini uygularken x, y, z'leri sürekli taşımadan doğrudan kullanabiliriz.

Ayrıca Pınar Hoca'nın oluşturduğu tablo köşeli iki parantez içine alınırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & 2 & -3 & 14 \end{bmatrix}$$

tablosu elde edilir. Üç satır ve dört sütundan oluşan bu tabloya 3×4 boyutunda bir matris denir. Bu tablonun sütunları x, y ve z'nin katsayılarından oluşan üç sütun ile eşitliğin ikinci yanını veren bir sütundan oluştuğu için buna özel olarak sistemin genişletilmiş matrisi denir. Sadece x, y, z'nin katsayılarından oluşan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

matrisine sistemin katsayılar matrisi denir. Bu matrisin içindeki her bir sayıya da bu matrisin elemanı denir.

Tanım Bir matristeki düz yatay bir sıraya matrisin bir satırı, dikey bir sıraya matrisin bir sütunu adı verilir.

Tanım Sadece bir satırdan oluşan matrise satır matrisi, sadece bir sütundan oluşan matrise sütun matrisi adı verilir.

Artık yok etme yöntemini uygulayabilir miyiz hocam?

Evet Zeynep. Ancak başlamadan önce sizi matrisler üzerinde üç değişik işlem yapma hakkınız olduğu konusunda uyarmak isterim. Bu işlemler: iki satırın yerlerinin değiştirilmesi; bir satırın sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılması; bir satırın bir sayı ile çarpılıp bu çarpımın başka bir satırla toplanmasıdır.

Genişletilmiş matrisin birinci satırındaki elemanları -2 ile çarpıp, ikinci satırdaki elemanlarla toplarsak matrisimiz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & -3 & 14 \end{bmatrix}$$

matrisine dönüşür. Elde ettiğimiz bu matriste birinci satırdaki elemanları -4 ile çarpıp üçüncü satırdaki elemanlarla toplarsak, bu durumda

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

matrisini elde ederiz.

Gördüğünüz gibi birinci satırda ilk eleman 1 olduğu için ikinci ve üçüncü satırdaki sayıların zıt işaretlisi ile birinci satırı çarpıp sırasıyla ikinci ve üçüncü satırlara ekledik ve bu satırların ilk terimleri 0 oldu.

Şimdi bir alt satıra geçelim. Burada 0'dan farklı ilk terimi bulalım ve öncelikle bu terimi 1 yapalım. Bu işlem bize bu terimin altındaki elemanları 0 yapmada büyük kolaylık sağlar. Bunun için ikinci satırı $\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ ile çarpalım. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -10 \end{bmatrix} \text{ matrisinden } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

matrisini elde ederiz. Böylece ikinci satırda 0'dan farklı ilk terim 1 olur.

Hocam, isterseniz geriye kalan işlemi ben tamamlayayım. İkinci satırı 2 ile çarpıp üçüncü satıra eklersem, bu durumda

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{28}{3} \end{bmatrix}$$

matrisini elde ederim.

Evet Engin. Söylediğim tam olarak buydu.

Hocam, son bir adım daha devam edersek, son satırı $-\frac{3}{7}$ ile çarparsam

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{28}{3} \end{bmatrix} \text{ matrisinden } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisini elde ederim.

Zeynep'in son yaptığıyla, satır işlemleri kullanılarak denklem sistemimiz

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 6 \\ & & y & - & \frac{5}{3}z & = & \frac{1}{3} \\ & & & & z & = & 4 \end{array}$$

şeklini alır. Burada $z = 4$ ile başlayıp, basamak basamak aşağıdan yukarıya doğru yerine koyarak sistemin çözümü $(x, y, z) = (3, 7, 4)$ olarak bulunur.

Her ne kadar biz doğrusal denklem sistemlerinin çözümlerini bulmak için matrislerden söz ettikse de matrisler konusu oldukça geniş bir konudur. Ayrıntılara girmeden en azından matrisler üzerindeki bir kaç temel işlemin tanımını verip özelliklerini inceleyelim.

Temel işlemlerle neyi kastediyorsunuz hocam?

Toplam, fark, çarpım gibi işlemlerden bahsediyoruz. Bir matrisin boyutundan daha önce söz etmiştik hatırlarsanız. Öncelikle şunu belirtelim ki yalnızca boyutları aynı olan matrislerin toplamından ve farkından bahsedebiliriz. İki matrisin toplamı ya da farkı, elemanları bu iki matrisin karşılık gelen elemanlarının toplamı ya da farkı olan yeni bir matristir. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \text{ ise}$$

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+(-3) & (-1)+4 \\ 0+2 & 5+(-5) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

yazılabilir. Özel bir durum olarak bir matrisin tüm elemanları sıfır ise bu matrise sıfır matris denir ve O harfi ile gösterilir. Bu durumda

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 2} \text{ ile } O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \text{ matrislerini toplarsak,}$$

$$A + O = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = A \text{ olur.}$$

O zaman O matrisi gerçel sayıların sıfırına çok benziyor.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$
$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$
matrisleri verilsin.
$A = B$ yani A matrisinin B matrisine eşit olması demek

$$a_{11} = b_{11},\ a_{12} = b_{12}$$

$$a_{21} = b_{21},\ a_{22} = b_{22}$$

olmasıdır.
A ve B'nin toplamı olan matris

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

matrisidir.

Tanım Bir matrisin bütün elemanları sıfır ise bu matrise bir sıfır matris denir. Örneğin,

$$O = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{1\times 1}$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

farklı boyutlarda sıfır matrislerdir.

Evet Zeynep. Sıfır matrisi, kendisiyle aynı boyuttaki matrislerin toplama işleminin etkisiz elemanıdır. Ayrıca $A+B=B+A=O$ özelliğine sahip B matrisine A matrisinin toplamaya göre tersi denir ve $-A$ ile gösterilir.

Biraz da çarpma işleminden söz edelim. Bir matrisi bir k sayısı ile çarpmak demek matrisin tüm elemanlarını k sayısı ile çarpmak demektir. Özel olarak bir A matrisini (-1) ile çarparsak $(-1)A$ çarpımı $-A$ olacaktır.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

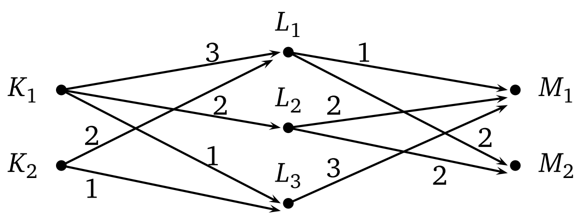
matrisi ve $k\in\mathbb{R}$ için

$$kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{bmatrix}$$

matrisine A matrisinin k sayısı ile çarpımı denir.

Hocam, siz çarpımdan söz edelim deyince ben de iki matrisin birbiriyle çarpımını anlamıştım.

Tam da sıra ona gelmişti Selçuk. Bunu bir örnekle açıklamaya çalışayım. $K,\ L,\ M$ gibi üç ülke ve bu ülkelerin sırasıyla $K_1,\ K_2;\ L_1,\ L_2,\ L_3;\ M_1,\ M_2$ gibi havaalanlarının olduğunu varsayalım. Bu havaalanları ve aralarındaki günlük uçuş sayısı ile ilgili aşağıdaki çizelgeyi oluşturalım. Havaalanları arasındaki çizgiler uçuş hattını ve üzerindeki sayılar da günlük uçuş sayısını göstersin.



Hocam, biryerlere tatile mi gideceksiniz yoksa? Ne yapıyorsunuz?

Bir dakika Selçuk. Ne yapacağımı biraz sonra göreceksin. Bu verilere göre K ülkesinden L ülkesine uçuş bilgilerini bir tablo şeklinde de ifade edebiliriz.

Kalkış h. \ Varış h.	L_1	L_2	L_3
K_1	3	2	1
K_2	2	0	1

Bu tabloyu da bir matris olarak görebiliriz:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu matris K'dan L'ye uçuş bilgilerini kodlamaktadır. Benzer şekilde L'den M'ye uçuş bilgilerini de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi ile ifade edebiliriz. Uçuş bilgilerini içeren bu matrislerden birincisini U ve ikinci matrisi de V ile gösterelim. Peki K ülkesinin belli bir havaalanından M ülkesinin belli bir havaalanına L ülkesinde aktarma yaparak uçmak isteyenlerin uçuş seçeneklerinin sayısını da bulabilir miyiz?

Evet hocam. Örneğin, K ülkesinin K_2 havaalanından M ülkesinin M_1 havaalanına gitmek isteyen bir kişinin seçenek sayısı çizelgeye bakarak hesaplanabilir. L_1 havaalanı üzerinden 2 seçenek ve L_3 havaalanı üzerinden 3 seçenek var. L_2 üzerinden bir bağlantı yok. Demek ki toplam 5 seçenek var.

Ancak bu sayıyı U matrisinin ikinci satır elemanları ile V matrisinin birinci sütun elemanlarını karşılıklı çarpıp toplayarak hemen elde edebiliriz. Yani

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 5$$

olur. Bu mantığı kullanırsak K'nın K_i $(i = 1,\ 2)$ havaalanından L'nin herhangi bir havaalanını kullanarak M'nin M_j $(j = 1,\ 2)$ havaalanına uçmak isteyen birinin uçuş seçeneklerinin sayısını bulmak istersek, U'nun i. satırı ile V'nin j. sütununun elemanlarını karşılıklı çarpıp toplamak yeterlidir.

Peki bunların oluşturduğu yeni matris nedir bu durumda?

Mete Hocam anlatırken ben bir yandan hesapladım. U ve V'den elde edilen bu yeni matrise T dersek

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 3 & 3\cdot 2 + 2\cdot 2 + 1\cdot 0 \\ 2\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 3 & 2\cdot 2 + 0\cdot 2 + 1\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

olur.

Bravo Zeynep! Böylece K ülkesinden L ülkesinde aktarma yaparak M ülkesine uçmak isteyenlerin uçuş seçeneklerinin sayısını veren matris

$$\begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur.
Bu matrisi elde ederken U matrisinin birinci satır elemanları ile V matrisinin birinci sütun elemanlarını karşılıklı çarpıp toplayarak T matrisinde birinci satır birinci sütuna karşılık gelen yere yazıyoruz. Sonra U matrisinin birinci satır elemanları ile V matrisinin ikinci sütun elemanlarını karşılıklı çarpıp toplayarak T matrisinde birinci satır ikinci sütundaki yere yazıyoruz. Benzer işlemlerle T matrisinin ikinci satırını oluşturuyoruz.

Bu yeni matrise bir isim verelim artık. Bu T matrisine U ile V matrislerinin çarpım matrisi denir ve bu matris $U \cdot V$ ile gösterilir. Bu örneğimiz belki çok gerçekçi olmayabilir ama matris çarpımı olgusunun kendiliğinden karşımıza çıktığı bir örnektir. Benzer şekilde uygun başka matrisleri de çarpabilirsiniz.

Hocam, her zaman iki matrisi çarpabilir miyiz?

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p} = A\cdot B = C_{m\times p}$$

eşit

Matris çarpımının değişme özelliği yoktur, yani A ve B matrisleri için AB ve BA tanımlı olduğunda genel olarak $AB \neq BA$'dır.

Tabii ki hayır Engin. Ancak çarpım sırasındaki ilk matrisin sütun sayısı ikinci matrisin satır sayısına eşitse bu iki matris çarpılabilir. Bu durumda çarpım matrisinin i. satır ve j. sütunundaki elemanını bulmak için birinci matrisin i. satırındaki elemanlar ile ikinci matrisin j. sütunundaki elemanları karşılıklı olarak çarpıp toplayacaksınız.

Örneğin, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ile $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisleri çarpılabilir. Bunları çarpalım ve $A\cdot B$ çarpım matrisini bulalım.

A matrisinin sütun sayısıyla B matrisinin satır sayısı aynı olduğundan A ile B matrisleri çarpılabilir matrislerdir, değil mi hocam?

Evet Zeynep. Bu yüzden $A\cdot B$ matrisi tanımlıdır. Bu matrise C dersek, C'nin satır sayısı iki, sütun sayısı üçtür; yani C, 2×3 boyutunda bir matris olacaktır. Bu durumda

$$C = A\cdot B \quad = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisini bulalım. Matris çarpımının biraz önce verdiğimiz kuralını kullanarak

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-1)+3\cdot 1 & 1\cdot 1+3\cdot(-1) & 1\cdot 0+3\cdot 2 \\ 2\cdot(-1)+0\cdot 1 & 2\cdot 1+0\cdot(-1) & 2\cdot 0+0\cdot 2 \end{bmatrix}$$

buluruz. Yani gördüğünüz gibi

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

olur.

O halde şimdi size bir sorum olacak.

$$\begin{aligned} a_{11}x &+ a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x &+ a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemini matris çarpımı kullanarak nasıl yazabilirsiniz?

Eşitliğin her iki yanını bir matris olarak düşünsek hocam? Yani

$$\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

olarak yazsak bu bir matris eşitliği olur, değil mi?

Evet, sol yandaki matrisi de matris çarpımını kullanarak

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix}$$

biçiminde yazabiliriz. O halde sistem

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde ve üç matris yardımıyla ifade edilebilir.

Bu da matris denklemi gibi birşey mi oluyor hocam?

Gerçekten öyle Gökçe. Her doğrusal denklem sistemi, A katsayılar matrisi, X değişkenlerin sütun matrisi ve B eşitliğin ikinci yanındaki sayıların sütun matrisi olmak üzere

$$AX = B$$

biçiminde yazılabilir.

Peki denklem sistemlerinin çözümü dışında matris çarpımı kullanılarak çözülebilen başka problemler var mı Mete Hocam?

Tabii ki Engin. Örneğin, bir apartmanın her dairesinin harcadığı elektrik, su, doğalgaz miktarları ve bunların birim fiyatları bilinirse her bir dairenin elektrik, su ve doğalgaz giderlerinin toplamı, matris çarpımı kullanılarak kolayca bulunabilir. Bunu yandaki verilerle 4 daireli bir apartman için şöyle ifade edebiliriz.

$$\begin{bmatrix} 30 & 400 & 76 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 210 & 180 & 220 & 230 \\ 10 & 8 & 12 & 9 \\ 250 & 210 & 240 & 260 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 29300 & 24560 & 29640 & 30260 \end{bmatrix}$$

E : Elektrik kullanımı
S : Su kullanımı
D : Doğalgaz kullanımı
olmak üzere

	1. Daire	2. Daire	3. Daire	4. Daire
E (kwh)	210	180	220	230
S (m^3)	10	8	12	9
D (Sm^3)	250	210	240	260

1 Sm^3 doğalgaz $15°C$ ve 1,01325 bar mutlak basınçtaki 1 m^3 doğalgaz hacmine eşittir.

	E	S	D
Birim Fiyat (Kuruş)	30	400	76

olur. Bu durumda

1. Daire için giderler toplamı 29300 kuruş yani 293 TL
2. Daire için giderler toplamı 24560 kuruş yani $245,60$ TL
3. Daire için giderler toplamı 29640 kuruş yani $296,40$ TL
4. Daire için giderler toplamı 30260 kuruş yani $302,60$ TL'dir.

Tanım Satır ve sütun sayıları eşit olan bir matrise bir kare matris denir. Örneğin,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

matrisi 2×2 boyutunda bir kare matris ve

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

matrisi 3×3 boyutunda bir kare matristir.

Gördüğünüz gibi matris çarpımı hayatın içinden bir probleme de uygun düşebiliyor. Son olarak denklem sistemlerinin matrislerle ilgili bir problemin çözümünde nasıl kullanılabileceğine bir örnek görelim. Satır ve sütun sayıları eşit olan bir matrise bir kare matris denir. Örneğin,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

matrisi 2×2 boyutunda bir kare matristir.

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi de 2×2 boyutunda bir kare matristir. Bu matrise de bir birim matris denir ve

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

olduğunu hemen görebilirsiniz. Matrislerle ilgili ilginç bir problem, bir kare matrisin çarpımsal tersini bulma problemidir. Örneğin, A matrisi için öyle bir

$$B=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

matrisi bulabilir miyiz ki,

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

olsun.

Problemi daha da somutlaştırmak için

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

alalım. Böyle bir B matrisi bulabilir miyiz?

Hocam, bir deneyeyim.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmasını istiyoruz. Matris çarpımından

$$\begin{bmatrix} x+2z & y+2t \\ 3z & 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Öte yandan iki matrisin eşitliğinden

$$\begin{aligned} x+2z &= 1 \\ 3z &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} y+2t &= 0 \\ 3t &= 1 \end{aligned}$$

denklem sistemlerini elde ederiz. Önce birinci sistemi çözelim. Bu sistemin ikinci denkleminden $z = 0$ olduğu görülüyor. Bulduğumuz z değerini birinci denklemde yerine yazarsak $x + 2 \cdot 0 = 1$'den $x = 1$ bulunur.

İkinci denklem sistemini de ben çözeyim hocam. $3t = 1$ denkleminden $t = \frac{1}{3}$ elde edilir. Bu değer birinci denklemde yerine yazılırsa $y + 2 \cdot \frac{1}{3} = 0$ denkleminden $y = -\frac{2}{3}$ elde edilir. O halde

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

matrisine ulaşırız.

Her ikinize de aferin. Ama sizler

$$AB = I$$

eşitliğinden hareketle B matrisini buldunuz. Ama ben aynı zamanda

$$BA = I$$

olmasını da istemiştim.

O zaman BA çarpımına bir bakalım hocam.

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

oldu. Çok şanslıyız, o özellik de kendiliğinden sağlandı.

Evet Zeynep. Bu matrise A matrisinin çarpımsal tersi veya kısaca tersi diyoruz ve A^{-1} ile gösteriyoruz. Artık 2×2'lik herhangi bir matrisin tersini de bu yolla bulabilirsiniz. Ama eğer varsa tabii!

Özet

Bu ünitede iki ve üç bilinmeyenli doğrusal denklem sistemlerinin kuruluşu ve çözüm yöntemleri üzerinde durduk. Ayrıca matrisleri tanıtarak denklem sistemlerini matrisler yardımıyla ifade ettik. Ünitede son olarak matrislerle yapılan toplam, fark ve çarpım gibi bazı temel işlemleri verdik. Buna ek olarak 2×2 boyutunda kare matrislerin varsa terslerinin nasıl bulunabileceğini gördük.

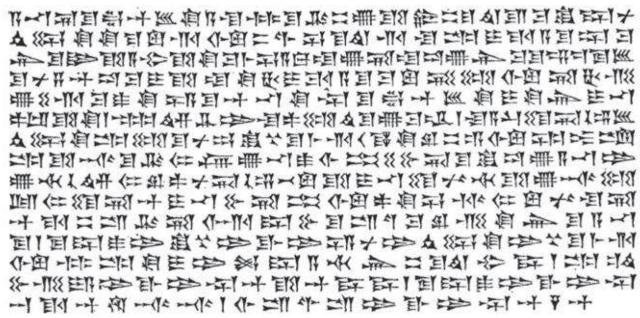
Okuma Parçası

BABİLONYA CEBRİ

HAMMURABİ (MÖ. 1795-1750) ZAMANI

Hammurabi zamanındaki matematikçilerin düşünceleri hakkında bütün bildiğimiz eski Babilonya çivi yazılı metinlerdedir. Bunlardan biri O. Neugebauer'in "Mathematische Keilschrifttexte (Çivi Yazılı Matematik Metinleri)" adlı eserinden alınmış aşağıdaki örnektir. Ancak orijinal örneğe geçmeden önce Babilonya cebrinde geçerli bazı birimleri ve bunların birbiri cinsinden ifadesini vermek uygun olacaktır. bùr alan birimi ve $1\ bùr = 30{,}0\ SAR$, gur ölçü birimi ve $1\ gur = 5{,}0\ sila$ olarak verilmiştir. (SAR ve sila resmi birimler, bùr ve gur pratikte kullanılan birimlerdir.) Buradaki 30,0 ve 5,0 sayıları 60'lı sayı sisteminde yazılmıştır. Yani $30{,}0 = 30 \cdot 60 = 1800$ ve $5{,}0 = 5 \cdot 60 = 300$ olmaktadır.

"Bir tarladan $bùr$ (alan birimi) başına $4\ gur$ hububat elde ettim. Diğer bir tarladan bùr başına $3\ gur$ hububat elde ettim. Birinci tarladan aldığım ürün ikinci tarladakinden $8{,}20\ sila$ fazladır.Tarlaların alanlarının toplamı $30{,}0\ SAR$'dır. Tarlaların her birinin alanı nedir?"



Eski Babilonya Çivi Metni

Tarlaların bilinmeyen alan değerlerine x ve y diyelim. Bu durumda aşağıdaki iki denklem söz konusu olur:

$$\begin{array}{ccccc} 4x & - & 3y & = & 8{,}20\ sila \\ x & + & y & = & 30{,}0\ SAR \end{array}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafındaki $sila$ ve SAR birimlerini $bùr$ ve gur cinsinden ifade edelim. $8{,}20\ sila = 8 \cdot 60 + 20\ sila = 500\ sila$ olup, $1\ gur$ $300\ sila$ olduğundan $8{,}20\ sila = \frac{500}{300}\ gur = \frac{5}{3}\ gur$ olur.

Diğer yandan $30{,}0\ SAR = 1\ bùr$ olarak verilmiştir.

Bunları yerine koyarak aşağıdaki $bùr$'lu gur'lu denklemi elde ederiz:

$$\begin{array}{ccccc} 4x & - & 3y & = & \dfrac{5}{3} \\ x & + & y & = & 1 \end{array}$$

olur. Bu denklem sistemi çözülürse $x = \frac{2}{3}\ bùr$ ve $y = \frac{1}{3}\ bùr$ bulunur.

Kaynak: B. L. Van Der Waerden, Bilimin Uyanışı, Eski Mısır, Babilonya ve Eski Yunan Matematiği, Çeviren: Orhan İçen ve Yılmaz Öner, Türk Matematik Derneği, İstanbul, 1994

Çıkarın Kağıtları

1. $\begin{array}{rcrcr} 3x & - & y & = & 13 \\ 4x & + & 3y & = & 26 \end{array}$ sistemini yerine koyma yöntemi ile çözünüz.

2. $\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & = & -1 \\ x & - & y & = & -3 \end{array}$ sistemini yok etme yöntemi ile çözünüz.

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisleri için $A - B$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ise $3A$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 3 & 9 & 15 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 3 & 9 & 15 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix}$

5. $\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 15 \\ 2x & + & 5y & = & 26 \end{array}$ sisteminin katsayılar matrisi nedir?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 2 & 26 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 3 & 15 \\ 5 & 26 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

6. Ahmet'e kaç kardeşin var diye sormuşlar. Ahmet ne kadar erkek kardeşim varsa o kadar kız kardeşim var demiş. Ahmet'in kız kardeşi Ayşe'ye kaç kardeşin var diye sormuşlar. Ayşe de erkek kardeşlerimin yarısı kadar kız kardeşim var demiş. Bu ailede kaç kız kaç erkek çocuk vardır?

7. Bir seminere katılan bir grup öğrenci seminer salonundaki sıralara 5'er 5'er otururlarsa 7 öğrenci ayakta kalıyor. 6'şar 6'şar otururlarsa 3 sıra boş kalıyor. Bu seminere kaç öğrenci katılmıştır?

8. $A \cdot B \neq B \cdot A$ olacak şekilde iki matris örneği veriniz.

9. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ matrislerinin çarpımını bulunuz.

10. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi ile $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sütun matrisinin çarpımını bulunuz.

Çözümler

1. Birinci denklemden y'yi çekersek

$$y = 3x - 13$$

elde edilir. Bu ikinci denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 4x + 3(3x - 13) &= 26 \\ 13x - 39 &= 26 \end{aligned}$$

olur. Buradan $x = 5$ bulunur.

$$y = 3x - 13$$

denkleminden de $y = 2$ elde edilir. O halde sistemin çözümü $(5, 2)$ olur.

2. İkinci denklem -3 ile çarpılıp birinci ve ikinci denklemler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & = & -1 \\ -3x & + & 3y & = & 9 \end{array}$$

buradan da $y = 8$ bulunur. Birinci denklemde $y = 8$ alınırsa

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= -1 \\ 3x - 2 \cdot 8 &= -1 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$3x = 15$$

yani $x = 5$ elde edilir.

3.

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur, doğru cevap C seçeneğidir.

4.

$$\begin{aligned} 3A &= 3\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 9 & 15 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur, doğru cevap A seçeneğidir.

5. Bu denklem sisteminin katsayılarından oluşan matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisidir. Doğru cevap E seçeneğidir.

6. Bu ailedeki erkek çocukların sayısına x kız çocukların sayısına y diyelim. Ahmet hariç erkek ve kız çocukların sayısı aynı olacağından birinci denklemimiz

$$x - 1 = y$$

olur. Öte yandan Ayşe hariç kızlar erkeklerin yarısı kadar olacağından ikinci denklemimiz de

$$y - 1 = \frac{x}{2}$$

olur. Bu denklemleri çözerek, $x = 4$ ve $y = 3$ bulunur.

7. Seminer salonundaki sıraların sayısını S ile, öğrenci sayısını da Ö ile gösterelim. Öğrenciler sıralara 5'er 5'er oturduğunda 7 öğrenci ayakta kaldığı için

$$\text{Ö} = 5S + 7$$

eşitliği geçerlidir. Öte yandan öğrenciler 6'şar 6'şar oturduğunda 3 sıra boş kalıyorsa öğrenciler $S - 3$ sıraya oturuyor demektir. Bu durumda da

$$\text{Ö} = 6(S - 3)$$

denklemi geçerlidir. Bu iki denklemden

$$\begin{aligned} 5S+7 &= 6S-18 \\ 7+18 &= 6S-5S \\ 25 &= S \end{aligned}$$

bulunur. Öğrenci sayısını da

$$\text{Ö} = 5S+7$$

denkleminden

$$\begin{aligned} \text{Ö} &= 5\cdot 25+7 \\ &= 132 \end{aligned}$$

olarak buluruz.

8. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} A\cdot B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 0+2\cdot 0 & 1\cdot 2+2\cdot 1 \\ 1\cdot 0+0\cdot 0 & 1\cdot 2+0\cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} B\cdot A &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0\cdot 1+2\cdot 1 & 0\cdot 2+2\cdot 0 \\ 0\cdot 1+1\cdot 1 & 0\cdot 2+1\cdot 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olduğundan

$$A\cdot B \neq B\cdot A$$

olur.

9.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3\cdot(-1)+0\cdot 0 & 3\cdot 0+0\cdot 7 \\ 0\cdot(-1)+5\cdot 0 & 0\cdot 0+5\cdot 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 35 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 0+(-1)\cdot 1+4\cdot 1 \\ 2\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 1 \\ 3\cdot 0+(-2)\cdot 1+5\cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$