

## Determinant

### 2x2 Tipindeki Matrislerin Determinantı

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ matrisinin determinanti} \quad \det A = |A| = ad - bc$$

ÖRN:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \text{ matrisinin determinantını bulunuz.}$$

$$\det A = (3 \cdot 7) - (4 \cdot 2) = 21 - 8 = 13 //$$

### 3x3 Tipindeki Matrislerin Determinantı

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ matrisinin determinanti:}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

biçiminde tanımlanır.

Bu ifadeyi ezberlemek yerine Sarrus kuralını bilmek daha kolaydır.

### Sarrus Kuralı ile 3x3 Tipindeki Matrislerin Determinantı

→ Matrisin ilk iki satırı matrisin altına tekrar yazılarak asal köşegeneye paralel olan üslülerin çarpımı pozitif diğer köşegeneye paralel olan üslülerin çarpımında negatif alınarak tüm değerler toplanır ve determinant bulunur

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

### ÖRNEK:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(0 \cdot 0 \cdot 2) + (4 \cdot 3 \cdot 3) + (2 \cdot 2 \cdot 1) = 40$$

$$40 - 16 = 24$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

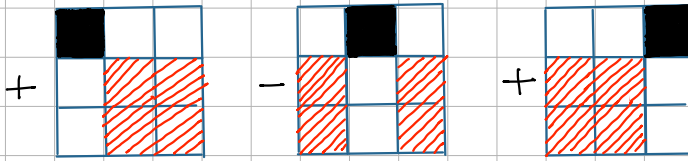
$$(3 \cdot 0 \cdot 2) + (1 \cdot 3 \cdot 0) + (2 \cdot 2 \cdot 4) = 16$$

### NOT:

→ 3x3 tipindeki bir matrisin determinantını hesaplamanın bir diğer yolu da kofaktör yöntemidir.

→ Aşağıda görsel olarak belirteceğimize birinci satırdaki her koyu kare içindeki eleman diğer taraflı karelerde oluşan 2x2 türündeki matrisin determinantı ile çarpılır.

Daha sonra bulunan determinantların birincisi ve sonuncusu toplanıp ikincisi çıkarılır.



### ÖRNEK:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını bulunuz.

$$= +2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2-2) - 2(8-1) + 3(8-1)$$

$$= (-8) - (14) - (-27)$$

$$= 5$$

### ÖRNEK:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını bulunuz.

$$= +3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(4-2) - 4(-4-1) + 3(-4-2)$$

$$= 3(2) - 4(-5) + 3(-6)$$

$$= 6 + 20 - 18 = 8$$

## NOT:

→ Sarrus kuralının sadece  $3 \times 3$  tipindeki matrislerde gerekli olduğunu başka hiçbir kare matrisde bu kuralı uygulayamadığımızı unutmayınız!

Determinantın genel tanımını vermeden önce determinant tanımında kullandığımız Permutasyon ve Permutasyon işareti kavramlarını tanımlayalım

## Permutasyon

→  $A$  kümesi  $n > 1$  elemanlı sonlu bir küme olsun.

$\sigma: A \rightarrow A$  fonksiyonu 1-1 ve örten ise  $\sigma$  fonksiyonuna bir Permutasyon denir.

→  $A$  kümesinden kendisine  $n!$  tane permutasyon tanımlanabilir.

→ Bir Permutasyon

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$  şeklinde veya kısaca  $\sigma(1) \sigma(2) \sigma(3) \dots \sigma(n)$  şeklinde gösterilir.

Ayrıca  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  kümesinde tanımlanan tüm permutasyonların kümesi  $S_n$  ile gösterilir.

→ Örneğin:

$A = \{1, 2, 3\}$  kümesini göz önüne alalım.

Bu kümede  $3!$  permutasyon tanımlanabilir.

$$\sigma_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 123$$

$$\sigma_4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 231$$

$$\sigma_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 132$$

$$\sigma_5 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 312$$

$$\sigma_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 213$$

$$\sigma_6 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 321$$

şekindedir.

Bu permutasyona göre örneğin  $\sigma(2)$  permutasyon fonksiyonu için

$$\sigma(1) = 1 \quad \sigma(2) = 3 \quad \sigma(3) = 2 \quad \text{olur.}$$

## Permütasyon İşareti $\epsilon(\sigma)$ , Tek-Çift Permütasyon

→ Herhangi bir  $\{1, 2, \dots, n\}$  kümesindeki birim permütasyon olarak isimlendirilen  $1, 2, 3, \dots, n$  permütasyonuna çift permütasyon diyebiliriz. Bu permütasyonda elemanların yerini değiştirerek yeni permütasyonlar elde edebiliriz.

→  $1, 2, 3, \dots, n$  permütasyonda  $k$  defa iki elemanın yeri değiştirilirse ve  $k$  tek ise elde edilen yeni permütasyona tek,  $k$  çift ise elde edilen yeni permütasyon çift permütasyon denir.

→ Bir permütasyon çift veya tek olduğunu anlamak için, permütasyonda her defasında iki elemanın yeri değiştirilerek birim permütasyon elde edilmeye çalışılır.

Tek sayıda adımda bunu yapabilirsek permütasyon tek, aksi halde çifttir.

$\epsilon(\sigma)$  ile permütasyonun işareti gösterilir.  $\sigma$  bir çift permütasyon ise  $\epsilon(\sigma) = +1$ , aksi halde  $\sigma$  bir tek permütasyon ise  $\epsilon(\sigma) = -1$  şeklinde ifade edilir.

### ÖRN:

$$\sigma = 23514$$

$$23514 \xrightarrow{1.\text{adım}} 13524 \xrightarrow{2.\text{adım}} 12534 \xrightarrow{3.\text{adım}} 12354 \xrightarrow{4.\text{adım}} 12345$$

4 adımda birim permütasyona ulaştığımız için bu permütasyon çifttir.  $\epsilon(\sigma) = +1$

### ÖRN:

$$\sigma = 6271543 \text{ permütasyon işaretini bulunuz.}$$

$$6271543 \xrightarrow{①} 1276543 \xrightarrow{②} 1236547 \xrightarrow{③} 1234567$$

tek permütasyon  $\epsilon(\sigma) = -1$

### ÖRN:

$$\sigma_1 = 32451$$

$$\sigma_2 = 324165$$

$$\sigma_3 = 3426517$$

$$\sigma_1 \Rightarrow 32451 \xrightarrow{①} 12453 \xrightarrow{②} 12354 \xrightarrow{③} 12345 \quad \text{Tek Permütasyon} \quad \epsilon(\sigma_1) = -1$$

$$\sigma_2 \Rightarrow 324165 \xrightarrow{①} 124365 \xrightarrow{②} 123465 \xrightarrow{③} 123456 \quad \text{Tek Permütasyon} \quad \epsilon(\sigma_2) = -1$$

$$\sigma_3 \Rightarrow 3426517 \xrightarrow{①} 1426537 \xrightarrow{②} 1246537 \xrightarrow{③} 1236547 \xrightarrow{④} 1234567 \quad \text{Çift Permütasyon} \quad \epsilon(\sigma_3) = +1$$

## Determinant:

→  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  matrisinin determinanti  $\det A$  veya  $|A|$  ile gösterilir.  $\sigma \in S_n$  bir permütasyon ve  $\epsilon(\sigma)$ ,  $\sigma$  permütasyonunun işaretini göstermek üzere;

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)} \cdot a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(n)} \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

## NOT:

$n \times n$  tipinde bir matris verilsin;

→ Matrisin her satırından ve sütunundan sadece bir eleman olarak  $n$  tane elemanı alalım sonra aldığımız bu  $n$  elemanı birbiriyle çarpalım.

→ Bu şekilde mümkün tüm çarpımları hesaplayalım. Tüm çarpımların sayısı  $n!$  in ikinci satırdan ilk satırdaki elemanın bulunduğu sütundan eleman seçemeyeceğimize için  $n-1$  eleman seçilebilir. Bu şekilde her defasında seçebileceğimiz eleman sayısı 1 azaldığından istenen şekilde  $n!$  eleman seçilebilir. Yani  $n!$  tane çarpım elde edilir.

→ Herhangi bir çarpımda ilk satırdan itibaren her elemanın bulunduğu sütunun sırasıyla yazarak bir permütasyon elde edilir. Bunun işaretine göre seçilen  $n$  sayının çarpımını bu işaretle çarpılır.

→ Elde edilen tüm çarpımları işaretleriyle birlikte hesapladıktan sonra bunları toplayarak determinant değerini buluruz.

## ÖRN:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  matrisinin determinantı tanımdan yararlanarak bulunur

$$S_2 = \{1, 2\}$$

$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 = 12 \\ \sigma_2 = 21 \end{array} \right\} \text{ permütasyonları vardır}$

$$\epsilon(\sigma_1) = +1$$

$$\epsilon(\sigma_2) = -1$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_2} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)} \cdot a_{\sigma(2)}$$

$$= \epsilon(12) \cdot a_{11} \cdot a_{22} + \epsilon(21) \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

ÖRNEK:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını hesaplayınız.

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$$

$$G_1 = 213$$

$$\varepsilon(G_1) = -1$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$$

$$G_2 = 231$$

$$\varepsilon(G_2) = +1$$

$$\begin{aligned} \det A &= \varepsilon(G_1) \cdot 42 + \varepsilon(G_2) \cdot 120 \\ &= (-1) \cdot 42 + (1) \cdot 120 \\ &= (-42) + 120 \\ &= 78 \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını hesaplayınız.

$$G = 3124$$

$$\varepsilon(G) = +1$$

$$\det A = \varepsilon(G) \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5$$

$$= (+1) \cdot 180 = 180$$

ÖRNEK:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını hesaplayınız.

$$G = 21354$$

$$\varepsilon(G) = +1$$

$$\det A = \varepsilon(G) \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$$

$$= (+1) \cdot 96 = 96$$

ÖRN:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisin determinantını hesaplayınız.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = (-12) + (-8) = -20$$

$$G_1 = 13542$$

$$\varepsilon(G_1) = +1$$

$$1 \cdot (-1) \cdot (2) \cdot 1 \cdot 2 = -8$$

$$\varepsilon(G_1) \cdot (-8) = -8$$

$$G_2 = 15342$$

$$\varepsilon(G_2) = -1$$

$$1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot 1 \cdot 2 = 12$$

$$\varepsilon(G_2) \cdot 12 = -12$$

ÖDEV:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisin determinantını hesaplayınız.

(Cevap : 30)

ÖDEV:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını hesaplayınız.

(Cevap : 72)

## Determinantın Özellikleri:

### Teorem:

→ A,  $n \times n$  tipinde bir kare matris olsun. A matrisinin herhangi iki satırı veya sütunu yer değiştirildiğinde elde edilen matris B ise;

$$\det B = -\det A \text{ eşitliğini sağlar.}$$

### ÖRN:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 100 & 101 & 102 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 100 & 101 & 102 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 100 & 101 & 102 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

### Teorem:

→ A,  $n \times n$  tipinde bir kare matris olsun. A matrisinin herhangi bir satırındaki tüm elemanlar bir satırındaki tüm elemanlar bir  $\lambda$  sayısı ile çarpıldığında elde edilen matris B ise;

$$B = \lambda \det A \text{ olur.}$$

Bu özelliğin sonucu olarak

$$A = (a_{ij})_{n \times n} \text{ olmak üzere}$$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det A$$

### ÖRN:

$$A = (a_{ij})_{5 \times 5} \text{ matrisinin determinanı 3 ise } \det(2A) = ?$$

$$\det(2A) = 2^5 \cdot 3 = 96$$

### ÖRN:

$\det(A) = 5$  olan  $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$  matrisi önce 2 ile çarpılır sonra 3. satır 4'e bölünür. Elde edilen son matrisinin determinanı kaçtır?

$$\frac{2^4 \cdot 5}{4} = 20 //$$

1. aşama  
2. aşama

### Teorem:

→ Bir kare matrisinin herhangi iki satırı veya sütunu aynı ya da orantılı ise determinanı sıfırdır.

### ÖRN:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{3. satır 2. satırın iki katı olduğu için } \det(A) = 0 \text{ 'dır.}$$

ÖRN:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 8 & 8 \end{bmatrix} \quad \det A = 0 \rightarrow$$

Teorem:

→ Bir kare matrisin herhangi bir satır veya sütununun tüm elemanları 0 ise determinantı sıfırdır.

Teorem:

→ Bir A matrisinin r'inci her eleman k tane teriminin toplamı şeklindeyse  $\det A$ , k tane determinant toplamına eşittir.

Teorem:

→ Bir A tane kare matrisinin herhangi bir satırı veya sütunu  $\lambda$  gibi bir sayı ile çarpılıp başka bir satırına veya sütununa eklendiğinde elde edilen matris B ise;  
 $\det B = \lambda \det A$  'dır.

Teorem:

→ Bir matrisin herhangi bir satırı, diğer satırlar cinsinden yazılabiliyorsa yani bir satır diğer satırlara bağımlı ise bu matrisin determinantı sıfırdır.

ÖRN:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 101 & 102 & 103 & 104 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{determinantın } 100 \text{ e bölünebilirliğini gösteriniz.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 100 & 100 & 100 & 100 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} = 100 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_0 \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\det A} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\det B}$

## Sonuçlar:

→ Bir kare matrisin yapılan elementer operasyonlar determinanını aşağıdaki gibi etkiler:

- 1) İki satırın yer değiştirmesi determinanını etkiler ve işaret değiştirir.
- 2) Bir satırın bir  $\lambda$  reel sayısı ile çarpılması determinanını etkiler ve yeni matrisin determinanını eski matrisinin determinanının  $\lambda$  katı olur.
- 3) Bir satırın bir  $\lambda$  katının başka bir satıra ilave edilmesi determinanını değiştirmez.

## ÖRN:

$$\begin{bmatrix} b & a & b & a \\ a & b & a & b \\ d & a & y & 1 \\ n & n & n & n \end{bmatrix} \text{ matrisinin determinanını kaçtır?}$$

$$\begin{array}{l} S_1 + S_2 \rightarrow S_2 \\ \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} b & a & b & a \\ a+b & a+b & a+b & a+b \\ d & a & y & 1 \\ n & n & n & n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Bu satırlar birbirine bağı olduğu ve birbiri cinsinden yazılabildiğinden} \\ \text{teorem gereğince determinan sıfırdır.} \\ \leftarrow \Delta = 0 \end{array}$$

→ Bu işlem matrisin determinanını değiştirmedir.

## ÖRN:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix} \text{ matrisinin determinanını kaçtır?}$$

$$\begin{array}{l} S_2 + S_1 \rightarrow S_1 \\ S_4 + S_3 \rightarrow S_3 \\ \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 25 & 25 & 25 & 25 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Bağıntılı satırlar.} \\ \Delta = 0 \text{ 'dır.} \end{array}$$

## ÖRN:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix} \begin{array}{l} K_1 - K_2 \rightarrow K_1 \\ K_3 - K_4 \rightarrow K_3 \\ \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & 1 & 5 \\ -1 & 10 & -1 & 12 \\ 1 & 15 & 1 & 13 \end{bmatrix}$$

Bağıntılı sütunlar  $\Delta = 0$  'dır.

## ÖDEV:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisin determinantını bulunuz.} \\ \text{(Cevap: 3)}$$

## Determinantın Kofaktörler Yardımıyla Hesaplanması (Laplace Açılımları)

### Minör ve Kofaktör Kavramları:

→  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  matrisinin  $a_{rs}$  elemanının bulunduğu satır ve sütunun silinmesiyle elde edilen  $(n-1) \times (n-1)$  türünden matrisin determinantına  $a_{rs}$  elemanının minörü denir ve  $M_{rs}$  ile gösterilir.

→  $A_{rs} = (-1)^{r+s} \cdot M_{rs}$  ile tanımlanan  $A_{rs}$  ifadesine de  $a_{rs}$  elemanının kofaktörü denir.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \text{ matrisinin } A_{23}, A_{31} \text{ ve } A_{33} \text{ kofaktörlerini bulunuz.}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (5-0) = -5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (+1) \cdot (6-24) = -18$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (+1) \cdot (4+4) = 8$$

## ÖRN:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{matrisinin kofaktörlerini bulunuz?}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (+1) \cdot (-3-0) = -3_{//}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2-0) = 2_{//}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (0-0) = 0_{//}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (+1) \cdot (-2-0) = -2_{//}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (+1) \cdot (0-0) = 0_{//}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (0-0) = 0_{//}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (+1) \cdot (0-0) = 0_{//}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (0-0) = 0_{//}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (+1) \cdot (6-0) = 6_{//}$$

## Teorem:

→ Alt üçgensel ya da üst üçgensel bir matrisin determinanı, köşegen üzerindeki elemanların çarpımına eşittir.

## Teorem:

→ Bir A kare matrisinin transpozesinin determinanı, A matrisinin determinantına eşittir.

$$\text{Yani } \det(A) = \det(A^T)$$

## Teorem:

→  $n \times n$  tipinden bir A matrisine bir elementer satır operasyonu uygulayarak B matrisi elde edilsin. A matrisine uygulanan elementer satır operasyonuna karşılık gelen matris E olsun.

$$\text{Buna göre } \det(B) = \det(E) \cdot \det(A) \text{ 'dır.}$$

## Teorem:

→ A ve B  $n \times n$  tipinden iki kare matris ise;

$$\det(A \times B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

ÖRNEK:

$\det A \neq 0$  olmak üzere:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{ olduğunu kanıtlayınız.}$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I)$$

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \text{ olur.}$$

ÖRNEK:

$\det A \neq 0$  olmak üzere:

$\det(A^n) = (\det A)^n$  olduğunu kanıtlayınız.

$$\det(A^n) = \det(\underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{n \text{ tane}})$$

$$= \underbrace{\det(A) \cdot \det(A) \cdots \det(A)}_{n \text{ tane}}$$

$$= \det(A)^n$$

ÖRNEK:

A, B ve C matrisleri  $5 \times 5$  türünden matrisler olmak üzere:

$$\det(A) = 5$$

$$\det(B) = -12$$

$$\det(C) = 3 \text{ olduğuna göre:}$$

$2A B^{-2} C^3$  matrisinin determinanı kaçtır?

$$\hookrightarrow \det(2A B^{-2} C^3) = \det(2A) \cdot \det(B^{-2}) \cdot \det(C^3)$$

$$= 2^5 \det(A) \cdot \frac{1}{\det(B)^2} \cdot \det(C^3)$$

$$= 2^5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{(-12)^2} \cdot (3)^3 = 30 \neq$$

## Ek Matris

### Bir Matrisin Ek Matrisi (Adjoint Matris)

→  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  matrisi verilsin.

$A_{ij}$ ,  $a_{ij}$  matrisinin kofaktörü olmak üzere  $[A_{ij}]^T$  matrisine yani, kofaktörün oluşturduğu matrisin transpozesine,  $A$  matrisinin eki, ek matris veya adjoint matris denir.

→ Ek  $A$  veya  $Adj A$  ile gösterilir.

### Teorem:

→  $\det A \neq 0$  ise  $A^{-1}$  vardır ve  $A^{-1} = \frac{Ek A}{\det A}$  ile bulunur.

### ÖRNEK

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{matrisin tersini ekini hesaplayarak bulunuz.}$$

$\det A = -2$  'dir.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$Ek A = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 6 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Ek A}{\det A} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 6 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

## ÖDEV 8

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

matrisinin ek matrisini ve ek matrisiyle tersini bulunuz.

## Lineer Denklem Sistemleri ve Determinant

### Teorem:

→  $n$  bilinmeyenli  $n$  denklemden oluşan  $AX=B$  biçimindeki lineer denklem sisteminin çözümü varsa, sonsuz çözümünün olması için gerek ve yeter koşul  $\det A=0$  olmasıdır.

### Teorem:

→  $n$  bilinmeyenli  $n$  denklemden oluşan  $AX=0$  biçimindeki bir homojen lineer denklem sisteminin sonsuz çözümü olması için gerek ve yeter koşul  $\det A=0$  olmasıdır.

### ÖRN:

$$\left. \begin{array}{l} x-2y+2z = 0 \\ x+y-z = 0 \\ x-3y+kz = 0 \end{array} \right\} \text{denklem sisteminin sonsuz çözümü olduğuna göre } k=?$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & k \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & k \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 1(k-3) - (-2)(k+1) + 2(-3-1)$$

$$\Rightarrow 3k = 9$$

$$\Rightarrow \boxed{k=3}$$

### ÖRN:

$$\left. \begin{array}{l} x-y+2z = 1 \\ x+2y-z = 1 \\ 2x-y+kz = 3 \end{array} \right\} \text{denklem sisteminin sonsuz çözümü olduğuna göre } k=?$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & k \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & k \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & k \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot (2k-1) - (-1) \cdot (k+2) + 2 \cdot (-1-4)$$

$$\Rightarrow 3k = 9$$

$$\Rightarrow \boxed{k=3}$$

## Cramer Kuralı

### Teorem:

→  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bilinmeyen,  $n$  lineer denklem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

olarak veriliyor. Bu sistemde  $AX=B$  formundan yazabiliriz.

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$  bir karesel matristir. Eğer  $A = \det [a_{ij}] \neq 0$ , bu sistemin tek çözümü vardır.

Ayrıca  $A_k$ ,  $[a_{ij}]_{n \times n}$  matrisinin  $k$ -ıncı kolonunun  $[b_i]$  sütunuyla değiştirilmesiyle elde edilen matrisin determinantını göstermek üzere;

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} \quad (k=1, \dots, n) \text{ eşitliği sağlanır.}$$

### ÖRNEK

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{array} \right\} \text{ lineer denklem sistemini cramer yöntemiyle çözümlü.}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{-2} = -2 \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$$

### ÖRNEK

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = -4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15 \end{array} \right\} \text{ lineer denklem sistemini cramer yöntemi ile çözümlü.}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 2(10 - 3) - (-1)(2 + 5) + 1(-3 - 25) = -7$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 15 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 15 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 15 & -3 \end{vmatrix} = 6(10 - 3) + 1(-8 + 15) + (12 - 75) = -14$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 5 & 15 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 15 & 2 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = 2(-8+15) - 6(2+5) + 1(15+20) = 7$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7}{-7} = -1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -4 \\ 5 & -3 & 15 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 15 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 2(75-12) + 1(15+20) + 6(-3-25) = -7$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$$

#### ÖRNEKLER:

①  $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$  denklemler sistemini Cramer kuralını kullanarak çözünüz.  
 (Cevap:  $x = \frac{6}{5}$ ,  $y = -1$ ,  $z = \frac{2}{5}$ )

②  $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + kz = m \end{cases}$  denklemler sistemi veriliyor.

a) Sistemin sonsuz çözümü olması için  $k$  ve  $m$  ne olmalıdır?

b) Sistemin çözümü yoksa  $k$  ve  $m$  ne olmalıdır?

c)  $k = 1$  ve  $m = 2$  için sistemin çözümünü bulunuz.

③  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  olmak üzere:  $\det(I + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{100})$  determinanını kaçtır?

④  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$  matrisin tersini ek matris yöntemiyle bulunuz.

5

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre  $A^{-1}$  matrisini ek matris yöntemiyle bulunuz.

6

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere  $A^{-1}$  matrisini ek matris yöntemiyle bulunuz.

7

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \text{ ve } \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$$

matrislerin determinantını permutasyon tanımından yararlanarak bulunuz.

8

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

matrisin determinantını permutasyon tanımından yararlanarak bulunuz.