Elektromagnetik Alan Teorisi Ders Notu

Prof. Dr. Filiz BİRBİR ÜNAL
Dr. Oğuzhan DEMİRYÜREK

20 Mart 2025

İçindekiler

KAYNAKLAR

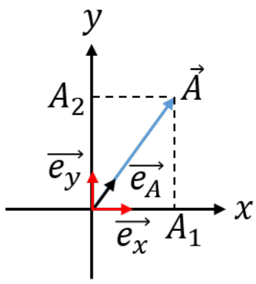
1. Elektromagnetik Alan Teorisinin Temelleri, Mithat İdemen, İTÜ Vakfı
2. Elektromagnetik Alan Teorisi Çözümlü Problemleri I-II, Gökhan Uzgören, Alinur Büyükaksoy, Ali Alkumru, İTÜ Vakfı
3. https://www.turcademy.com/tr . Bu sitede bir çok alandan akademik kitapların Türkçe orijinal baskılarına çevrimiçi erişilebilmektedir. Ücretsiz olarak yararlanabilmek için üye olup üniversitemizin internet ağına bağlanmalısınız veya kampüs dışından erişim sağlamak için https://duzce.edu.tr/idari/kutuphane/84a7/vetsveritabani-erisim-ve-statistik-sistemi sayfasından gerekli bilgisayar ayarlarını yapmalısınız.

1 VEKTÖR ANALİZ

1.1 Kartezyen Koordinat Sistemi

Tanım (Skaler büyüklük)**.** Bir sayı ile ifade edilebilir. Örnek olarak, bir cismin kütlesi, uzunluk, hacim gibi büyüklüklere bir sayı karşı gelir. Bu türden büyüklükler, skaler büyüklüklerdir.

Tanım (Vektörel büyüklük)**.** Bir fiziksel kavramın büyüklüğü ile beraber yönü de söz konusu ise bu büyüklüğü bir vektör ile gösteririz. Örnek: hız, kuvvet, ...



Bir vektörel büyüklüğü kartezyen koordinatlarda şu şekilde gösterebiliriz.

$$\vec{A} = A_1\vec{e_x} + A_2\vec{e_y}$$

Burada $\vec{e_x}$ ve $\vec{e_y}$, x ve y eksenleri boyunca birim vektördür.

Tanım (Birim Vektör)**.** Uzunluğu 1 (bir) olan vektördür.

$\vec{A}$ vektörü doğrultusunda birim vektör de yazılabilir,

$$\vec{e_A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

burada $|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ olup, $\vec{A}$ vektörünün uzunluğudur.

Örnek 1. $\vec{A} = 4\vec{e_x} + 3\vec{e_y}$ alalım.

$$\begin{aligned} |\vec{A}| &= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \\ \vec{e_A} &= \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{4\vec{e_x} + 3\vec{e_y}}{5} \\ \vec{e_A} &= \frac{4}{5}\vec{e_x} + \frac{3}{5}\vec{e_y} \end{aligned}$$

Bir vektör en genel halde 3-boyutlu uzayda da yazılabilir.

$$\vec{A} = A_1\vec{e_x} + A_2\vec{e_y} + A_3\vec{e_z}$$

$\vec{A}$ vektörü doğrultusunda birim vektör,

$$\vec{e_A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}, \qquad |\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_2^3}$$

Diferansiyel Elemanlar

- Uzunluk elemanı:

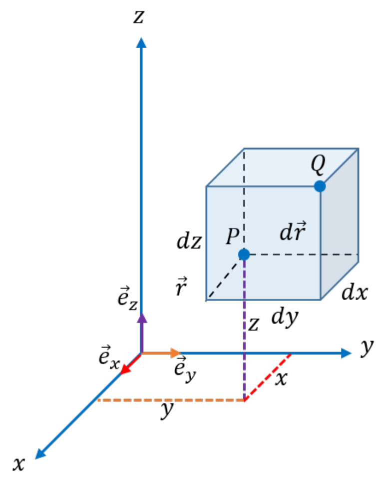
$$d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

- Yüzey elemanı:

$$\begin{aligned} d\vec{s}_x &= dydz\vec{e}_x \\ d\vec{s}_y &= dxdz\vec{e}_y \\ d\vec{s}_z &= dxdy\vec{e}_z \end{aligned}$$

- Hacim elemanı:

$$dv = dxdydz$$



1.2 Gradyant, Diverjans, Rotasyonel, Laplasyen Kavramları

Bu ders boyunca kullanacağımız pek çok vektörel işlemler olacaktır. Bu işlemlerde kullanacağımız operatörü öncelikle tanıyalım. **Nabla** (∇) operatörü olarak adlandırılan bu operatör vektörel bir işlem gösterir.

$$\nabla = \vec{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z}$$

Bu operatör skaler bir fonksiyona uygulandığında

$$\text{grad}\, f = \vec{e_x}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial f}{\partial z}$$

olarak yazılan bu ifade **f fonksiyonunun gradyantı** adını alır. f skaler bir fonksiyon iken, ∇f vektör olur.

Bu vektör değerli ∇, türev operatörünü değişik şekillerde vektörlere uygulamak da mümkündür. Bu durumda:

$$\begin{aligned} \text{div}\, \vec{A} &= \left[\vec{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot [A_1\vec{e_x} + A_2\vec{e_y} + A_3\vec{e_z}] \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \end{aligned}$$

Burada $(\cdot)$ ile gösterilen işlem iki vektör arasında skaler çarpımdır. Görüldüğü gibi ∇ operatörü bir $\vec{A}$ vektörüne skaler çarpım olarak uygularsak, sonuç bir skaler olur ve bu işleme **bir vektörün diverjansı** denir.

Eğer ∇ operatörünü bir vektöre, vektörel çarpım olarak uygularsak, bu işleme de **bir vektörün rotasyoneli** denir.

$$\text{rot}\, \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

Bu gösterilen işlemler öyledir ki: $f(x, y, z)$ ve $\vec{A}(x, y, z)$ ikinci mertebeye kadar sürekli türevleri varsa, her zaman;

$$\text{rot}\,\text{grad}\, f \equiv 0 \quad \text{ve} \quad \text{div}\,\text{rot}\, \vec{A} \equiv 0$$

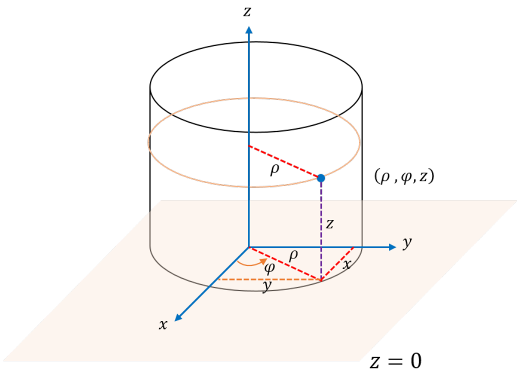
Tersine şu da söylenebilir: Bir bölgede $\text{rot}\, \vec{F} \equiv 0$, $\text{div}\, \vec{B} \equiv 0$ ise öyle $f(x, y, z)$ ve $\vec{A}(x, y, z)$ fonksiyonu bulunabilir ki,

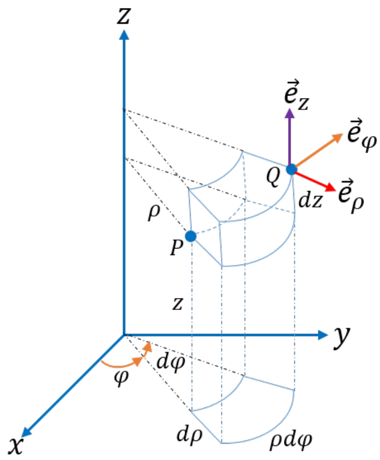
$$\vec{F} \equiv \text{grad}\, f \quad \text{ve} \quad \vec{B} \equiv \text{rot}\, \vec{A}$$

Son olarak Δ Laplasyen operatörü

$$\Delta f = \text{div}\,\text{grad}\, f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

olarak tanımlanır.





1.3 Silindirik Koordinat Sistemi

Silindirik koordinat sistemi ortogonal bir sistemdir, yani uzaydaki herhangi bir nokta ifade etmek için kullandığımız üç değişken (ρ, φ, z) birbirine dik kalacak şekilde artış gösterir. Üç boyutlu uzayda herhangi bir nokta kartezyen koordinatlarda (x, y, z) ile gösterilirken silindirik koordinat sistemindeki değişkenler (ρ, φ, z) ile de gösterilebilir.

Bu sistemde;

ρ uzaydaki noktanın z-eksenine uzaklığı

φ bu noktanın Oxy düzlemine izdüşümünün x-ekseni ile yaptığı açı

z kartezyen koordinatlardaki z, yani noktanın z-eksenini izdüşümüdür

Bu koordinat sisteminde (ρ, φ, z) artış yönündeki birim vektörler ise $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$ olarak adlandırılır. Silindirik koordinat sistemi ve kartezyen koordinat sistemi arasındaki ilişki ile yüzey ve hacim integrali için ifade etmemiz gereken ds yüzey elemanı ve dv hacim elemanı şu şekildedir.

- Koordinat Dönüşümü:

$$x = \rho\cos\varphi \quad y = \rho\sin\varphi \quad z = z$$

- Birim vektörler:

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y \qquad \frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\varphi} = \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y \qquad \frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\vec{e}_\rho$$

$$\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\varphi}{E_\varphi} = \frac{dz}{E_z}$$

- Uzunluk elemanı:

$$d\vec{r} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z$$

- Yüzey elemanı:

$$d\vec{s}_\rho = \rho d\varphi dz\vec{e}_\rho$$
$$d\vec{s}_\varphi = d\rho dz\vec{e}_\varphi$$
$$d\vec{s}_z = \rho d\rho d\phi\vec{e}_z$$

- Hacim elemanı:

$$dv = \rho d\rho\, d\varphi\, dz$$

- Gradyan:

$$\mathrm{grad}\, f(\rho,\varphi,z) = \frac{\partial f}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

- Diverjans:

$$\operatorname{div} \vec{A}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Rotasyonel:

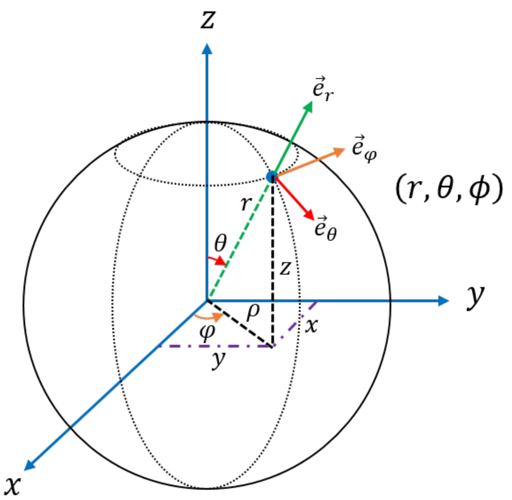
$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

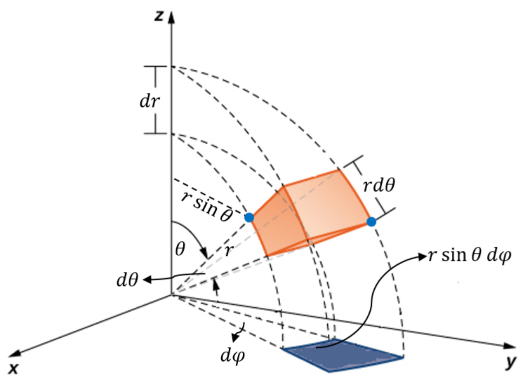
- Laplasyen:

$$\Delta f(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

1.4 Küresel Koordinat Sistemi

Küresel koordinat sistemi de ortogonal bir sistemdir. Uzaydaki herhangi bir nokta $(r, \theta, \varphi,)$ değişkenleri ile gösterilir. Bu noktayı yarıçapı r olan bir küre yüzeyi üzerinde düşünerek, noktanın orijine göre konumu ifade edilebilir.





r	noktanın orijine olan uzaklığı (kürenin yarıçapı gibi)
θ	yarıçap doğrusunun z-ekseni ile yaptığı açı
φ	bu noktanın Oxy düzlemine izdüşümünün x-ekseni ile yaptığı açı

$(r, \theta, \varphi,)$'nin artış yönündeki birim vektörler $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ ile gösterilir. Küresel koordinat sistemi ile kartezyen koordinat sistemi arasındaki ilişki, yüzey ve hacim integralleri alırken yazmamız gereken ds yüzey elemanı ve dv hacim elemanı şu şekildedir.

- Koordinat Dönüşümü:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad z = r\cos\theta$$

- Birim vektörler:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\vec{e}_r \\ \vec{e}_r &= \sin\theta\vec{e}_\rho + \cos\theta\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta &= \cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{e}_z \\ \vec{e}_r &= \sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta &= \cos\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta\, d\varphi}{E_\varphi}$$

- Uzunluk elemanı:

$$d\vec{r} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$$

- Yüzey elemanı:

$$
\begin{aligned}
d\vec{s}_r &= r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \, \vec{e}_r \\
d\vec{s}_\theta &= r \sin\theta dr d\varphi \, \vec{e}_\theta \\
d\vec{s}_\varphi &= r dr d\theta \, \vec{e}_\varphi
\end{aligned}
$$

- Hacim elemanı:

$$dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

- Gradyan:

$$\operatorname{grad} f(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

- Diverjans:

$$\operatorname{div} \vec{A}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

- Rotasyonel:

$$\operatorname{rot} \vec{A}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta\vec{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

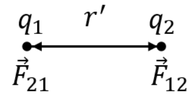
- Laplasyen:

$$\Delta f(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

2 ELEKTROSTATİK

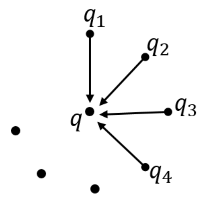
2.1 Boşlukta Elektrostatik Olay

Coulomb Yasası (1785) : Elektrik yükleri q_1 ve q_2 olan ve boşlukta karşı karşıya duran iki maddesel noktanın arasındaki uzaklık r' olsun. Bunlar birbirine Newton kuvvetine ek olarak, $\dfrac{q_1 q_2}{r'^2}$ ile orantılı bir itme kuvveti uygularlar. İkiden fazla yükün varlığı halinde süperpozisyon geçerlidir.



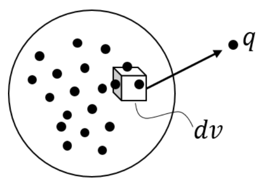
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r'^2}\vec{e}_{12} \tag{2.1}$$

Burada ϵ_0 boşluğun dielektrik sabitidir ve $\epsilon_0 = \dfrac{10^{-9}}{36\pi}\left[\dfrac{F}{m}\right]$.



İkiden fazla yük varsa q yüküne etki eden kuvvet,

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\vec{e}_i\,. \tag{2.2}$$



Eğer elektrik yükü taşıyan maddesel noktalar bir v hacmini çok yoğun bir şekilde dolduruyorsa,

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_v \rho\frac{\vec{r}'}{r'^3}dv \quad \text{olur.} \tag{2.3}$$

Burada ρdv, dv hacim elemanı içindeki yük miktarı, dolayısıyla ρ **yük yoğunluğu** olarak adlandırılır.

2.2 Elektrostatik Alan ve Elektrostatik Potansiyel

Bir q yüküne etki eden kuvvet, $\vec{F}$,

$$\vec{F} = q\vec{E}, \tag{2.4a}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\vec{r}'}{r'^3}d\xi d\eta d\zeta \tag{2.4b}$$

Burada $\vec{E}$ elektrostatik alanı göstermektedir[1]. Vektör analiz bilgilerimiz ile

$$\text{grad}\left(-\frac{1}{r'}\right) = \frac{\vec{r}'}{r'^3} \tag{2.5}$$

yazılır. Öyleyse, $\vec{E}$ elektrik alan

$$\vec{E}(x,y,z) = -\text{grad}\left\{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r'}d\xi d\eta d\zeta\right\} \tag{2.6}$$

[1] ξ: ksi, η: eta, ζ: zeta

şeklinde düzenlenebilir. Parantez içindeki ifade skaler bir büyüklüktür ve Coulomb potansiyeli ya da **elektrostatik potansiyel** adını alır,

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r'}d\xi\, d\eta\, d\zeta + V_0 \tag{2.7}$$

(V_0 : sabit) yani elektrik alan için

$$\vec{E}(x,y,z) = -\mathrm{grad}\, V \tag{2.8}$$

yazılabilir. Bu son ifade şunu ifade eder: Boş uzayda serbest halde bulunan elektrik yükleri her zaman skaler bir büyüklük olan potansiyel (V) fonksiyonunu, bunun gradyantı ise elektrik alanı ($\vec{E}$) meydana getirir.

Şimdi Coulomb yasasını bir q yükünün bir Q yüküne etki ettirdiği kuvvet için tekrar yazalım.

$$\vec{F} = Q\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\,\vec{r} \tag{2.9}$$

$\vec{F} = Q\vec{E}$ olduğundan

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\,\vec{r} \tag{2.10}$$

bir q yükünün meydana getirdiği elektrik alan olur. grad $\left(-\frac{1}{r}\right) = \frac{\vec{r}}{r^3}$ olduğundan ve denklem (2.8) kullanılarak

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{2.11}$$

bir noktasal q yükünün meydana getirdiği elektrostatik potansiyel olur.

$\vec{E} = -\mathrm{grad}\, V$ olduğundan, vektör analizden de $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f \equiv 0$ bilindiğinden

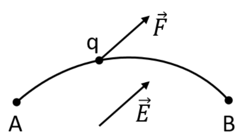
$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \tag{2.12}$$

elde edilir. Ayrıca $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) \equiv 0$ (eğer $r \neq 0$ ise) olduğundan

$$\Delta V = 0\ . \tag{2.13}$$

Bu son iki ifadeden denklem (2.12) ve (2.13)'den şunu anlarız: Serbest halde boş uzayda bulunan elektrik yüklerinin oluşturduğu potansiyelin laplasyeni her zaman sıfırdır ve elektrik alanın rotasyoneli de her zaman sıfırdır. Öyleyse uzayda belirli şekilde dağılmış yüklere ilişkin önce potansiyeli bulmak daha kolaydır. $\Delta V = 0$ çözülür. Ardından $\vec{E} = -\mathrm{grad}\, V$ ile elektrik alan hesaplanabilir. **Bu problem, üç değişik örnek ile incelencektir.**

Bu noktada şu olayı incelemek faydalı olacaktır. Bir q yükünü bir $\vec{E}$ alanı içinde A'dan B'ye hareket ettirmek için yapılan işi hesaplayalım.



C eğrisi boyunca yapılan iş q'ya etki eden $\vec{F}$ kuvvetine karşı olacaktır:

$$\begin{aligned} W &= -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{c} \\ &= -q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{c} = q\int_A^B \mathrm{grad}\, V\cdot d\vec{c} \end{aligned} \tag{2.14}$$

grad V 'yi en genel halde C eğrisine teğet bir bileşen ve bu eğriye dik düzlemde bir bileşen şeklinde yazabiliriz.

$$\mathrm{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial c}\vec{t} + \frac{\partial V}{\partial n}\vec{n} \tag{2.15}$$

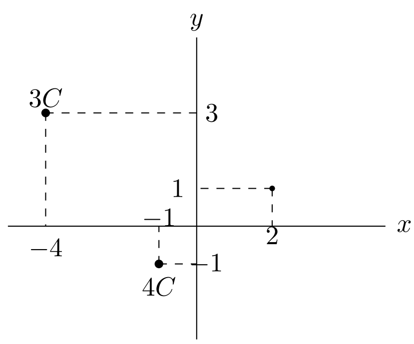
$d\vec{c} = dc\,\vec{t}$ olduğundan

$$\mathrm{grad}\, V\cdot d\vec{c} = \frac{\partial V}{\partial c}dc \tag{2.16}$$

olur. Öyleyse iş,

$$W = q\int_A^B \frac{\partial V}{\partial c}dc = q[V(B) - V(A)] \tag{2.17}$$

olur. Bu sonuç şöyle yorumlanabilir: Bir elektrik alan içine yerleştirilmiş yükü hareket ettirmek için yapılacak iş, yükün izleyeceği yoldan bağımsızdır. İş, sadece A ve B noktalarındaki potansiyel değeri ile bellidir. $V(B) > V(A)$ ise yani yükü, potansiyeli daha yüksek bir noktaya çıkarmak için iş yapmak gerekir. Ama $V(B) < V(A)$ ise yani yük, potansiyeli daha küçük bir noktaya götürüldüğü zaman dış ortama enerji verilir.



Örnek 2. $3C$'luk elektrik yükü şekilde gösterilen konumda bulunmaktadır.

1. $3C$'luk yükün uzayda oluşturduğu potansiyel ve elektrik alan nedir?

$$V = \frac{3}{4\pi\epsilon_0 r}$$
$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\, V = \frac{3}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r$$

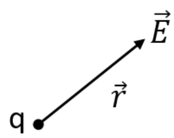
2. $4C$'luk yükü sonsuzdan $B(-1,-1)$ noktasına getirmek için yapılan iş nedir?

$$W = q[V(B) - V(A)] = 4\left[\frac{3}{4\pi\epsilon_0(5)} - 0\right] = \frac{3}{5\pi\epsilon_0}\, j$$

3. $4C$'luk yükü $B(-1,-1)$ noktasından $C(2,1)$ noktasına getirmek için yapılan iş nedir?

$$W = q[V(C) - V(B)] = 4\left[\frac{3}{4\pi\epsilon_0 2\sqrt{10}} - \frac{3}{4\pi\epsilon_0(10)}\right] j$$

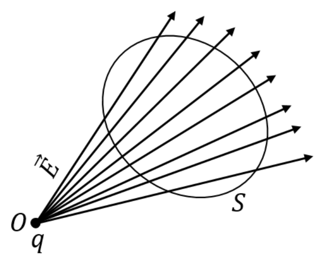
2.3 Gauss Denklemi



Orijine yerleştirilmiş q yükünün oluşturduğu elektrik alan,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{e}_r}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{'dir.} \tag{2.18}$$

$\vec{E}$ alanın kapalı bir S yüzeyinden dışa doğru geçirdiği akıyı hesaplayalım. $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$ olmak üzere



$$\int_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = -\frac{q}{4\pi}\int_S \mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot d\vec{s} \tag{2.19}$$

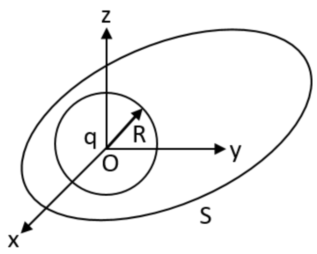
Gauss-Ostogradski teoremi

$$\int_S \vec{A}\cdot d\vec{s} = \iiint_v \mathrm{div}\,\vec{A}dv \qquad : \text{Gauss-Ostogradski teoremi} \tag{2.20}$$

uyarınca denklem (2.21) elde edilir

$$\int_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = -\frac{q}{4\pi}\int_v \text{div grad}\left(\frac{1}{r}\right) dv = -\frac{q}{4\pi}\int_v \Delta\left(\frac{1}{r}\right) dv = 0 \quad . \tag{2.21}$$

Çünkü S yüzeyi orijini kuşatmamaktadır. Dolayısıyla $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ olduğundan bu sonuç elde edilmiştir. Oysa ki S yüzeyini orijini kuşatacak şekilde seçersek; o zaman S yüzeyi üzerindeki integral, R yarıçaplı küre yüzeyindeki integrale eşit olur. O halde $r = R$, $d\vec{s} = ds\,\vec{e}_r$ olur.



$$\int_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_{S_R} \vec{D}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi R^2}\int_{S_R} ds = q \tag{2.22}$$

Sonuç olarak şunu söyleyebliriz:

$$\int_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = S\text{'nin içindeki yüklerin toplamı}$$

Eğer yükler bir ρ yoğunluğu ile v hacmini dolduruyorsa,

$$\int_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_v \rho\, dv \tag{2.23}$$

yazılır. Gauss-Ostogradski teoremi (bkz. denklem (2.20)) uyarınca

$$\int_v \text{div}\,\vec{D}\, dv = \int_v \rho\, dv \tag{2.24}$$

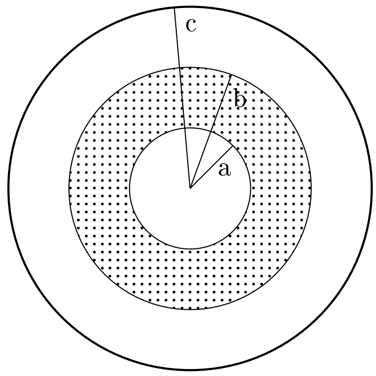
yazılabilir. Bu eşitlik her V hacmi için geçerli olduğundan

$$\text{div}\,\vec{D} = \rho \tag{2.25}$$

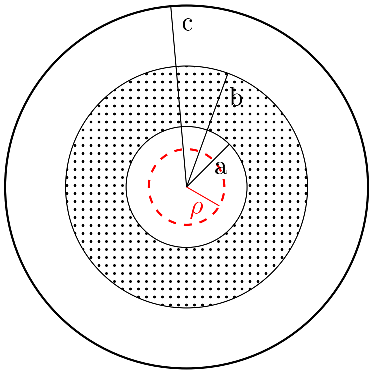
elde edilir. Böylece elektrostatik alanın sağladığı iki temel denkleme ulaşılır.

$$\text{rot}\,\vec{E} = 0 \tag{2.26a}$$
$$\text{div}\,\vec{D} = \rho \tag{2.26b}$$

Örnek 3. Şekilde kesiti verilen iç içe geçmiş silindirik bölgeler boşluktadır. $\rho < a$ bölgesi boşluk, $\rho \in (a, b)$ bölgesinde hacimsel yük yoğunluğu $\rho_{ab} = A\,[C/m^3]$, $\rho \in (b, c)$ bölgesi boşluk, $\rho = c$ yarıçaplı silindir üzerinde $\sigma_c = B\,[C/m^2]$ yoğunluklu yüzeysel yükler vardır.



Uzayın her bölgesinde oluşacak elektrik alanı hesaplayalım.



- $\rho \in (0, a)$:
  Bu bölgede yarıçapı ρ olan bir silindir yüzeyini seçtik ve bu yüzey üzerinde Gauss formülünü uygulayacağız.

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \text{ } S\text{'nin içindeki yüklerin toplamı}$$

Problemdeki yüklerin simetrik dağılımı sebebiyle her bölgede oluşacak elektrik alan olsa olsa ρ'nun fonksiyonu ve $\vec{e}_\rho$ yönünde olur. Öyleyse

$$\vec{D} = D(\rho)\vec{e}_\rho = \varepsilon_0 E(\rho)\vec{e}_\rho$$

Silindir yüzeyi üzerinde: $d\vec{s} = ds\,\vec{e}_\rho = \rho d\varphi dz \vec{e}_\rho$

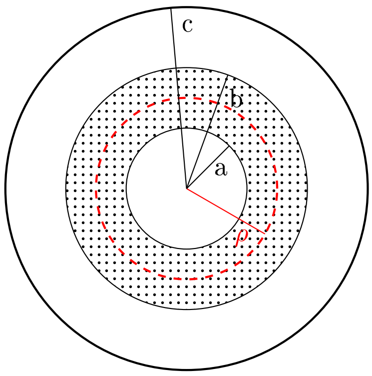
$$\begin{aligned}\int_S \vec{D} \cdot d\vec{s} &= \int_S \varepsilon_0 E(\rho)\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho \rho d\varphi dz \\ &= \varepsilon_0 E(\rho)\rho \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{z=0}^{1} dz \\ &= 2\pi\rho\varepsilon_0 E(\rho)\end{aligned}$$

$\rho \in (0, a)$ bölgesinde yük olmadığı için

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = 2\pi\rho\varepsilon_0 E(\rho) = 0 \quad \text{'dır.}$$

Öyleyse $E(\rho) = 0$ yani $\vec{E} = 0$ 'dır.

- $\rho \in (a, b)$ bölgesi: Bu bölgede yükler homojen bir şekilde dağılmıştır. $\rho_{ab} = A\,[C/m^3]$.



Bu bölgede de $\vec{D} = \varepsilon_0 E(\rho)\vec{e}_\rho$ olacağı için $\int_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = 2\pi\rho\varepsilon_0 E(\rho)$ 'dır. Öyleyse denklemin sağ tarafını yazmak için bu seçtiğimiz Gauss yüzeyi içinde ne kadar yük olduğunu bulmamız lazımdır.

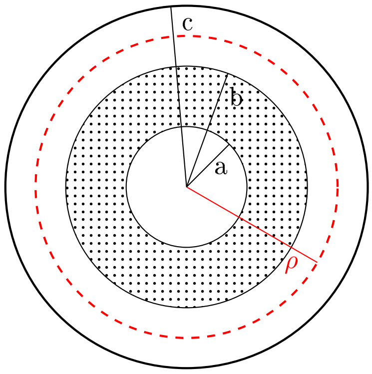
$$Q_{ar} = \int_v \rho_{ab}\,dv = \int_{z=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\rho=a}^{\rho} A\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = A\int_{\rho=a}^{\rho} \rho\,d\rho \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{z=0}^{1} dz = A\pi\left(\rho^2 - a^2\right) \;\; [C]$$

$$2\pi\rho\varepsilon_0 E(\rho) = A\pi\left(\rho^2 - a^2\right) \quad \Rightarrow \quad E(\rho) = \frac{A\left(\rho^2 - a^2\right)}{2\rho\varepsilon_0}$$

ve buradan

$$\vec{E} = \frac{A\left(\rho^2 - a^2\right)}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho \quad \text{olur.}$$

- $\rho \in (b, c)$ bölgesi: Bu bölge için de bir Gauss yüzeyi seçelim. Gauss denkleminin sol tarafı diğer bölgelerde olduğu gibi yine aynı olacaktır.



Sağ tarafı için bu yeni Gauss yüzeyinin içinde kalan toplam yükü bulalım.

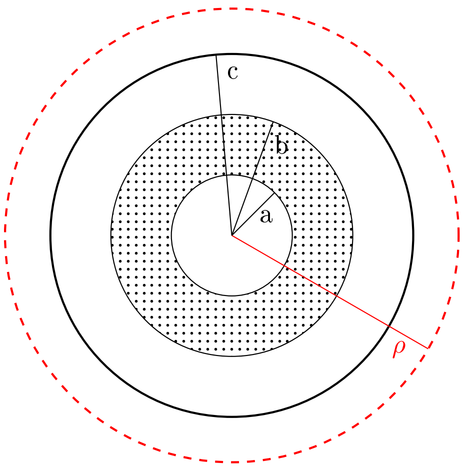
$$Q_{ab} = \int_v \rho_{ab}\, dv = \int_{z=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\rho=a}^{b} A\,\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = A\int_{\rho=a}^{b}\rho\, d\rho\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi\int_{z=0}^{1}dz = A\pi\left(b^2 - a^2\right)\ [C]$$

$$2\pi\rho\varepsilon_0 E(\rho) = A\pi\left(b^2 - a^2\right) \quad \Rightarrow \quad E(\rho) = \frac{A\left(b^2 - a^2\right)}{2\rho\varepsilon_0}$$

ve buradan

$$\vec{E} = \frac{A\left(b^2 - a^2\right)}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho \text{ olur.}$$

- $\rho > c$ bölgesi: Bu bölge için de bir Gauss yüzeyi seçelim. Bu yüzey içindeki toplam yükü hesaplayalım.



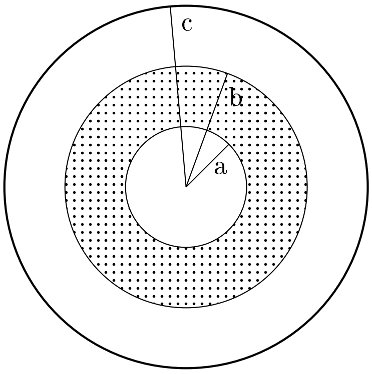
$\rho \in (a, b)$ arasında Q_{ab} kadar yük var. Bir de $\rho = c$ yarıçaplı silindir üzerinde $\sigma_c = B\,[C/m^2]$ yoğunluklu yüzeysel yükler var. Bu da $Q_c = 2\pi cB$ kadardır.

$$2\pi\rho\varepsilon_0 E(\rho) = Q_{ab} + Q_c = A\pi\left(b^2 - a^2\right) + 2\pi cB$$

$$E(\rho) = \frac{A\left(b^2 - a^2\right) + 2cB}{2\rho\varepsilon_0}$$

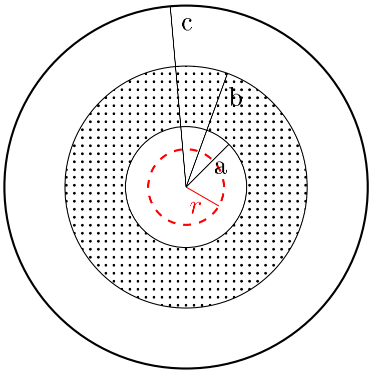
$$\vec{E} = \frac{A\left(b^2 - a^2\right) + 2cB}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho$$

Örnek 4. Şekilde kesiti verilen iç içe geçmiş **küresel** bölgeler boşluktadır. $r < a$ bölgesi boşluk, $r \in (a, b)$ bölgesinde hacimsel yük yoğunluğu $\rho_{ab} = A\,[C/m^3]$, $r \in (b, c)$ bölgesi boşluk, $r = c$ yarıçaplı küre üzerinde $\sigma_c = B\,[C/m^2]$ yoğunluklu yüzeysel yükler vardır.



Uzayın her bölgesinde oluşacak elektrik alanı hesaplayalım. Bu problemde seçeceğimiz Gauss yüzeyleri birer küre yüzeyi olacaktır.

- $r \in (0, a)$ bölgesi:



Bu bölgede seçeceğimiz Gauss yüzeyi üzerinde Gauss denklemini yazalım. Problemde, yüklerin simetrik ve homojen dağılımı sebebiyle her bölgedeki elektrik alan

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$$

şeklinde olacaktır.

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_S \varepsilon_0 E(r)\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \varepsilon_0 E(r) r^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E(r)$$

$r \in (0, a)$ bölgesinde yük olmadığı için

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E(r) = 0 \quad \text{'dır.}$$

Öyleyse $E(r) = 0$ yani $\vec{E}(r) = 0$ 'dır.

- $r \in (a, b)$ bölgesi:

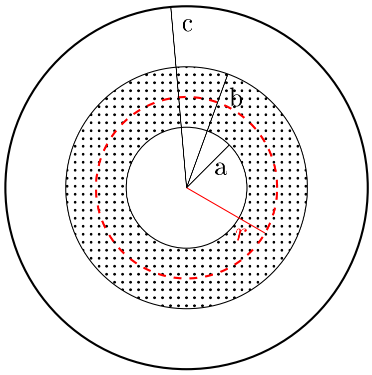
Bu bölgede yükler homojen bir şekilde dağılmıştır. $\rho_{ab} = A\,[C/m^3]$.

$$Q_{ar} = \int_v \rho_{ab}\, dv = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=a}^{r} A\, r^2 \sin\theta dr\, d\theta d\varphi = A\int_{r=a}^{r} r^2\, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{3} A\left(r^3 - a^3\right) \;\; [C]$$

$$4\pi\varepsilon_0 r^2 E(r) = \frac{4\pi}{3} A\left(r^3 - a^3\right) \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{A}{3\varepsilon_0}\frac{\left(r^3 - a^3\right)}{r^2}$$

ve buradan

$$\vec{E} = \frac{A}{3\varepsilon_0}\frac{\left(r^3 - a^3\right)}{r^2}\vec{e}_r \quad \text{olur.}$$



- $r \in (b, c)$ bölgesi:

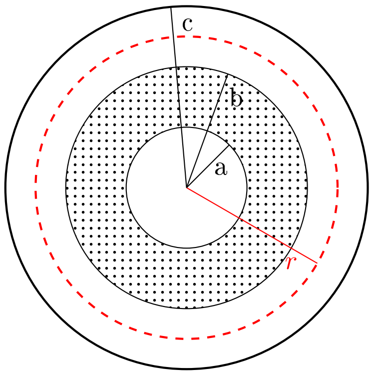
  Sağ tarafı için bu yeni Gauss yüzeyinin içinde kalan toplam yükü bulalım.

$$Q_{ab} = \int_v \rho_{ab}\, dv = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=a}^{b} A\, r^2 \sin\theta dr\, d\theta d\varphi = A \int_{r=a}^{b} r^2\, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{3} A \left(b^3 - a^3\right)\ [C]$$

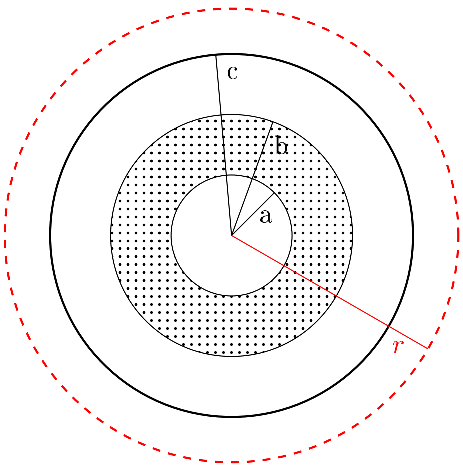
$$4\pi\varepsilon_0 r^2 E(r) = \frac{4\pi}{3} A \left(b^3 - a^3\right) \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{A}{3\varepsilon_0} \frac{\left(b^3 - a^3\right)}{r^2}$$

ve buradan

$$\vec{E} = \frac{A}{3\varepsilon_0} \frac{\left(b^3 - a^3\right)}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{olur.}$$



- $r > c$ bölgesi: Seçilen Gauss yüzeyi içerisindeki toplam yük Q_{ab} ile $r = c$ yarıçaplı küre yüzeyi üzerindeki yük olacaktır. $Q_c = 4\pi c^2 \sigma_c = 4\pi c^2 B$

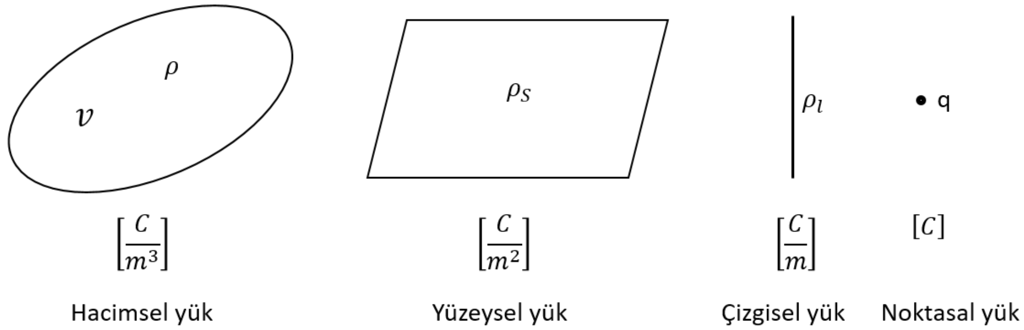


$$4\pi\varepsilon_0 r^2 E(r) = Q_{ab} + Q_c = \frac{4\pi}{3} A \left(b^3 - a^3\right) + 4\pi c^2 B$$

$$\vec{E} = \left[\frac{A}{3} \left(b^3 - a^3\right) + c^2 B\right] \frac{\vec{e}_r}{\varepsilon_0 r^2}$$

2.4 Değişik Türden Yük Dağılımları ve Dirac Distribüsyonu

Önceki bölümde elde ettiğimiz elektrostatik alanın sağladığı temel denklemlerden yararlanılarak, elektrostatik problemlerini çözebilmek için ρ 'yu açıkça ifade etmek gerekir. ρ; $[C/m^3]$ boyutunda bir ifadedir. ρ 'yu her zaman ifade edebilecek uygun fonksiyonlar bulmak mümkün değildir.



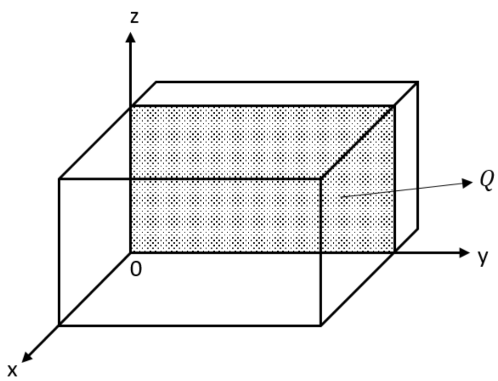
Şekillerden görüldüğü gibi C/m^3, C/m^2, C/m, C boyutundaki yüzeysel, çizgisel, noktasal yüklere ilişkin yoğunlukları fonksiyonlar aracılığıyla ifade edemeyiz. Bu amaçla, fonksiyondan daha geniş kapsamlı matematik elemanlar kullanmamız zorunludur. Genelleştirilmiş fonksiyon olarak da adlandırılan bu elemanlar, **distribüsyon** olarak adlandırılır.

Distribüsyon kavramını anlayabilmek için $x = 0$ düzlemi üzerine $\rho_s = \rho_s(y, z)$ $[C/m^2]$ yoğunluğu ile yayılmış bulunan yük dağılımına ilişkin hacimsel yoğunluğunu

$$\begin{array}{ccc} \rho(x,y,z) = & \rho_s(y,z) & \delta(x) \\ \left[\frac{C}{m^3}\right] & \left[\frac{C}{m^2}\right] & \left[\frac{1}{m}\right] \end{array}$$

şeklinde yazalım. Açıktır ki $\delta(x)$, $\left[\frac{1}{m}\right]$ boyutundadır ve **Dirac distribüsyonu** adını alır.

$\delta(x)$'in özelliklerini çıkarmaya çalışalım.



$a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, $e \leq z \leq f$ prizması içinde $x = 0$ düzleminde toplam Q kadar yük olsun. Prizma içindeki toplam yük, $\rho(x, y, z)$ yoğunluğunun prizma üzerinde integraline eşittir.

$$Q = \int_a^b \delta(x)\, dx \int_c^d \int_e^f \rho_s(y, z) dy\, dz \tag{2.27}$$

Oysa yük sadece $x = 0$ düzlemi üzerinde bulunduğundan

$$Q = 0, \quad a < 0\,(a > 0) \text{ ve } b < 0\,(b > 0)$$

demektir. Sadece $a < 0 < b$ halinde

$$Q = \int_c^d \int_e^f \rho_s(y, z) dy\, dz \tag{2.28}$$

olur. Bu da bize,

$$\int_a^b \delta(x)\,dx = \begin{cases} 1, & ab < 0 \\ 0, & ab > 0 \end{cases} \tag{2.29}$$

ifadesini verir. Diğer özellikler şu şekildedir.

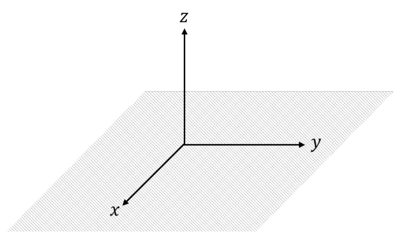
$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x) \tag{2.30a}$$

$$\int_a^x \delta(x)\,dx = u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{2.30b}$$

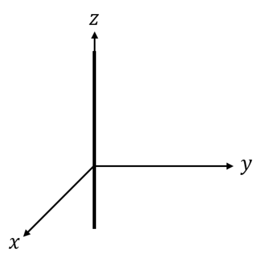
$$u'(x) = \delta(x) \tag{2.30c}$$

$u(x)$, birim basamak fonksiyonudur.

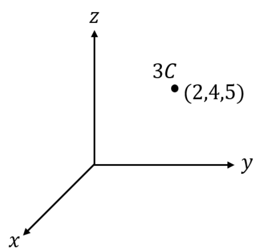
Örnek 5 (Distribüsyon ile ilgili örnekler). 1. Oxy düzleminde $5\,[C/m^2]$ yoğunluklu yüzeysel yüke ilişkin hacimsel yük yoğunluğu $\rho = 5\delta(z)$



2. z-ekseni boyunca 2 $[C/m]$ yoğunluklu çizgisel yüke ilişkin hacimsel yük yoğunluğu $\rho = 2\delta(x)\delta(y)$

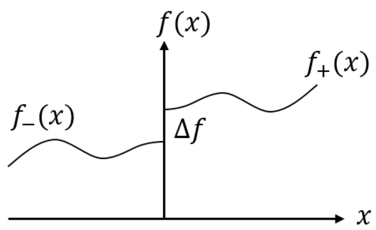


3. $(2,4,5)$ noktasındaki $3\,C$'luk noktasal yükse ilişkin hacimsel yük yoğunluğu $\rho = 3\delta(x-2)\delta(y-4)\delta(z-5)$



$f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ 'da süreksizlik gösteren, bunun dışında her yerde sürekli ve türetilebilir olsun.

$$f(x) = \begin{cases} f_+(x) & , \quad x > 0 \\ f_-(x) & , \quad x < 0 \end{cases} \tag{2.31}$$



$u(x)$ birim basamak fonksiyonu olmak üzere,

$$f(x) = f_+(x)u(x) + f_-(x)u(-x)$$

yazılabilir.

$$f'(x) = f'_+(x)u(x) + f'_-(x)u(-x) + [f_+(x) - f_-(x)]\delta(x) \tag{2.32}$$

elde edilir. Bu ifadeye $f(x)$ fonksiyonunun **distribüsyon anlamında türevi** denir. Bu ifadeden görüldüğü gibi ilk terim $x = 0$ 'da tanımlı olmayan, bunun dışında her yerde $f(x)$'in adi anlamda türevini eşit olan bir fonksiyondur ve $f'(x)$'in regüler kısmı olarak adlandırılır. İkinci terimdeki parantez içindeki ifade ise $f(x)$'in $x = 0$'da süreksizlik miktarı, Δf ‘dir.

$$f'(x) = \{f'(x)\} + \Delta f \cdot \delta(x) \tag{2.33}$$

yazılır. Benzer şekilde bu derste çokça kullanacağımız şu ifadeler de kolaylıkla elde edilir.

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} V &= \{\operatorname{grad} V\} + [\![\vec{n}V]\!]\delta(x) &(2.34a)\\ \operatorname{div} \vec{E} &= \{\operatorname{div} \vec{E}\} + [\![\vec{n}\cdot\vec{E}]\!]\delta(x) &(2.34b)\\ \operatorname{rot} \vec{E} &= \{\operatorname{rot} \vec{E}\} + [\![\vec{n}\times\vec{E}]\!]\delta(x) &(2.34c)\end{aligned}$$

Burada $\vec{n}$, $x = 0$ yüzeyinin normal vektörü olup $n = \vec{e}_x$ konmuştur. Daha genel olarak herhangi bir S yüzeyi için :

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} V &= \{\operatorname{grad} V\} + [\![\vec{n}V]\!]\delta(s) &(2.35a)\\ \operatorname{div} \vec{E} &= \{\operatorname{div} \vec{E}\} + [\![\vec{n}\cdot\vec{E}]\!]\delta(s) &(2.35b)\\ \operatorname{rot} \vec{E} &= \{\operatorname{rot} \vec{E}\} + [\![\vec{n}\times\vec{E}]\!]\delta(s) &(2.35c)\end{aligned}$$

2.5 Boşluk Olmayan Uzayda Elektrostatik Olay

Bu bölüme kadar incelediğimiz bütün olaylar boşlukta duran ve bilinen yüklerle ilgiliydi. Oysa içinde yaşadığımız uzay boş değildir. Değişik fiziksel özelliklere sahip birçok maddesel cisim içerir. Bu cisimlerin atomsal yapısında yer alan ve doğal durumda var olan iç elektriksel yükler birbirinin dışta oluşturdukları alanları yok ederek yüksüz gibi görünür. Kaynak olduğu durumda ise dış yüklerin etkisi ile yer değiştirerek belirli bir düzene girer ve belirginleşmeye başlar. Belirginleşen bu iç yükler de $\vec{E}$ alanına katkıda bulunur.

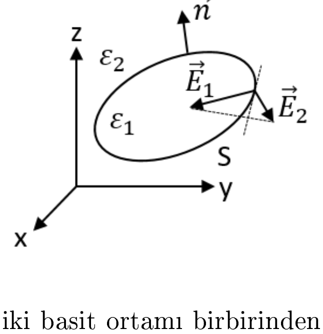
Varsayım. Değişik malzemelerle dolu uzayda ρ yoğunluğu ile yayılı bulunan yüklerin oluşturduğu elektrostatik alanda

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 &(2.36a)\\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho &(2.36b)\\ \vec{F} &= q\,\vec{E} &(2.36c)\end{aligned}$$

denklemleri distribüsyon anlamında her zaman geçerlidir. Bu denklemlerde;

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, bünye denklemi olarak adlandırılmaktadır.
$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$, ε : bir basit dielektrik ortamın permitivitesi (dielektrik sabiti),
ε_r : ortamın bağıl dielektrik sabitidir.

Farklı dielektrik sabitlerine sahip birçok ortamın varlığı halinde sayısal sonuçlar elde etmek istendiğinde yukarıdaki varsayımdan yararlanmak zorunlu olur. Bu varsayımın anlamını açık bir şekilde anlayabilmek için şekildeki durumu göz önüne alalım.



S yüzeyi, parametreleri ε_1 ve ε_2 olan iki basit ortamı birbirinden ayırmaktadır. Daha genel hali göz önüne alabilmek için S üzerinde ρ_s yoğunluğu ile yayılmış bir yüzeysel yük bulunduğunu düşünelim. Bu halde, elektrik alanın sağladığı denklemler distribüsyon anlamında yazılabilir.

$$\operatorname{div} \vec{D} = \{\operatorname{div} \vec{D}\} + [\![\vec{n}\cdot\vec{D}]\!]\delta(s) = \{\rho\} + \rho_s\delta(s) = \rho \tag{2.37a}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \{\operatorname{rot} \vec{E}\} + [\![\vec{n}\times\vec{E}]\!]\delta(s) = 0 \tag{2.37b}$$

Her iki denklemde iki tarafın eşitliğinden:

$$\{\mathrm{div}\,\vec{D}\} = \{\rho\}, \qquad \{\mathrm{rot}\,\vec{E}\} = 0, \qquad \text{(S'nin dışında)} \tag{2.38a}$$

$$[\![\vec{n}\cdot\vec{D}]\!] = \rho_s \qquad [\![\vec{n}\times\vec{E}]\!] = 0 \qquad \text{(S'nin üzerinde)} \tag{2.38b}$$

elde edilir. (2.38a)'daki iki ifade S'nin içinde ve dışında ayrı ayrı geçerli olan ifadeleri verir. (2.38b)'deki ifadeler ise alanın S üzerindeki süreksizliğe ilişkin sonuçlarıdır. S'ye içten ve dıştan yaklaşıldığındaki alanın teğetsel ve normal bileşenleri cinsinden ise (2.38b) ifadeleri şöyledir.

$$\vec{E}_t^{(2)} = \vec{E}_t^{(1)} \qquad \text{(S üzerinde)} \tag{2.39a}$$

$$\varepsilon_2 E_n^{(2)} - \varepsilon_1 E_n^{(1)} = \rho_s \qquad \text{(S üzerinde)} \tag{2.39b}$$

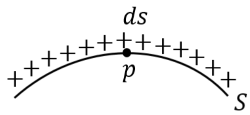
Bu son iki sonuç **sınır şartları** olarak adlandırılır ve (2.38a) denklemleri ile beraber alan ifadelerini bulmamıza yarar. Sınır şartları, potansiyel cinsinden yazıldığında ise

$$V^{(2)} = V^{(1)} \qquad \text{(S üzerinde)} \tag{2.40a}$$

$$\varepsilon_2 \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^{(2)} - \varepsilon_1 \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^{(1)} = -\rho_s \qquad \text{(S üzerinde)} \tag{2.40b}$$

Sınır şartlarının nasıl kullanıldığına ilişkin problemler de ayrıca verilecektir.

2.6 Yüzeysel Yüke Etki Eden Kuvvet



Şekil 1

S yüzeyi üzerinde ρ_s yoğunluklu yükler bulunsun. Bu yüklere alanı yaratan bütün yükler tarafından bir kuvvet etki edecektir. Bu kuvveti hesaplamak için S üzerindeki ds alanına etki eden kuvveti yazıp, bütün yüzey üzerinde integre etmek yeterlidir. ds alanı üzerinde $\rho_s ds$ kadar yüke etki eden kuvvet

$$d\vec{F} = \rho_s ds \cdot \vec{E}(P) \tag{2.41}$$

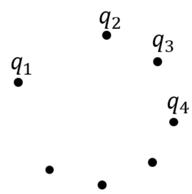
dir. Burada P noktasındaki alan, $\vec{E}(P)$ ise iyi bir yaklaşımla

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{2}\left[\vec{E}(P^+) + \vec{E}(P^-)\right] \tag{2.42}$$

yazılabilir. P noktasında her iki taraftan yaklaştığımızda alanın aldığı iki değerin aritmetik ortalamasıdır.

2.7 Elektrostatik Enerji Yoğunluğu

Sınırsız geniş basit bir ortamda tek başına bir q_1 yükü bulunsun. Bu yük uzayda $\vec{E}_1$ alanını meydana getirir. İkinci bir q_2 yükünü sonsuz uzaktan q_1 'in yakınına getirirken yol boyunca $q_2\vec{E}_1$ kuvvetine karşı iş yapılır. Sonra sıra ile q_3 yükünü de q_1 ve q_2 'nin yakınına getirirken hem q_1 hem de q_2 'nin oluşturduğu alanlara karşı iş yapmak gerekir. Bu olay böyle sıra ile devam edip hepsi toplanırsa:

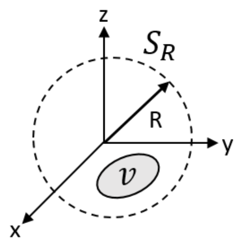


$$W = (W_{12} + W_{13} + \ldots + W_{1n}) + (W_{23} + W_{24} + \ldots + W_{2n}) + \ldots + W_{n-1,n} \tag{2.43a}$$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1\,,i\neq j}^{n} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j=1\,,j\neq i}^{n} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon r_{ij}} \tag{2.43b}$$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i \tag{2.43c}$$

elde edilir. Burada V_i, q_i yükünün bulunduğu noktada diğer yüklerce oluşturulmuş potansiyeldir. Yükleri bir araya toplamak için yapılan W işi potansiyel enerji olarak depolanır. Bu yükler serbest bırakılırsa, hepsi birbirlerinin ve q_1 'in karşılıklı etkileri altında değişik yöne harekete geçerler ve harcanan toplam enerji W kadardır.



Eğer yükler bir v hacmini ρ yoğunluğu ile dolduracak şekilde ise, o halde iş

$$W = \frac{1}{2}\int_v V\,\rho\,dv \tag{2.44}$$

olur. İşi hesaplamak için v hacmi üzerindeki bu integral yerine yarıçapı R olan S_R küresi üzerinde integral alıp v'nin dışında $\rho = 0$ almak yeterlidir.

$$W = \frac{1}{2}\int_{v_R} V\,\rho\,dv = \frac{1}{2}\int_{v_R} V\,\mathrm{div}\,\vec{D}\,dv \tag{2.45}$$

Vektör analiz bilgilerimizden

$$\mathrm{div}\,(V\vec{D}) = V\,\mathrm{div}\,\vec{D} + \vec{D}\cdot\mathrm{grad}\,V \tag{2.46}$$

dir. Bu denklemden $V\,\mathrm{div}\,\vec{D}$ çekilir ve Denklem (2.45)'de yerine yazılır.

$$W = \frac{1}{2}\int_{v_R}\left\{\mathrm{div}\,(V\vec{D}) - \vec{D}\cdot\,\mathrm{grad}\,V\right\}\,dv \tag{2.47}$$

Denklem (2.47)'de integrandın ilk terimi yerine diverjans veya Gauss-Ostogradski teoreminden

$$\int_{v_R}\mathrm{div}\,(V\vec{D})\,dv = \int_{S_R} V\vec{D}\cdot\,d\vec{S} \tag{2.48}$$

$$W = \frac{1}{2}\int_{S_R} V\vec{D}\cdot\,d\vec{S} + \frac{1}{2}\int\limits_{v_R}\vec{E}\,\cdot\vec{D}\,dv \tag{2.49}$$

şeklinde yazılır. Bu integralde $R\to\infty$ yapabiliriz, çünkü v'nin dışında $\rho = 0$ 'dır. $R\to\infty$ olduğunda sonluda bulunan yükler tarafından oluşturulan V ve $\vec{D}$ sıfıra gideceği için sonsuz yarıçaplı S_R üzerinde de integral sıfıra gider ve sonuç olarak iş

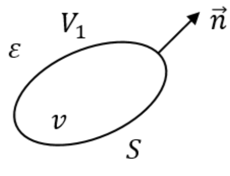
$$W = \frac{1}{2}\int\limits_v \vec{E}\,\cdot\vec{D}\,dv \tag{2.50}$$

olur. $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ olduğundan

$$W = \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_v |\vec{E}|^2\,dv \quad [joule] \tag{2.51}$$

elde edilir.

2.8 Kapasite ve Kondansatör Kavramı



Uzayda sadece v iletken cismi olsun ve bu cisim yüklenerek sonsuza göre V_1 potansiyeline çıkarılsın. Bu durumda bu cisim üzerinde bulunan yükler tarafından oluşturulan $V(x,y,z)$ potansiyel fonksiyonu V_1 ile orantılı olacaktır.

$$V(x,y,z) = V_1\,\phi(x,y,z) \tag{2.52}$$

Burada ϕ, $V_1 = 1$ haline karşı gelen potansiyel olup, sadece cismin şekline bağlı olan bir fonksiyondur. Öte yandan cismin üzerinde birikmiş toplamı yük (2.40b) uyarınca

$$Q_1 = -\int\limits_S \left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial n}\right) ds = -V_1 \int\limits_S \left(\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial n}\right) ds\,. \tag{2.53}$$

Burada S cismin yüzeyini; $\vec{n}$, S'nin dışa yönelik yüzey normalini; ε ise S'nin dışındaki uzayın elektrik sabitini göstermektedir.

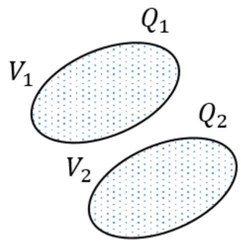
Uzay elektrik yükü bakımından nötr olduğundan S üzerinde Q_1 yükü birikirse, sonsuzda da $-Q_1$ yükü birikir. Bu tür sistemler için bir önemli tanım da, sistemin 1 Volt başına ne kadar yük tutabileceğini gösteren, sistemin kapasitesi olarak tanımlanan C 'dir.

$$C = \frac{Q_1}{V_1} = -\int\limits_S \left(\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial n}\right) ds \tag{2.54}$$

v cismini V_1 potansiyeline çıkarıncaya kadar yapılan iş

$$W = \frac{1}{2} Q_1 V_1 = \frac{1}{2} C V_1^2 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C} \tag{2.55}$$

dir. Eğer uzayda iki iletken cisim varsa ve cisimler V_1 ve V_2 potansiyelinde ise ifadeler değişir.



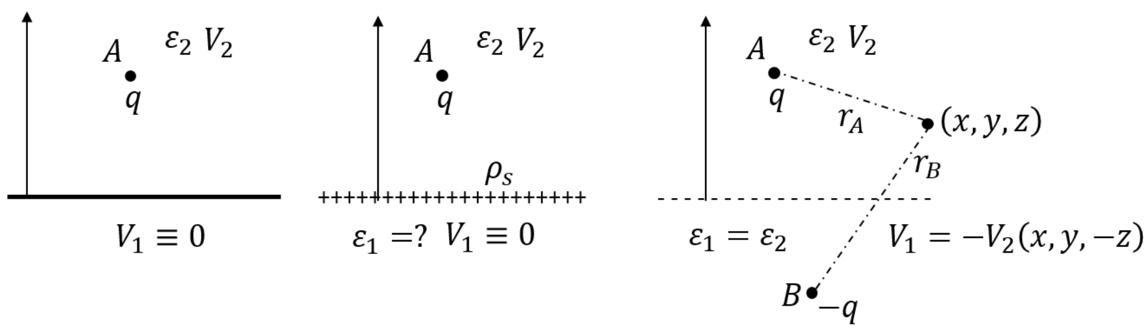
$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{Q_2}{V_2 - V_1} \tag{2.56a}$$

$$W = \frac{1}{2} Q_1 (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C} \tag{2.56b}$$

2.9 Denk Problemler ve Denk Kaynaklar

2.9.1 Görüntü Kavramı

Bir elektrostatik probleminde amaç, potansiyel fonksiyonunu bulmaktır. Değişik kaynak dağılımları bir bölgede aynı potansiyeli yaratabilirler. Bu halde söz konusu kaynaklar söz konusu bölge bakımından denktir, denir. Denk kaynaklar arasında basit bir dağılıma sahip olanları saptamak sınır değer problemleri çözmek bakımından oldukça önemlidir. Bu amaçla şu problemi ele alalım.



1. $z > 0$ bölgesi dielektrik sabiti ε_2 olan basit bir madde ile doldurulur ve bu bölgedeki bir A noktasında q yükü bulunmaktır. $z = 0$ düzlemi iletken bir malzeme ile kaplı olup $V = 0$ potansiyeline sahiptir. Problem $z > 0$ bölgesindeki $V_2(x, y, z)$ potansiyel fonksiyonunu bulmak olup $z < 0$ bölgesi ile ilgilenilmemektedir.

2. A noktasındaki q yükü sebebiyle $z = 0$ düzlemi üzerinde $\rho_s = -\left(\varepsilon_2 \dfrac{\partial V_2}{\partial z}\right)_{z=0}$ yoğunluklu bir yük birikimi olur. V_2 potansiyelin kaynağı q yükü ile ρ_s yükleri olur. Bu sebeple $z = 0$ düzlemindeki iletken kaldırılıp yerine ρ_s yoğunluklu yükler konur.

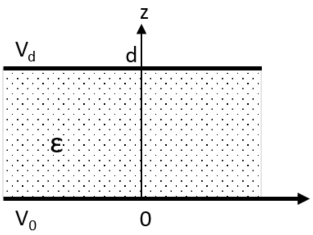
3. Son olarak $z = 0$ düzlemindeki yükleri kaldırıp yerine A'nın simetriği B noktasına $-q$ yükü koyalım ve $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ alalım. $-q$ yükü $z = 0$ düzleminde ρ_s yüklerinin etkisini yaratacağı için bu problemler birbirine denk olur ve böylece $z > 0$ bölgesindeki V_2 potansiyeli olur.

$$V_2(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right], \quad z > 0 \tag{2.57}$$

olur. B'deki $-q$ yüküne A'daki q yükünün görüntüsü denir.

2.10 Örnekler

Örnek 6. Sonsuz geniş iletken düzlemler $z = 0$ ve $z = d$ düzlemleri üzerinde olup V_0 ve V_d potansiyellerinde tutulsun. Bu iki potansiyel arasındaki bölge ε dielektrik sabitine sahip malzeme ile dolu olsun. Bu bölgedeki potansiyel fonksiyonunu bulalım.



Bu bölgede $\Delta V = 0$ denklemi sağlanacaktır. Açıkca yazarsak;

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Ara bölgedeki potansiyel fonksiyonunu düşünürsek $z = 0$ düzleminde V_0 değerinden $z = d$ düzleminde V_d değerine ulaşmaktadır. Öte yandan bu değişim bütün (x, y) noktalarında olduğundan $V(x, y, z)$ fonksiyonu olsa olsa sadece z'nin fonksiyonudur. Yani,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

dır. Öyleyse $\Delta V = 0$ denkleminden

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= 0\,, && \text{kalır. Buradan} \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= A\,, && \text{bir sabit olmalıdır.} \\ V &= Az + B\,, && \text{'dir.} \end{aligned}$$

A ve B sabitlerini bulmak için;

$$\begin{aligned} z = 0 \qquad & V_0 = A \times 0 + B \quad \Rightarrow \quad B = V_0 \\ z = d \qquad & V_d = A \times d + B \quad \Rightarrow \quad A = \frac{V_d - V_0}{d} \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak potansiyel fonksiyonu

$$V(x, y, z) = \frac{V_d - V_0}{d}\, z + V_0$$

elde edilir.

$z \,\epsilon\, (0, d)$ bölgesinde potansiyeli bulduğumuza göre elektrik alanı da rahatlıkla yazabiliriz.

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\, V = -\left\{ \frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z \right\} \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \qquad \text{olduğundan}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z = -\frac{V_d - V_0}{d}\vec{e}_z \qquad \text{olur.}$$

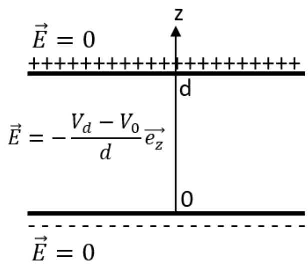
Görüldüğü gibi bu bölgede elektrik alan eğer $V_d > V_0$ ise $-\vec{e}_z$ yönünde, eğer $V_d < V_0$ ise $\vec{e}_z$ yönündedir. Yani elektrik alanın yönü potansyelin azaldığı yöndedir.

Elektrik alan bulunduğu için kolayca bu iletken düzlemlerde biriken yüklerin yoğunluğunu yazabiliriz. Sınır oluşturan $z = 0$ ve $z = d$ düzlemlerinde potansiyel sabit olduğundan bu bölgenin dışında elektrik alan sıfırdır. Öyleyse sınır şartlarını şöyle yazabiliriz:

$$\begin{aligned} z = d \qquad & \rho_d = -\varepsilon E_n|_{z=d} = -\varepsilon\left(-\frac{V_d - V_0}{d}\right) = \varepsilon\frac{V_d - V_0}{d} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right] \\ z = 0 \qquad & \rho_0 = -\varepsilon E_n|_{z=0} = \varepsilon\left(-\frac{V_d - V_0}{d}\right) = -\varepsilon\frac{V_d - V_0}{d} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right] \end{aligned}$$

Paralel plakalı bu sistemde levhalarda biriken yük yoğunluğunun ters işaretle eşit olduğuna dikkat edelim. Bu noktada her iki levhanın S kadar parçasında biriken toplam yük de şu şekilde olacaktır:

$$z = d \qquad Q_d = \rho_d\, S = S\,\varepsilon \frac{V_d - V_0}{d} \;\; [C]$$
$$z = 0 \qquad Q_0 = \rho_0\, S = -S\,\varepsilon \frac{V_d - V_0}{d} \;\; [C]$$



Bu levhalarda yük biriktiğine göre her bir levhaya bir kuvvet etki edecektir. Her bir levhanın S parçasına etki eden kuvveti hesaplayalım.

$$z = d \qquad d\vec{F}_d = \rho_d\, dS\, \frac{\vec{E}(z=d)}{2} = \varepsilon\, \frac{V_d - V_0}{d}\, \frac{1}{2}\, \left[-\frac{V_d - V_0}{d} \vec{e}_z \right] dS$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_d &= \iint_S d\vec{F}_d = -\frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{V_d - V_0}{d} \right]^2 \vec{e}_z \cdot \iint_S dS \\ &= -\frac{\varepsilon S}{2} \left[\frac{V_d - V_0}{d} \right]^2 \vec{e}_z \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi $z = d$ levhasına etki eden kuvvet $-\vec{e}_z$ yönündedir.

$$z = 0 \qquad d\vec{F}_0 = \rho_0\, dS\, \frac{\vec{E}(z=0)}{2} = -\varepsilon\, \frac{V_d - V_0}{d}\, \frac{1}{2}\, \left[-\frac{V_d - V_0}{d} \vec{e}_z \right] dS$$

$$\vec{F}_0 = \iint\limits_S d\vec{F}_0 = \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{V_d - V_0}{d} \right]^2 \vec{e}_z \cdot \iint\limits_S dS = \frac{\varepsilon S}{2} \left[\frac{V_d - V_0}{d} \right]^2 \vec{e}_z$$

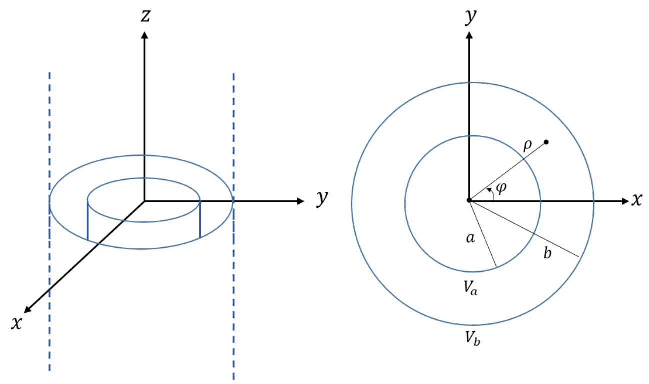
Şimdi de bu levhalar arasındaki bölgenin (S parçasında) depo edilen potansiyel enerjiyi hesaplayalaım.

$$\begin{aligned} W &= \int\limits_{z=0}^{d} \iint_S |\vec{E}|^2 dv = \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_0^d \left[-\frac{V_d - V_0}{d} \right]^2 dx\, dy\, dz \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{V_d - V_0}{d} \right]^2 \iint_S dx\, dy \int\limits_0^d dz = \frac{\varepsilon}{2}\, S\, d\, \left[\frac{V_d - V_0}{d} \right]^2 \\ &= \frac{\varepsilon\, S}{2d} (V_d - V_0)^2 \;\; [joule] \end{aligned}$$

Son olarak bu sistemin kapasitesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$C = \frac{Q_d}{V_d - V_0} = \frac{Q_0}{V_0 - V_d} = \frac{\varepsilon\, S}{d} \;\; [F]$$

Örnek 7. Kesiti şekilde görülen sonsuz uzun, iç içe geçmiş, eş eksenli iletken silindirler arasındaki bölge dielektrik sabiti ϵ ile doldurulsun. Silindirlerin yarıçapı a ve b olup, üzerlerindeki potansiyel sırasıyla V_a ve V_b değerindedir. Öncelikle ara bölgedeki potansiyeli bulalım.



$$\rho \in (a, b), \quad \Delta V(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

olmak üzere Laplace denklemi sağlanacaktır. Bu sistemin geometrisi ve iletkenler üzerindeki potansiyelin her iki silindir için sabit olması sebebiyle $V(\rho, \varphi, z)$ potansiyeli sadece ρ'ya bağlı olacaktır. $\rho = a$ ve $\rho = b$'deki sınır şartlarını kullanarak $V(\rho, \varphi, z)$ potansiyeli

$$V = \frac{(V_b - V_a)}{\ln(b/a)} \ln \rho + \frac{(V_a \ln b - V_b \ln a)}{\ln(b/a)}$$

bulunur. Elektrik alan vektörü

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\mathrm{grad}\, V = -\left\{\frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z\right\} \\
&= -\frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{e}_\rho \\
&= -\frac{(V_b - V_a)}{\ln(b/a)}\frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho
\end{aligned}$$

Silindirler üzerinde birikecek yük yoğunluğu:

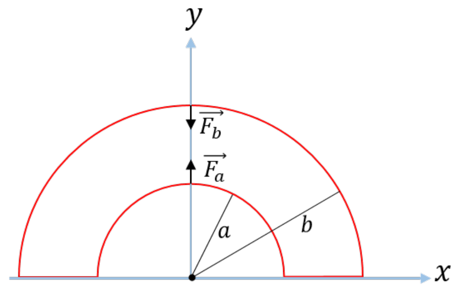
$$\begin{aligned}
\rho = b, \qquad & \rho_b = -\varepsilon\left[-\frac{(V_b - V_a)}{\ln(b/a)}\frac{1}{b}\right] = \frac{\varepsilon}{b}\frac{(V_b - V_a)}{\ln(b/a)} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right] \\
\rho = a, \qquad & \rho_a = \varepsilon\left[-\frac{(V_b - V_a)}{\ln(b/a)}\frac{1}{a}\right] = -\frac{\varepsilon}{a}\frac{(V_b - V_a)}{\ln(b/a)} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]
\end{aligned}$$

Bu silindirlerin ℓ kadar uzunluğunda biriken toplam yük miktarı:

$$\begin{aligned}
\rho = b, \qquad & Q_b = \rho_b\, S = 2\pi b \ell \rho_b = 2\pi \ell\, \varepsilon \frac{(V_b - V_a)}{\ln(b/a)} \quad [C] \\
\rho = a, \qquad & Q_a = \rho_a\, S = 2\pi a \ell \rho_a = -2\pi \ell\, \varepsilon \frac{(V_b - V_a)}{\ln(b/a)} \quad [C]
\end{aligned}$$

Şimdi bu silindirlerin yarısına etki eden kuvveti hesaplayalım. $\varphi \in (0, \pi)$

$$\begin{aligned}
\rho = b, \qquad d\vec{F}_b &= \rho_b\, dS\, \frac{1}{2}\vec{E}(\rho = b) = \rho_b\, dS\, \frac{1}{2}\left[-\frac{(V_b - V_a)}{\ln(b/a)}\frac{1}{b}\vec{e}_\rho\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{b^2}\left[\frac{(V_b - V_a)}{\ln(b/a)}\right]^2 [\cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y]\, b\, d\varphi\, dz \\
\vec{F}_b &= \iint_S d\vec{F}_b = -\frac{\varepsilon}{2b}\left[\frac{(V_b - V_a)}{\ln(b/a)}\right]^2 \int\limits_{z=0}^{\ell}\int\limits_{\varphi=0}^{\pi} [\cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y]\, d\varphi\, dz \\
&= -\frac{\varepsilon \ell}{b}\left[\frac{(V_b - V_a)}{\ln(b/a)}\right]^2 \vec{e}_y
\end{aligned}$$



$$\rho = a, \qquad d\vec{F}_a = \rho_a \, dS \, \frac{1}{2} \vec{E}(\rho = a) = \rho_a \, dS \, \frac{1}{2} \left[-\frac{(V_b - V_a)}{\ln(b/a)} \, \frac{1}{a} \vec{e}_\rho \right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{a^2} \left[\frac{(V_b - V_a)}{\ln(b/a)} \right]^2 [\cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y] \, a \, d\varphi \, dz$$

$$\vec{F}_a = \iint_S d\vec{F}_a = \frac{\varepsilon}{2a} \left[\frac{(V_b - V_a)}{\ln(b/a)} \right]^2 \int\limits_{z=0}^{\ell} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} [\cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y] \, d\varphi \, dz$$

$$= \frac{\varepsilon \ell}{a} \left[\frac{(V_b - V_a)}{\ln(b/a)} \right]^2 \vec{e}_y$$

Silindirler arasındaki bölgede depo edilen potansiyel enerjiyi hesaplayalım.

$$W = \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{z=0}^{\ell} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\rho=a}^{b} |\vec{E}|^2 dv = \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{(V_b - V_a)}{\ln(b/a)} \right]^2 \int\limits_{z=0}^{\ell} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\rho=a}^{b} \frac{1}{\rho^2} \rho d\rho \, d\varphi \, dz$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{(V_b - V_a)}{\ln(b/a)} \right]^2 \int\limits_{z=0}^{\ell} dz \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\rho=a}^{b} \frac{1}{\rho} d\rho$$

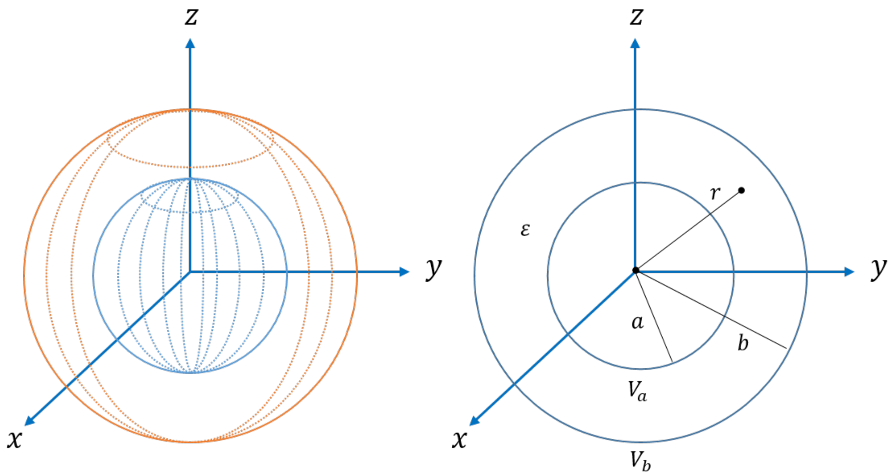
$$= \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{(V_b - V_a)}{\ln(b/a)} \right]^2 \ell \, 2\pi \, \ln(b/a)$$

$$= \frac{\pi \, \varepsilon \, \ell}{\ln(b/a)} (V_b - V_a)^2 \ [joule]$$

Son olarak bu sistemin kapasitesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$C = \frac{Q_b}{V_b - V_a} = \frac{2\pi \, \ell \, \varepsilon}{\ln(b/a)} \ [F]$$

Örnek 8 (3)**.** Şimdi aynı problemi iç içe geçmiş eş merkezli küreler için ele alalım.



$r \in (a,b)$ için $\Delta V = 0$ denklemi sağlanacaktır. Açıkca yazarsak;

$$\Delta V(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0$$

Bu sistemde iki küre arasındaki bölgede problemin simetrisinden dolayı, ptoansiyel $V(r,\theta,\varphi)$ sadece r'nin fonksiyonudur. Dolayısıyla,

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = 0\,, \quad \frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0$$

dır. Öyleyse $\Delta V = 0$ denkleminden

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0\,, \qquad \text{kalır. Buradan}$$

$$r^2\frac{\partial V}{\partial r} = A$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{A}{r^2}$$

$$V = -\frac{A}{r} + B \qquad \text{olur.}$$

A ve B sabitlerini bulmak için $r = a$ ve $r = b$'deki sınır şartlarını kullanalım.

$$r = a \qquad V_a = -\frac{A}{a} + B$$

$$r = b \qquad V_b = -\frac{A}{b} + B$$

bulunur. Sonuç olarak potansiyel fonksiyonu

$$V(r,\theta,\varphi) = -\frac{(V_a - V_b)}{a-b}\frac{ab}{r} + \frac{a\cdot V_a - b\cdot V_b}{a-b}\,, \quad r \in (a,b)$$

elde edilir.

$r\,\epsilon\,(a,b)$ bölgesinde elektrik alan

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V = -\left\{\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi\right\} \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial V}{\partial\theta} = 0\,, \quad \frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0 \qquad \text{olduğundan}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r = -\frac{(V_a - V_b)}{a-b}\frac{ab}{r^2}\vec{e}_r \qquad \text{olur.}$$

Küreler üzerindeki yük yoğunluğu:

$$r = b \qquad \rho_b = \frac{(V_a - V_b)}{a-b}\frac{ab}{b^2} = \varepsilon\frac{a}{b}\frac{(V_a - V_b)}{a-b}\ \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

$$r = a \qquad \rho_a = -\varepsilon\frac{(V_a - V_b)}{a-b}\frac{ab}{a^2} = -\varepsilon\frac{b}{a}\frac{(V_a - V_b)}{a-b}\ \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

Küreler üzerinde biriken toplam yük:

$$r = b \qquad Q_b = \rho_b\, S = \rho_b \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} b^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi b^2 \rho_b = 4\pi\varepsilon ab\frac{(V_a - V_b)}{a-b} \quad [C]$$

$$r = a \qquad Q_a = \rho_a\, S = \rho_a \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} ds = 4\pi a^2 \rho_a = -4\pi\varepsilon ab\frac{(V_a - V_b)}{a-b} \quad [C]$$

Kürelerin üst yarısına etki eden kuvveti hesaplayalım. $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$r = b \qquad d\vec{F}_b = \rho_b\, dS\,\frac{\vec{E}(r=b)}{2} = \rho_b\, b^2 \sin\theta d\theta d\varphi \left[-\frac{1}{2}\frac{(V_a - V_b)}{(a-b)}\frac{ab}{b^2}\vec{e}_r\right]$$

$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z$ ve ρ_b'yi yerine yazıp düzenleyelim.

$$d\vec{F}_b = -\frac{\varepsilon a^2}{2}\left[\frac{(V_a - V_b)}{(a-b)}\right]^2 \left[\sin^2\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \sin^2\theta\sin\varphi\vec{e}_y + \sin\theta\cos\theta\vec{e}_z\right] d\theta d\varphi$$

$$\vec{F}_b = \iint_S d\vec{F}_b = -\frac{\pi\varepsilon a^2}{2}\left[\frac{(V_a - V_b)}{(a-b)}\right]^2 \vec{e}_z \ [N]$$

$r = a$'daki kuvvet:

$$r = a \qquad d\vec{F}_a = \rho_a\, dS\,\frac{\vec{E}(r=a)}{2} = \rho_a\, a^2 \sin\theta d\theta d\varphi \left[\frac{1}{2}\frac{(V_a - V_b)}{(a-b)}\frac{ab}{a^2}\vec{e}_r\right]$$

$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z$ ve ρ_a'yı yerine yazıp düzenleyelim.

$$d\vec{F}_a = \frac{\varepsilon b^2}{2}\left[\frac{(V_a - V_b)}{(a-b)}\right]^2 \left[\sin^2\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \sin^2\theta\sin\varphi\vec{e}_y + \sin\theta\cos\theta\vec{e}_z\right] d\theta d\varphi$$

$$\vec{F}_a = \iint_S d\vec{F}_a = \frac{\pi\varepsilon b^2}{2}\left[\frac{(V_a - V_b)}{(a-b)}\right]^2 \vec{e}_z \ [N]$$

Küreler arasındaki bölgede depo edilen enerji:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\theta=0}^{\pi}\int\limits_{r=a}^{b} |\vec{E}|^2 dv \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{(V_a - V_b)}{a-b}\right]^2 a^2b^2 \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\theta=0}^{\pi}\int\limits_{r=a}^{b} \frac{1}{r^4} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{(V_a - V_b)}{a-b}\right]^2 a^2b^2 \int\limits_{r=a}^{b}\frac{1}{r^2}dr \int\limits_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta d\theta \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \\
&= \frac{2\pi ab\varepsilon}{b-a}\left(V_a - V_b\right)^2 \quad [joule]
\end{aligned}$$

Son olarak bu sistemin kapasitesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$C = \frac{Q_b}{V_b - V_a} = \frac{Q_a}{V_a - V_b} = \frac{4\pi\varepsilon\, ab}{b-a} \quad [F]$$

3 MAGNETOSTATİK

Önceki bölümde ele aldığımız olaylar duran $q_1, q_2, \cdots, q_n$ yüklerinin yine duran bir q yüküne etki ettirdiği elektriksel kuvvetin nasıl olduğu ile ilgiliydi. q_i yükleri dururken q yükü hareket etse de etki eden kuvvet değişmez. Buna karşılık, q ile beraber q_i yükleri de hareket halinde ise q'ya etki eden kuvvet Coulomb Yasasının söylediğinden farklı olur.

Lorentz Yasası : Bir $\vec{E}$ elektrik alanı içinde belirli bir $\vec{v}$ hızıyla hareket eden bir q yüküne etki eden elektrik kuvvet $\vec{F}$ olsun. $\vec{F} - q\vec{E}$ farkı $q\vec{v}$ 'ye diktir ve lineer olarak bağlıdır.

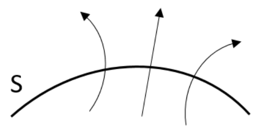
$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{3.1}$$

Eğer q 'ya kuvvet etki ettiren bütün yükler sabit ise $\vec{B} = 0$ olur. $\vec{B}$ 'nin varlığının sebebi hareket halindeki yüklerdir. $\vec{B}\,(\vec{r}, t)$ 'ye *magnetik endüksiyon* denir. Dersin bu bölümünde $\vec{B}$ 'nin *zamandan bağımsız* olduğu durumu inceleyeceğiz. Bu türden olaylar *magnetostatik olaylar* olarak bilinir. Bahsettiğimiz $\vec{B}$ magnetik endüksiyonunu hesaplamak esas problemimiz olacaktır.

Biot-Savart Yasası : Hareket halindeki yüklere ilişkin $\rho\,(x, y, z)$ yoğunluk fonksiyonu ile $\vec{v}\,(x, y, z)$ hız alanı zamandan bağımsız ise bir dv hacim elemanı içinde bulunan dq yükünün, kendisine göre yer vektörü $\vec{r}\,'$ olan bir noktada yaratılan magnetik endüksiyon

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, dq\, \frac{\vec{v} \times \vec{r}\,'}{r'^{\,3}} \tag{3.2}$$

olup ve $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ $[H/m]$ 'dir ve ***boşluğun magnetik geçirgenliği*** olarak adlandırılmaktadır.



Yüklerin hareket halinde bulunduğu bir bölgede bir S yüzeyinin bir tarafından diğer tarafına Δt zaman aralığında ΔS yüzeyinden geçen yük Δq olsun.

$$I_{\Delta S} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \tag{3.3a}$$

$$I_S(t) = \lim_{\substack{\Delta S \to 0 \\ \Delta t \to 0}} I_{\Delta S} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} \tag{3.3b}$$

$I_S(t)$, S 'den geçen elektrik akımının t anındaki şiddeti olarak adlandırılır. Akım birimi ampère olarak adlandırılır ve A ile gösterilir. Yüklerin hareket halinde olduğu bölgede yoğunluğu ρ ve bunların hız alanı $\vec{v}$ olsun.

$$\vec{J} = \rho\vec{v} \quad [A/m^2] \quad \text{Akım yoğunluğu} \tag{3.4}$$

Burada $\rho = \dfrac{dq}{dv}$ 'dir.

$$dq\,\vec{v} = \rho\, dv\, \vec{v} = \rho\, \vec{v}\, dv = \vec{J}\, dv$$

Bu son ifade Biot-Savart Yasasında yerine yazılırsa,

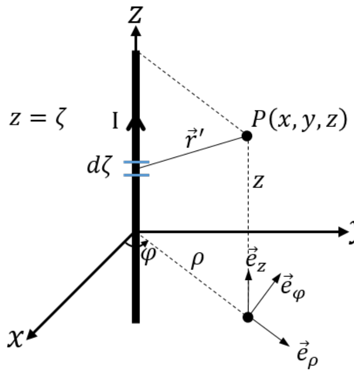
$$d\vec{B}\,(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\, \vec{J}\,(\xi, \eta, \zeta) \times \frac{\vec{r}\,'}{r'^{\,3}}\, dv \tag{3.5}$$

elde edilir. Biot-Savart Yasasının bu ifadesi herhangi bir akım elemanı tarafından meydana getirilen magnetik endüksiyonun hesaplanmasında kullanılır. Eğer birçok akım elemanı varsa süperpozisyon yapılır.

$$d\vec{B}\,(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \vec{J}_i \times \frac{\vec{r}_i\,'}{r_i'^{\,3}}\, dv_i \tag{3.6}$$

$$\vec{B}\,(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}\,(\xi, \eta, \zeta) \times \frac{\vec{r}\,'}{r'^{\,3}}\, dv \tag{3.7}$$

Örnek 9. (Bir çizgisel akımın alanı)



Örnek olarak bir çizgisel akımın alanını hesaplayalım. $z-$ekseni boyunca I şiddetindeki akıma ilişkin $\vec{J}$ akım yoğunluğu

$$\vec{J}(\xi,\eta,\zeta) = I\,\delta(\xi)\delta(\eta)\vec{e}_z \tag{3.8}$$

yazılır. $\vec{H}$ magnetik alan vektörünü göstermek üzere $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ olarak tanımlanır.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)\delta(\eta)\,\vec{e}_z\times\frac{\vec{r}'}{r'^{\,3}}d\xi\,d\eta\,d\zeta \tag{3.9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \quad \text{kullanılarak ve} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)d\xi = 1\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\eta)d\eta = 1\,, \quad \text{olduğundan}$$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{e}_z\times\frac{\vec{r}'}{r'^{\,3}}\,d\zeta \tag{3.10}$$

indirgenir. Şekilden $\vec{r}'$ vektörü şöyle yazılır,

$$\vec{r}' = \rho\vec{e}_\rho + (z-\zeta)\vec{e}_z\,, \quad r' = \sqrt{\rho^2+(z-\zeta)^2}$$

$$\vec{e}_z\times\vec{r}' = \vec{e}_z\times[\,\rho\vec{e}_\rho + (z-\zeta)\vec{e}_z\,] = \rho\vec{e}_\varphi$$

ve (3.10) 'de yerine konursa

$$\vec{H} = \frac{I\rho}{4\pi}\vec{e}_\varphi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta}{[\rho^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}} \tag{3.11}$$

olur. Bu integrali hesaplayabilmek için değişken dönüşüm yapmak gerekir.

$$(z-\zeta) = \rho\tan\psi \quad d\zeta = -\rho\left[1+\tan^2\psi\right]d\psi$$
$$d\zeta = -\rho\frac{1}{\cos^2\psi}d\psi$$

$$\rho^2+(z-\zeta)^2 = \rho^2+\rho^2\tan^2\psi = \rho^2\left(1+\tan^2\psi\right) = \rho^2\frac{1}{\cos^2\psi}$$

Bu ifadeler (3.11) integralinde yerine yazılırsa ve ψ açısının karşılığı da integralde sınırlara yazılırsa,

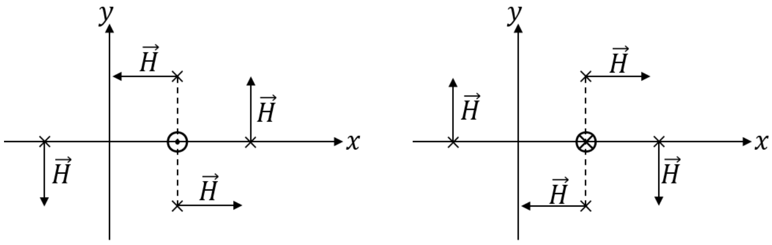
$$\vec{H} = -\frac{I\rho}{4\pi}\vec{e}_\varphi\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\frac{\rho\frac{1}{\cos^2\psi}}{\rho^3\frac{1}{\cos^3\psi}}d\psi$$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi\rho}\vec{e}_\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\psi d\psi$$

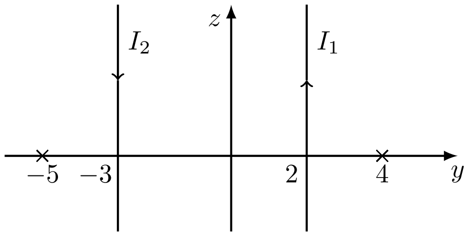
$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi \tag{3.12}$$

elde edilir. Bu sonuç fizik derslerinde sağ el kuralı olarak anlatılır. Bir telden akım akıyorsa, sağ el baş parmağı tel boyunu ve akım yönünü gösterecek şekilde tutulur. Diğer dört parmağımız magnetik alanı hesaplamak istediğimiz yönü göstermek üzere açık tutulur ve sonra bu doğrultu ile 90°'lik açı yapacak şekilde kıvrılarak magnetik alanın yönü bulunur.

Şekil (2) incelendiğinde ⊙ kağıttan bize doğru akan akımı, ⊗ kağıt düzlemine doğru akan akımın yönü göstermektedir. Her iki durumda magnetik alanın değişik noktalardaki yönünü sağ el kuralını kullanarak deneyiniz.



Şekil 2



Şekil 3

Örnek 10. Şekil (3)'de görüldüğü yönde, $z-$eksenine paralel iki tel boyunca I_1 ve I_2 akımları akan telin $y = -5,\ 0,\ 4$ noktalarında oluşturduğu toplam magnetik alanı bulalım.

$$\vec{H}(-5) = \frac{I_2}{2\pi\, 2}(-\vec{e}_x) + \frac{I_1}{2\pi\, 7}\vec{e}_x = \frac{\vec{e}_x}{2\pi}\left(\frac{I_1}{7} - \frac{I_2}{2}\right)$$
$$\vec{H}(0) = \frac{I_2}{2\pi\, 3}\vec{e}_x + \frac{I_1}{2\pi\, 2}\vec{e}_x = \frac{\vec{e}_x}{2\pi}\left(\frac{I_1}{2} + \frac{I_2}{3}\right)$$
$$\vec{H}(4) = \frac{I_2}{2\pi\, 7}\vec{e}_x + \frac{I_1}{2\pi\, 2}(-\vec{e}_x) = \frac{\vec{e}_x}{2\pi}\left(\frac{I_2}{7} - \frac{I_1}{2}\right)$$

Örnek 11. $(4, 0)$ noktasında bulunan $z-$ eksenine paralel telden, $+z$ yönünde I akımı akmaktadır. $(0, 3)$ noktasında oluşan magnetik alanın yönünü bulunuz.

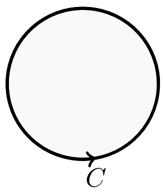
3.1 Magnetik Alanın Temel Denklemleri

Magnetik alanın sağladığı temel denklemlerin nasıl elde edildiği verilmeyecek, sadece denklemler verilecektir. Magnetik alanı oluşturan $\vec{J}$ akım kaynakları $\operatorname{div}\vec{J} = 0$ şartını sağlıyorsa

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} \tag{3.13a}$$
$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \tag{3.13b}$$
$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad \text{(bünye denklemi)} \tag{3.13c}$$

denklemleri sağlanmaktadır. Biz bu denklemlerin kullanımı üzerinde duracağız.

İlk denklem (3.13a) 'yı ele alalım. (3.13a) denklemini bir regüler yüzey parçası üzerinde integre edelim. C eğrisi de bu yüzey parçasının çevresi olsun.



Şekil 4

$$\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_S \operatorname{rot}\vec{H}\cdot d\vec{S} \tag{3.14}$$

Green formülü kullanılarak

$$\int_S (\mathrm{rot}\,\vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{H} \cdot d\vec{c} \tag{3.15}$$

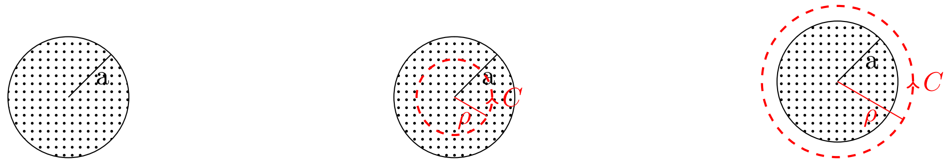
yazılır. Bu durumda magnetostatikte **Ampère Formülü** olarak bilinen sonuç elde edilir.

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{c} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \tag{3.16}$$

Bu formül magnetik alanın bir C eğrisi boyunca integralinin, C 'nin çevrelediği yüzeyden geçen toplam akıma eşit olduğunu gösterir.

Bu formülü iki temel uygulamasını yapacağız.

Örnek 12 (3)**.** Yarıçapı a olan iletken telden I şiddetinde akım akmaktadır (Şekil 5a). Bu akım sebebiyle telin içinde ve dışında oluşacak magnetik alanı hesaplayalım.



(a) (b) (c)

Şekil 5:

I şiddetindeki akımın kesit boyunca homojen dağıldığını kabul edelim. Problemi iki ayrı bölgede ele almamız gerekmektedir.

- $\rho < a$ bölgesinde bir C çevresi seçtik (Şekil 5b). Bu çevreyi pratik olması bakımından ρ yarıçaplı bir daire olarak seçtik. Şimdi Ampère formülünü bu C çevresi ve kuşattığı S yüzeyi için yazalım.

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{c} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \text{S'den geçen toplam akım}$$

Problemde verilenlerden akımın kesit boyunca homojen olduğunu biliyoruz. Öyleyse bu akım sebebiyle telin içinde ulaşacak magnetik alan (sağ el kuralı sonucu) olsa olsa yarıçap ρ 'nun fonksiyonu ve $\vec{e}_\varphi$ yönündedir.

$$\vec{H} = H(\rho)\,\vec{e}_\varphi$$

Eğri boyunca $d\vec{c} = dc\,\vec{e}_\varphi = \rho d\varphi \vec{e}_\varphi$ 'dir.

$$\begin{aligned}\int_C \vec{H} \cdot d\vec{c} &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} H(\rho)\,\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \rho d\varphi = H(\rho)\,\rho \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi\rho H(\rho)\end{aligned}$$

olur. Formülün sağ tarafına sadece bu kesitten geçen akım miktarını yazmamız gerekiyor. Basit bir orantı ile yazabiliriz.

$$\left.\begin{array}{ll}\pi a^2 & I \\ \pi\rho^2 & I_C\end{array}\right\} \Rightarrow I_C = \frac{\pi\rho^2\, I}{\pi a^2} = \frac{\rho^2\, I}{a^2}$$

Ampère formülünün sol ve sağ tarafına yazacaklarımızı hesapladık, öyleyse sonuç:

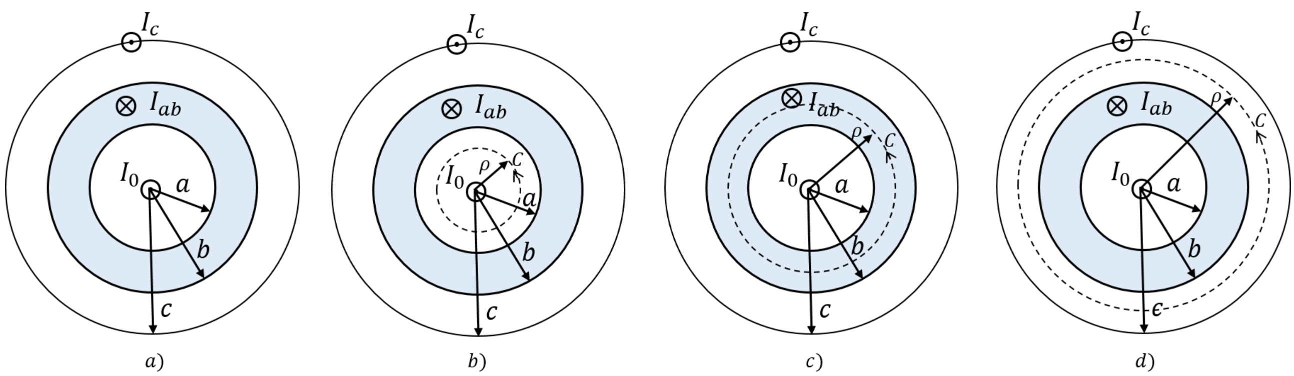
$$2\pi\rho H(\rho) = \frac{\rho^2}{a^2}\, I \Rightarrow H(\rho) = \frac{\rho\, I}{2\pi a^2}$$

$$\vec{H} = \frac{\rho\, I}{2\pi a^2}\,\vec{e}_\varphi\,, \quad \rho < a\,.$$

- $\rho > a$ bölgesinde (Şekil 5c) magnetik alanı hesaplamak için bu bölgede bir çevre seçmemiz gerekiyor. Bu çevrenin kuşattığı yüzeyden toplam I akımı akıttığı biliyoruz. Ampère formülüne $2\pi\rho H(\rho) = I$ yazılır.

$$H(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho} \Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\,\vec{e}_\varphi$$

elde edilir. Bu sonuç da daha önce hesapladığımız sonsuz uzun bir telden geçen I akımı sebebiyle meydana gelen magnetik alanı vermektedir.



Şekil 6

Örnek 13 (4)**.** Bir başka örnek de Şekil 6a ’daki gibi olsun. Merkezde sonsuz ince bir tel üzerinden I_0 akımı $\odot$ kağıt düzleminden bize doğru , $\rho \in (a, b)$ bölgesi de kalın iletken silindir olup kesit üzerinden toplam I_{ab} akımı $\otimes$ kağıt düzlemine doğru, $\rho = c$ yarıçaplı iletken silindir sonsuz ince olup yine I_0 ile aynı yönde toplam I_C akımı akmaktadır. Uzayın her bölgesinde toplam magnetik alanı bulalım.

- $\rho \in (0, a)$ bölgesinde (Şekil 6b) bir C eğrisi seçelim. Bu eğri ve kuşattığı yüzey üzerinde Ampère formülünü yazalım.
$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{c} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$
Magnetik alan, akımların homojen dağılımı sebebiyle
$$\vec{H} = H(\rho)\,\vec{e}_\varphi$$
şeklinde olacaktır. Bundan dolayı
$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{c} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} H(\rho)\,\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \rho d\varphi = H(\rho)\,\rho \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi$$
$$= 2\pi\rho H(\rho)$$
seçtiğimiz C çevresi içinde sadece I_0 akımı aktığından
$$2\pi\rho H(\rho) = I_0 \Rightarrow H(\rho) = \frac{I_0}{2\pi\rho}$$
$$\vec{H} = \frac{I_0}{2\pi\rho}\,\vec{e}_\varphi\,, \quad \rho \in (0, a) \quad \text{olacaktır.}$$

- $\rho \in (a, b)$ için (Şekil 6c) Ampère formülünün sol tarafı aynı olacaktır. C çevresini seçelim ve kesitten geçen akımı hesaplayalım. Akımın yönüne dikkat edelim. $\rho \in (a, b)$ bölgesinde kesitin alanı $\pi(b^2 - a^2)$ kadardır. Orantı ile
$$\left.\begin{array}{ll} \pi(b^2 - a^2) & I_{ab} \\ \pi(\rho^2 - a^2) & I_S \end{array}\right\} \Rightarrow I_S = \frac{\pi(\rho^2 - a^2)\,I_{ab}}{\pi(b^2 - a^2)} = \frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2} I_{ab} \quad \text{bulunur.}$$
$$2\pi\rho H(\rho) = I_0 - I_{ab}\frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2}$$
$$\vec{H} = \frac{I_0}{2\pi\rho}\,\vec{e}_\varphi - \frac{I_0}{2\pi\rho}\frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2}\vec{e}_\varphi, \quad \rho \in (a, b) \quad \text{olur.}$$
I_{ab}, I_0 ’a göre ters yönde olduğu için önüne $-$ geldi.

- $\rho \in (b, c)$ bölgesinde (Şekil 6d) magnetik alanı hesaplamak için bu bölgede bir C çevresi seçelim. Bu C çevresinin içinden toplam $I_0 - I_{ab}$ akımı akmaktadır. Öyle ise
$$2\pi\rho H(\rho) = I_0 - I_{ab}$$
$$\vec{H} = \frac{I_0 - I_{ab}}{2\pi\rho}\,\vec{e}_\varphi\,, \quad \rho \in (b, c) \quad \text{olur.}$$

- $\rho > c$ bölgesinde yine bir C eğrisi seçmeliyiz. Bu C çevresinden geçen akım da $I_0 - I_{ab} + I_C$ kadar olacağından toplam magnetik alan
$$\vec{H} = \frac{I_0 - I_{ab} + I_C}{2\pi\rho}\,\vec{e}_\varphi\,, \quad \rho > c \quad \text{olur.}$$

3.2 Magnetik Devre

Ampère formülünün ikinci uygulaması magnetik devre kavramıdır. Elektrik makinalarının hesabında çok önemli bir rol oynayan magnetik devre kavramı bu formüle dayanmaktadır. Bir A noktası civarında magnetik alan çizgilerinin çok iyi bir yaklaşıklıkla şekildeki gibi bir durum aldığını varsayalım. A merkezli bir S küresinin parçaları üzerinde magnetik endüksiyonun aldığı değerler S 'nin geri kalanı üzerindeki değerlere göre çok büyüktür. Sonuç olarak;

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0 \tag{3.17}$$

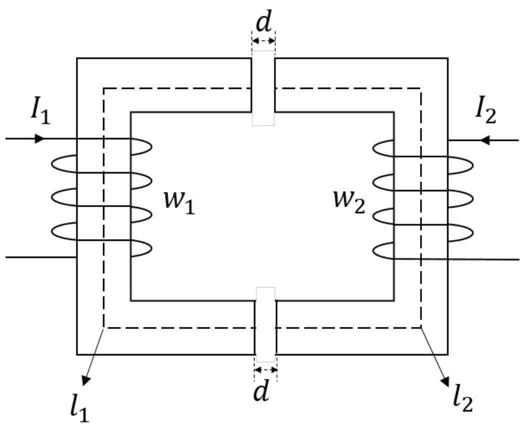
yazılabilir. Burada

$$\phi_i = \int_{S_i} \vec{B} \cdot d\vec{S}\,, \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.18}$$

olup S_i 'den çıkıp giden **magnetik akı**dır.

A noktası civarında gözlenen olayın başka noktalarda da gözlenebildiği ne verilecek örnekteki gibi kapalı çevrelerin oluştuğunu ve bu çevrelerde magnetik alanın sirkülasyonu için Ampère formülün yazılabildiğini varsayalım. Magnetik devrenin kollarını oluşturan malzemeler ferromagnetik malzemelerdir. Bu türden malzemeler üzerinde magnetik alan ile magnetik endüksiyon arasındaki ilişki lineer olmayıp histerezis eğrisi denen bir takım eğriler cinsinden verilir. Bu kavramların uygulaması ve açıklaması örnekler üzerinden verilecektir.

Örnek 14. Şekilde görülen magnetik devrede d hava aralığı ne olmalıdır ki bu aralıkta uyarılan magnetik endüksiyon $B = 0.5\,T$ olsun. Devrede; $\ell_1 = 0.5\,m$, $\ell_2 = 1\,m$, $w_1 = 500$, $w_2 = 200$, $I_1 = 10\,A$, $I_2 = 7\,A$, μ_{1r} silisyumlu sac, μ_{2r} dökme demir. $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$. Her iki kolda kesit aynıdır.



Şekil 7

$$B_1 = B_2 = B_d = 0,5\ T$$

Her iki kolun yapıldığı malzemeye ilişkin eğrilerden

$$H_1 = 100\,A/m \qquad H_2 = 1600\,A/m$$

Hava aralığında

$$H_d = \frac{B_d}{\mu_0} = 4 \times 10^5\,A/m$$

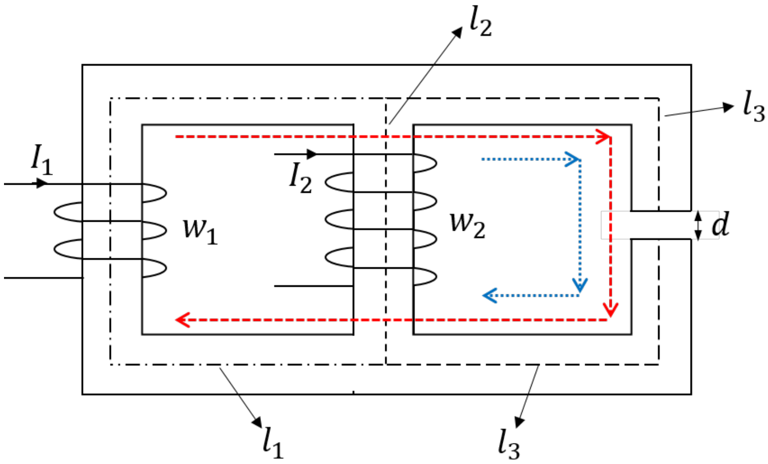
Çevre boyunca Amper yasası dikkate alınarak,

$$\int_{\ell_1} \vec{H} \cdot d\vec{\ell}_1 + 2\int_d \vec{H} \cdot d\vec{\ell}_d + \int_{\ell_2} \vec{H} \cdot d\vec{\ell}_2 = H_1\,\ell_1 + 2H_d\,\ell_d + H_2\,\ell_2 = w_1 I_1 - w_2 I_2$$

Son bağıntıdan,

$$d = \frac{w_1 I_1 - w_2 I_2 - H_1\,\ell_1 - H_2\,\ell_2}{2H_d} = \frac{500 \cdot 10 - 200 \cdot 7 - 100 \cdot 0,5 - 1600 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 10^3} = 2,44\,mm$$

Örnek 15. $B_d = 1\,T$, $I_1 = 4\,A$, $I_2 =?\,A$. Devrede; $\ell_1 = 1\,m$, $\ell_2 = 0,5\,m$, $\ell_3 = 1\,m$, $d = 1\,mm$, $w_1 = 375$, $w_2 = 500$, kesit $S = 20\,cm^2$, malzeme dinamo saçı.



Şekil 8

Hava aralığında

$$H_d = \frac{B_d}{\mu_0} = 8 \times 10^5\,A/m$$

$$B_3 = B_d = 1\,T \quad \Rightarrow \quad H_3 = 300\,A/m$$

Büyük çevre (kesikli çizgi ve ok ile gösterilen) boyunca Amper formülünden,

$$w_1 I_1 = H_1\ell_1 + 2H_3\ell_3 + H_d\ell_d \quad \Rightarrow \quad H_1 = \frac{375 \cdot 4 - 2 \cdot 300 \cdot 1 - 8 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{1} = 100\,A/m \quad \Rightarrow \quad B_1 = 0,45\,T$$

Düğüm denklemi; $\phi_1 + \phi_2 = \phi_3 \qquad (\phi = B \cdot S)$

$$B_1 \cdot S + B_2 \cdot S = B_3 \cdot S \quad \Rightarrow \quad B_1 + B_2 = B_3 \quad \Rightarrow \quad B_2 = B_3 - B_1 = 1 - 0,45 = 0,55\,T \quad \Rightarrow \quad H_2 = 120\,A/m$$

ℓ_2 ve ℓ_3 kollarından oluşan çevrede Amper formülünden

$$H_2\ell_2 + 2H_3\ell_3 + H_d\,d = w_2\,I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{120 \cdot 0,5 + 2 \cdot 300 \cdot 1 + 8 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{500} = 2,92\,A$$