Matematik-1

Fonksiyon Kavramı

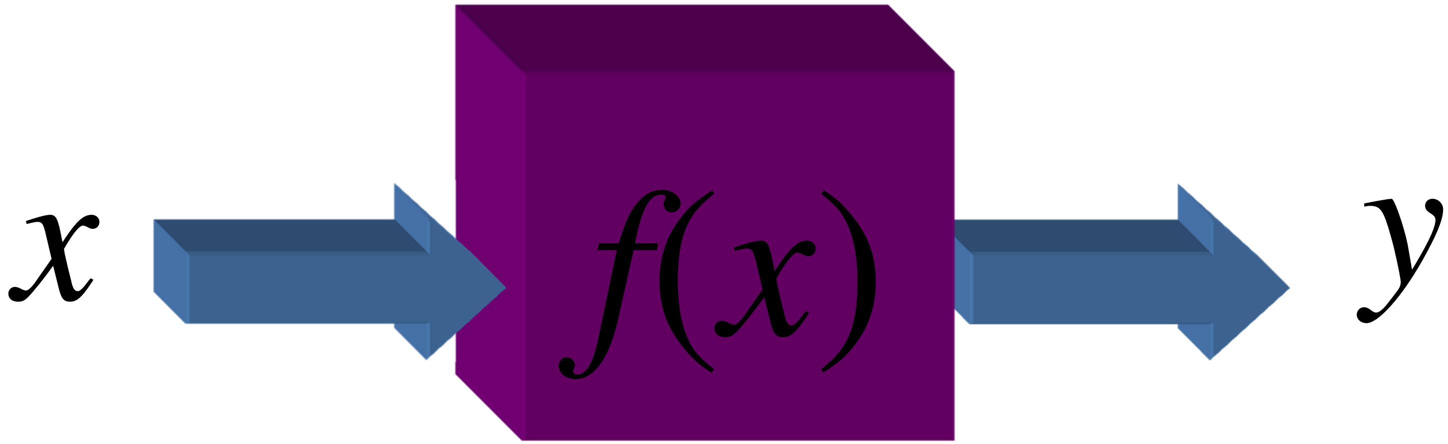
Dr. Alaattin AKYAR

alaattinakyar@duzce.edu.tr

Fonksiyon Kavramı

Bir y değişkeninin aldığı değerler, bir x değişkeninin aldığı değerlere bağlı olarak değişiyorsa y ye x değişkeninin bir fonksiyonu denir.

Genel olarak fonksiyonlar y=f(x) şeklinde gösterilir. Burada x e bağımsız değişken, y ye de bağımlı değişken denir.



Fonksiyon Gösterimi

$$\underbrace{y}_{\text{Bağımlı değişken}} = \underbrace{f}_{\text{Fonksiyonu adı}}\left(\underbrace{x}_{\text{Bağımsız değişken}}\right)$$

Örnek: $y=f(x)=x^2+3x$ fonksiyonunun $x=-1,0$ ve 2 için aldığı değerleri bulunuz.

$x=-1$ için $y=f(-1)=(-1)^2+3.(-1)=1-3=-2$ $\quad(-1,-2)$

$x=0$ için $y=f(0)=0^2+3.0=0+0=0$ $\quad(0,0)$

$x=2$ için $y=f(2)=2^2+3.2=4+6=10$ $\quad(2,10)$

$$-1 \xrightarrow{f} -2 \qquad 0 \xrightarrow{f} 0 \qquad 2 \xrightarrow{f} 10$$

$Ç=\{(-1,-2),(0,0),(2,10)\}$

y ile x arasındaki bağıntı y ye göre çözülmüş ise fonksiyona **açık fonksiyon**, çözülmemiş ise **kapalı fonksiyon** denir.

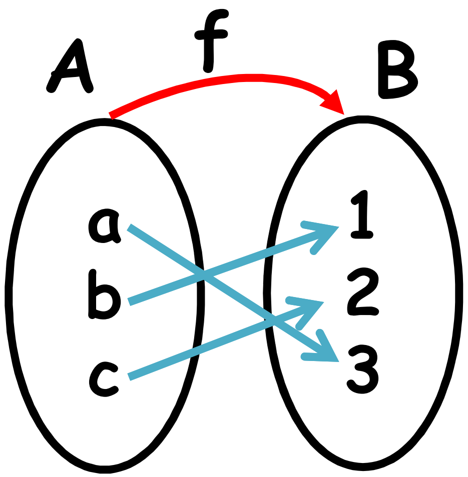
$y=f(x)=x^2-3x$ (Açık fonksiyon)

$x^2+y^2=1$ (Kapalı fonksiyon)

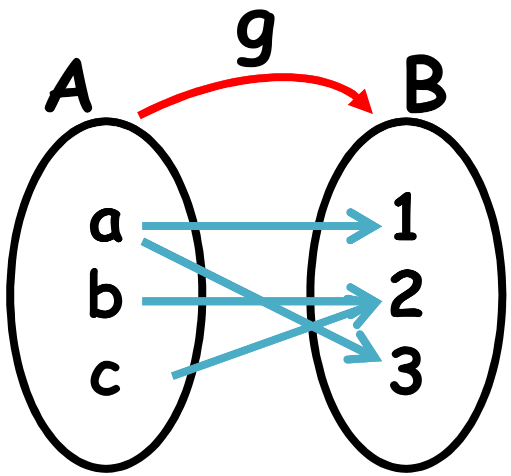
İstenirse bazı kapalı fonksiyonlar açık fonksiyon şekline getirilebilir.

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow y^2=1-x^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{y^2}=\sqrt{1-x^2}$$
$$\Rightarrow \quad y=\sqrt{1-x^2}$$

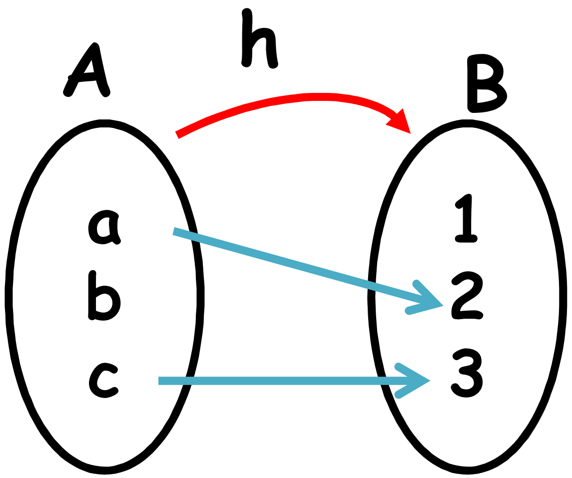
A ve B boş olmayan kümeler olmak üzere A dan B ye tanımlanan bir f bağıntısı A nın her bir elemanını B de bir elemanla eşliyor ve A nın herhangi bir elemanı B de birden fazla elemanla eşleşmiyorsa bu f bağıntısına A dan B ye bir fonksiyon denir. Aşağıdaki gibi gösterilir;



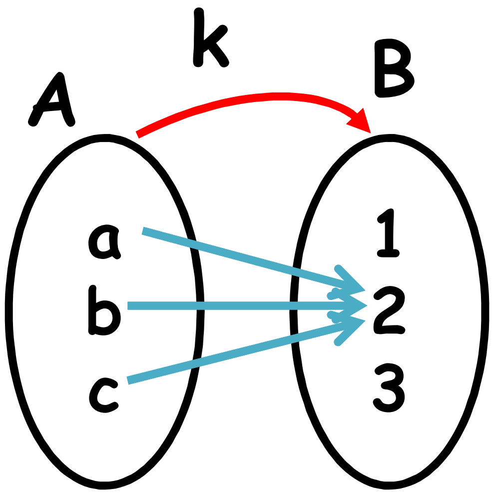
Fonksiyon



Fonksiyon değil

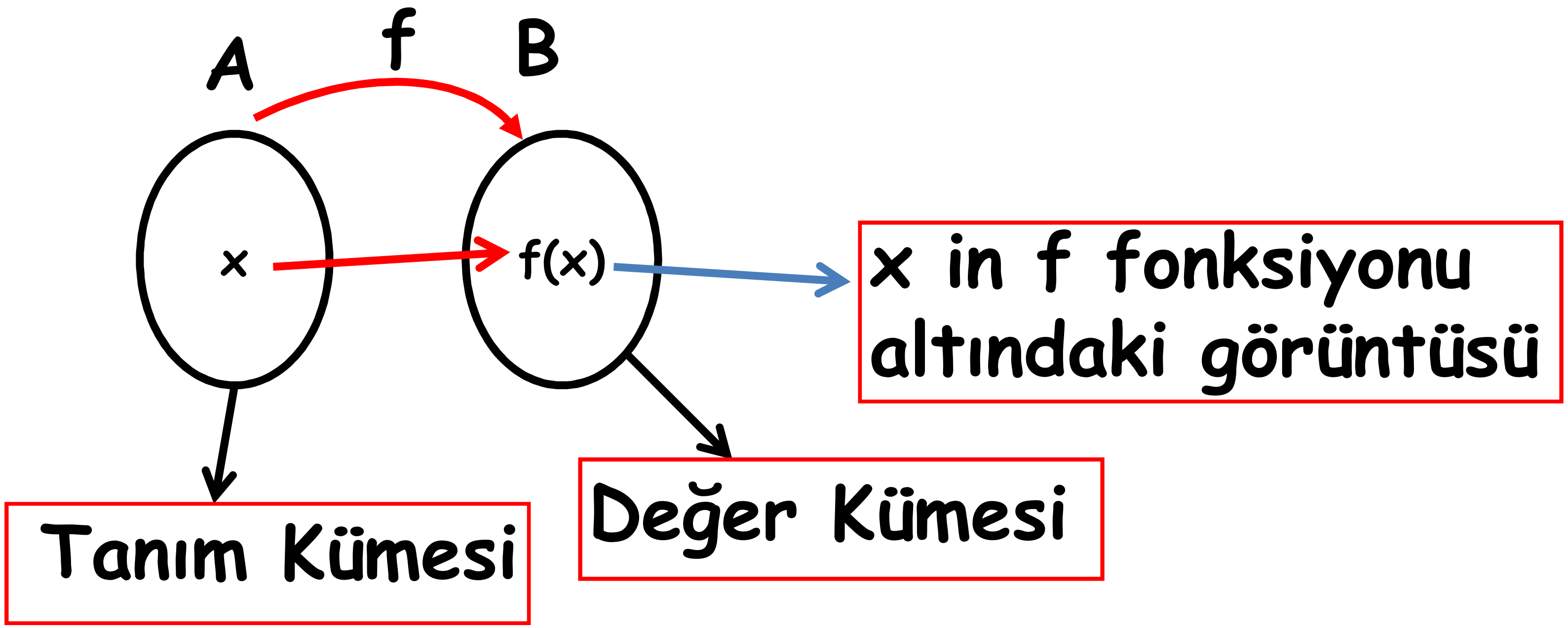


Fonksiyon değil



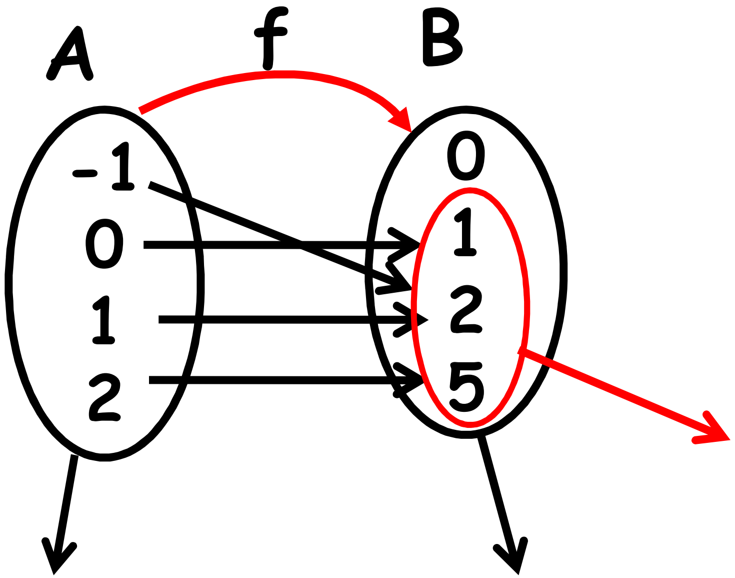
Fonksiyon

A ve B kümeleri verilsin . $f : A \rightarrow B$ kuralı ile verilen bir fonksiyon A kümesindeki her bir elemanı B kümesinde bir eleman ile eşleştirir.



(Bir fonksiyonun şeması)

Örnek:



Görüntü Kümesi

Tanım Kümesi

Değer Kümesi

$f(-1)=2$
$f(0)=1$
$f(1)=2$
$f(2)=5$

$f(A)=\{1,2,5\}$

$A=\{-1,0,1,2\}$ $B=\{0,1,2,5\}$

Yukarıda Venn şeması ile verilen fonksiyon aşağıdaki gibide yazılır;

$$f=\{(-1,2),(0,1),(1,2),(2,5)\}$$

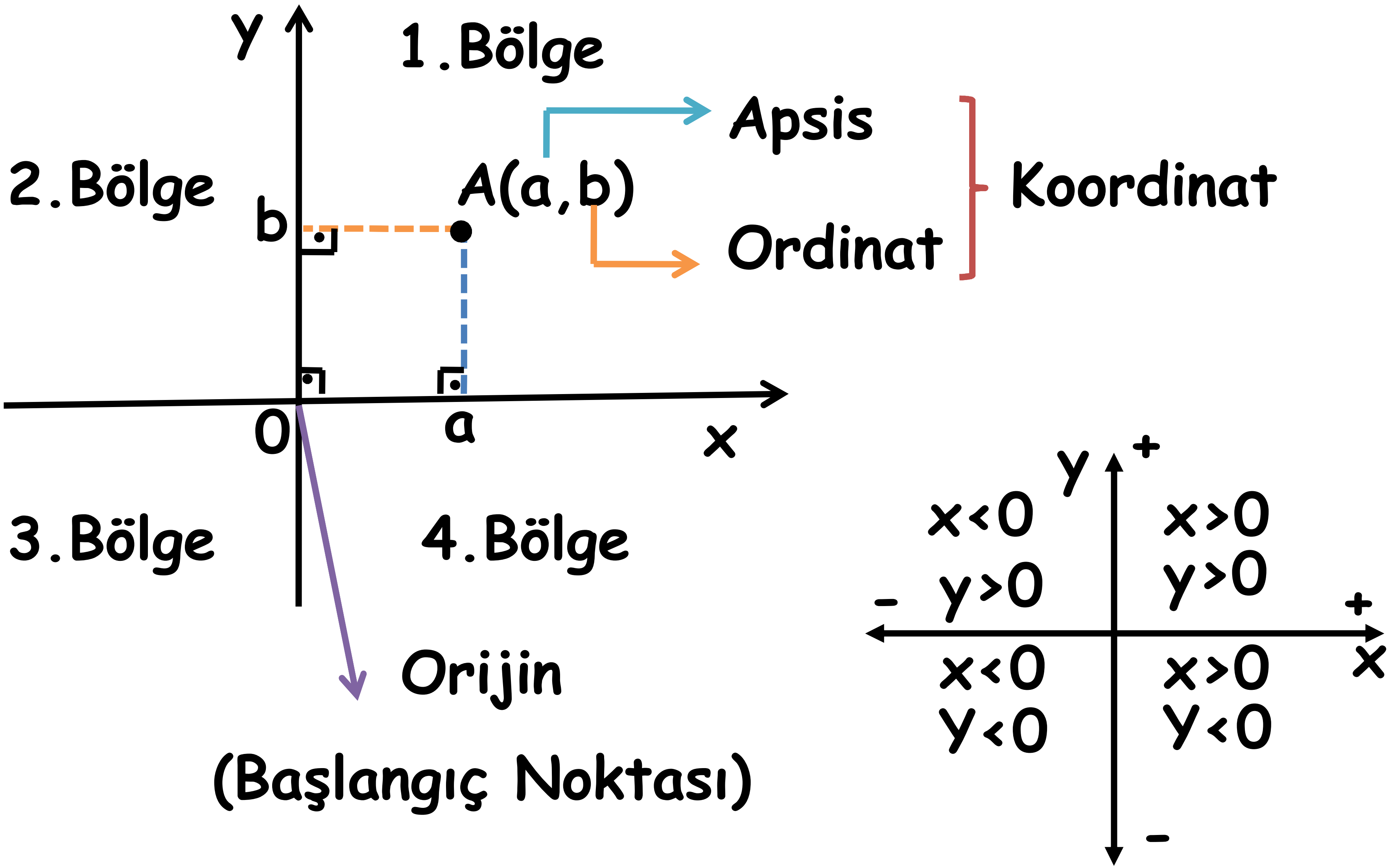
$f=\{(-1,2),(0,1),(1,2),(2,5)\}$

Olarak verilen fonksiyonun kuralını bulalım;

x	y
-1	$(-1)^2+1=2$
0	$0^2+1=1$
1	$1^2+1=2$
2	$2^2+1=5$

Tablo incelendiğinde $y=f(x)=x^2+1$ olduğu görülür.

Dik Koordinat Sistemi



Bir Fonksiyonun Grafiği

$y=f(x)$ şeklinde verilen bir fonksiyonun grafiği, dik koordinat sisteminde (x,y) veya $(x,f(x))$ ikililerine karşılık gelen noktaların kümesidir.

Örnek: Aşağıda verilen fonksiyonun kuralını bulup grafiğini çiziniz.

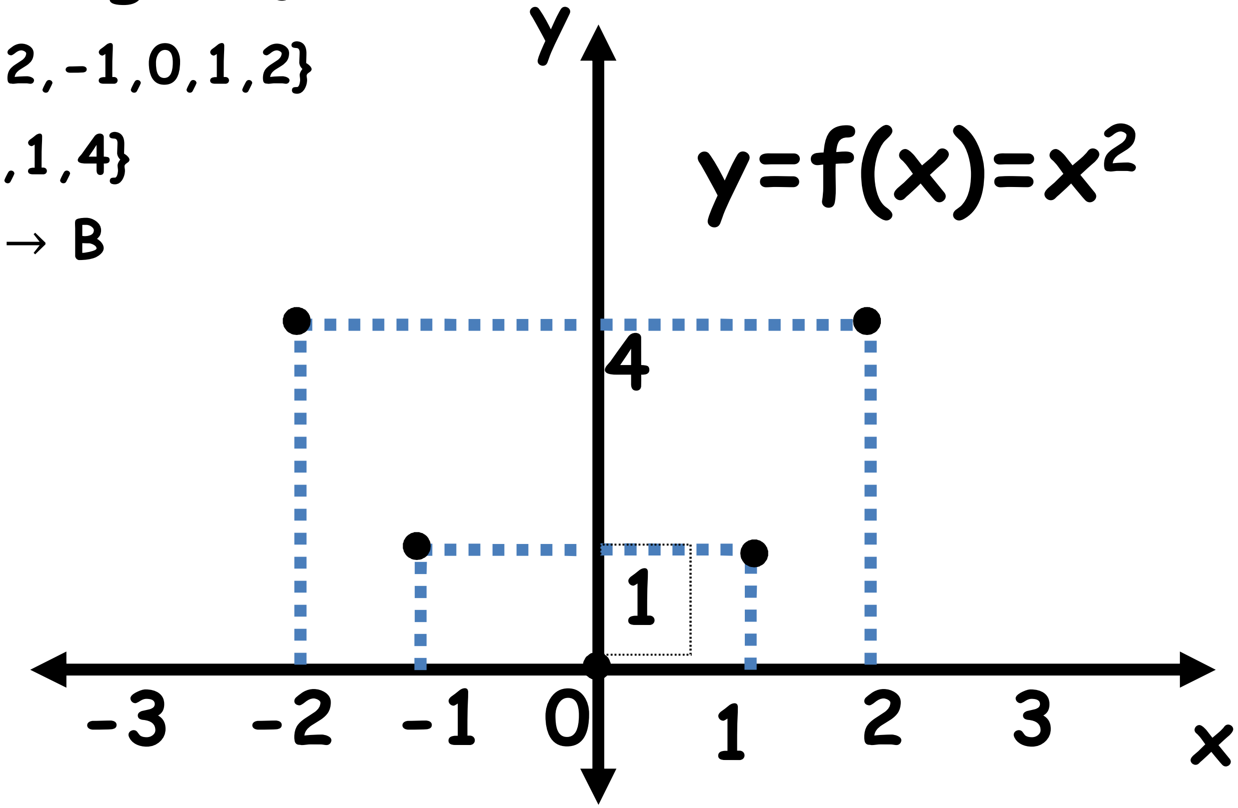
x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

$y=f(x)=x^2$

$A=\{-2,-1,0,1,2\}$

$B=\{0,1,4\}$

$f:A \to B$



Örnek: Aşağıda verilen fonksiyonun kuralını bulup grafiğini çiziniz.

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

$y=f(x)=x^2$

$A=\{-2,-1,0,1,2\}$

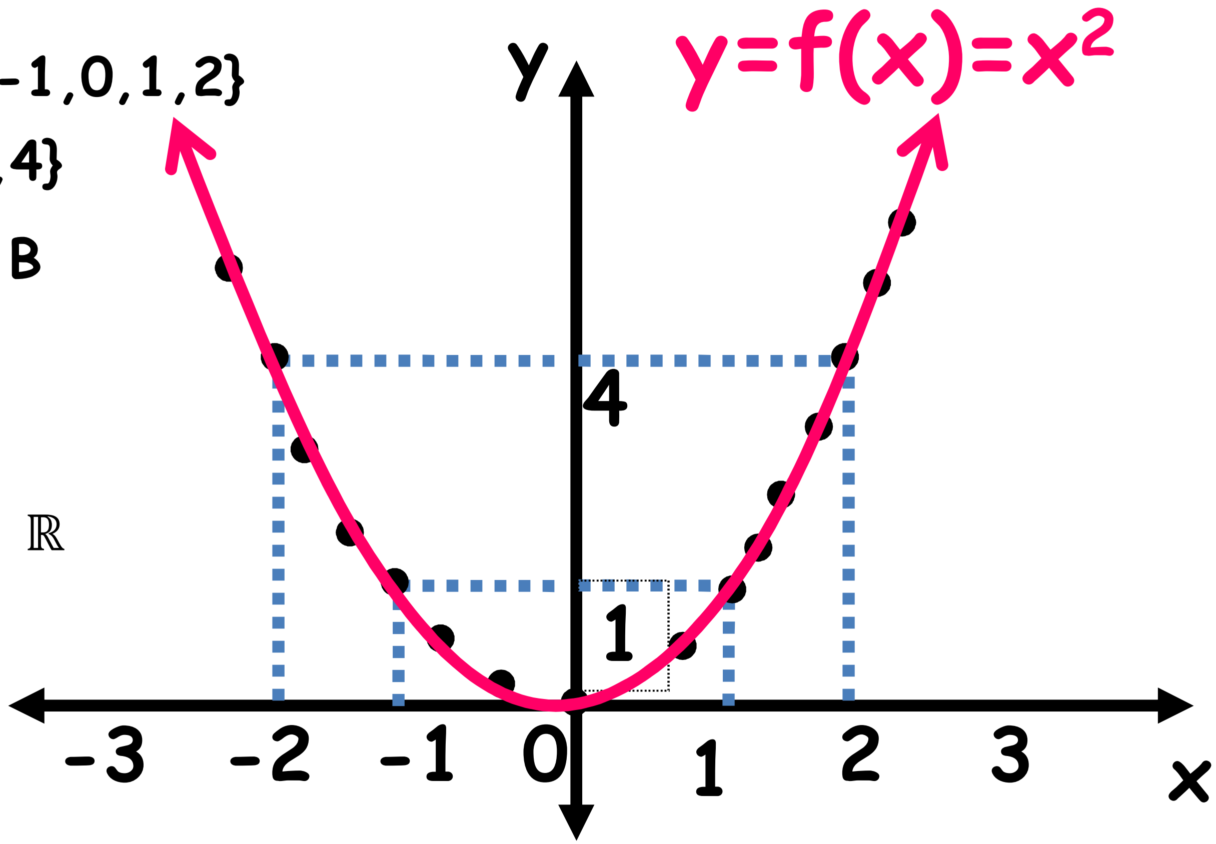
$B=\{0,1,4\}$

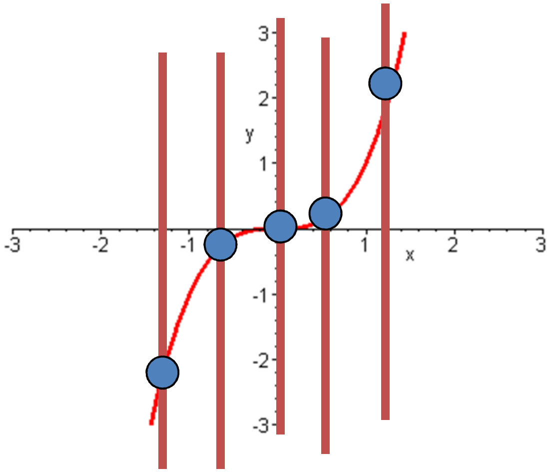
$f:A \rightarrow B$

$A=\mathbb{R}$

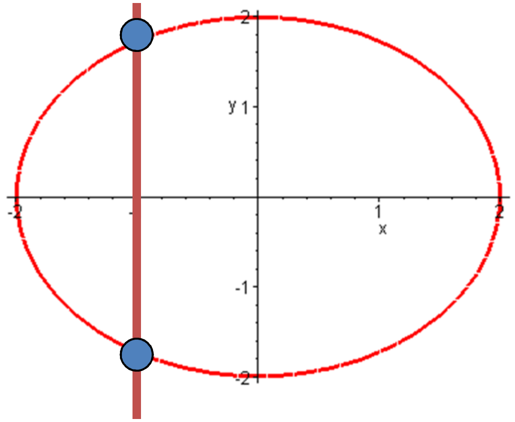
$B=\mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

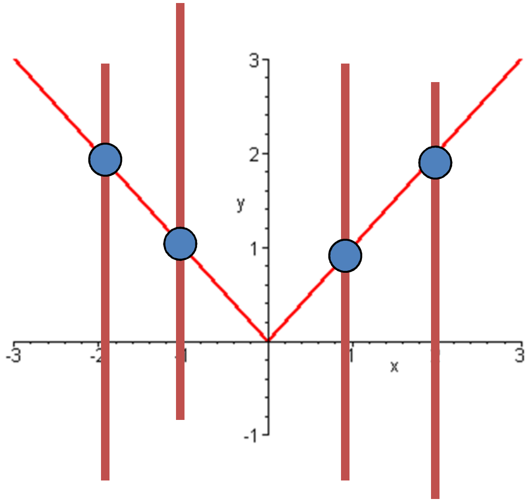




Fonksiyon

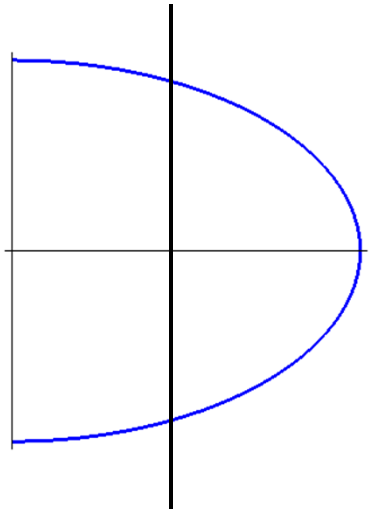


Fonksiyon değil

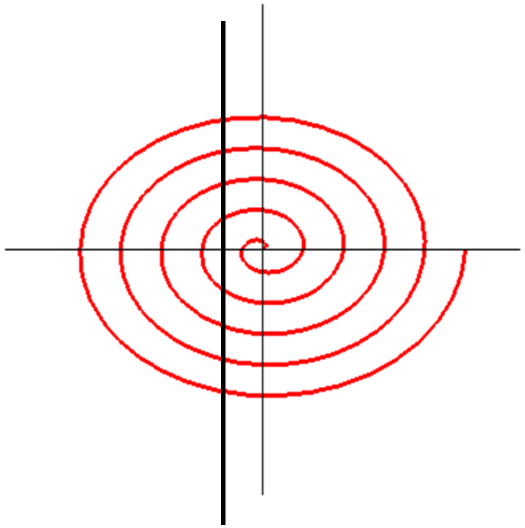


Fonksiyon

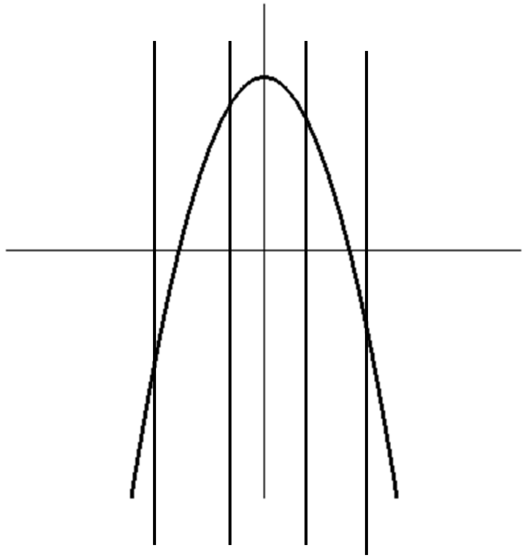
Aşağıda verilen grafiklerin fonksiyon belirtip belirtmediklerini tartışalım;



Fonksiyon değil



Fonksiyon değil

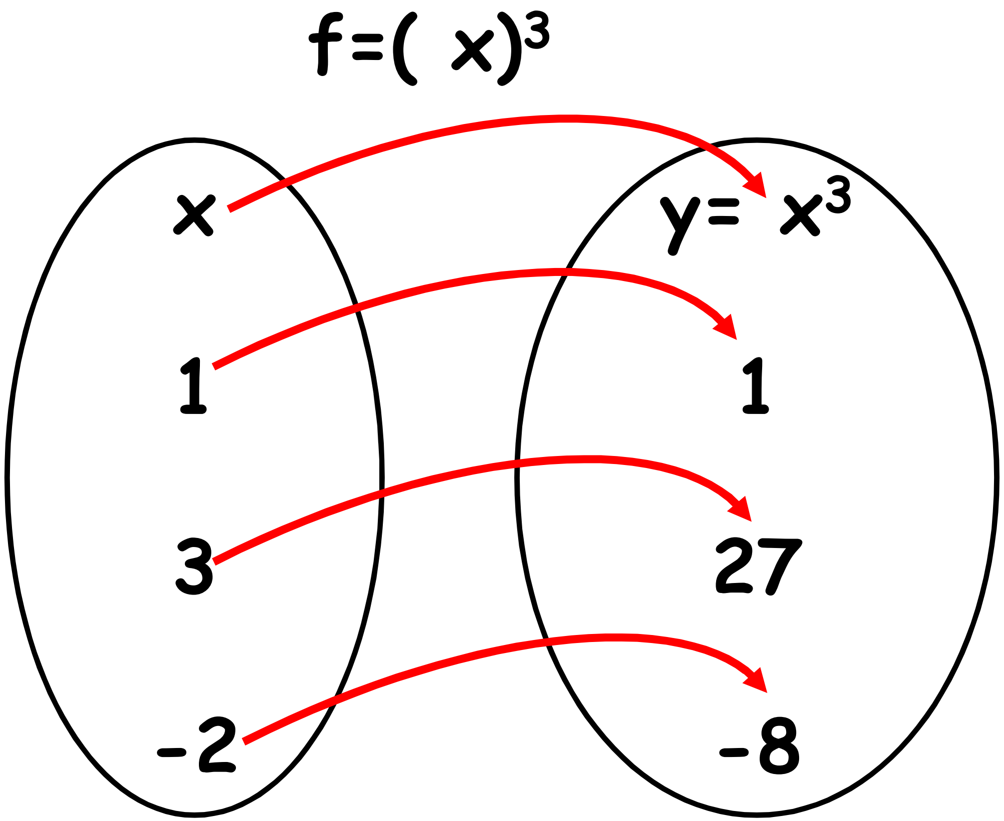


Fonksiyon

Bizden verilen bir fonksiyonun tanım kümesini bulmamız istenebilir.

Örnek:

$y=f(x)=x^3$ kuralı ile verilen fonksiyonu alalım.



$-\infty<x<\infty$ (Tanım Kümesi)

$-\infty<y<\infty$ (Değer Kümesi)

Fonksiyon	Tanım Kümesi	Değer Kümesi
$y=3x^3+x$	$-\infty<x<\infty$	$-\infty<y<\infty$
$y=x^2+1$	$-\infty<x<\infty$	$1\leq y<\infty$
$y=Sinx$	$-\infty<x<\infty$	$-1\leq y\leq 1$
$y=x^2$	$-\infty<x<\infty$	$0\leq y<\infty$

Örnek:

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

$$f(x)=\frac{x}{x^2-1} \Longrightarrow x^2-1\neq 0$$

$$x^2-1=0 \Longrightarrow x^2=1 \Longrightarrow x=\pm 1$$

Tanım kümesi: $R-\{\pm 1\}=R-\{-1,+1\}$

Örnek:

$f(x)=ax^2+bx+c$

$f(x)=\sqrt{x^2-1}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

$$f(x)=\sqrt{x^2-1} \Longrightarrow x^2-1\geq 0$$

$$x^2-1=0 \Longrightarrow x^2=1 \Longrightarrow x=\pm 1$$

a nın işaretinin aynı

a nın işaretinin tersi

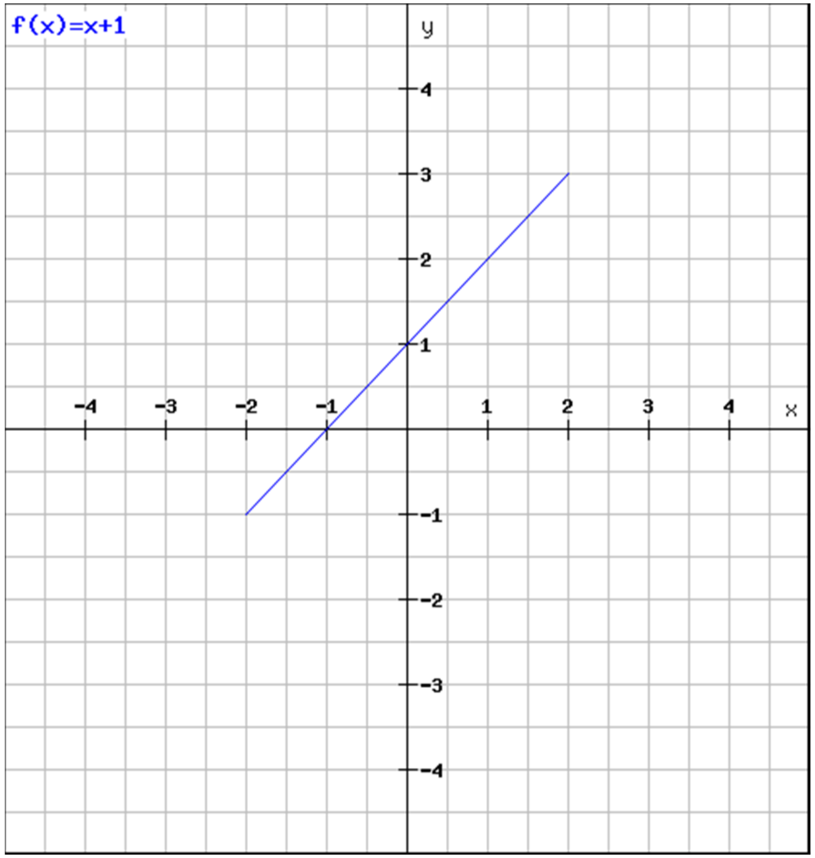
a nın işaretinin aynı

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y		+		−		+	

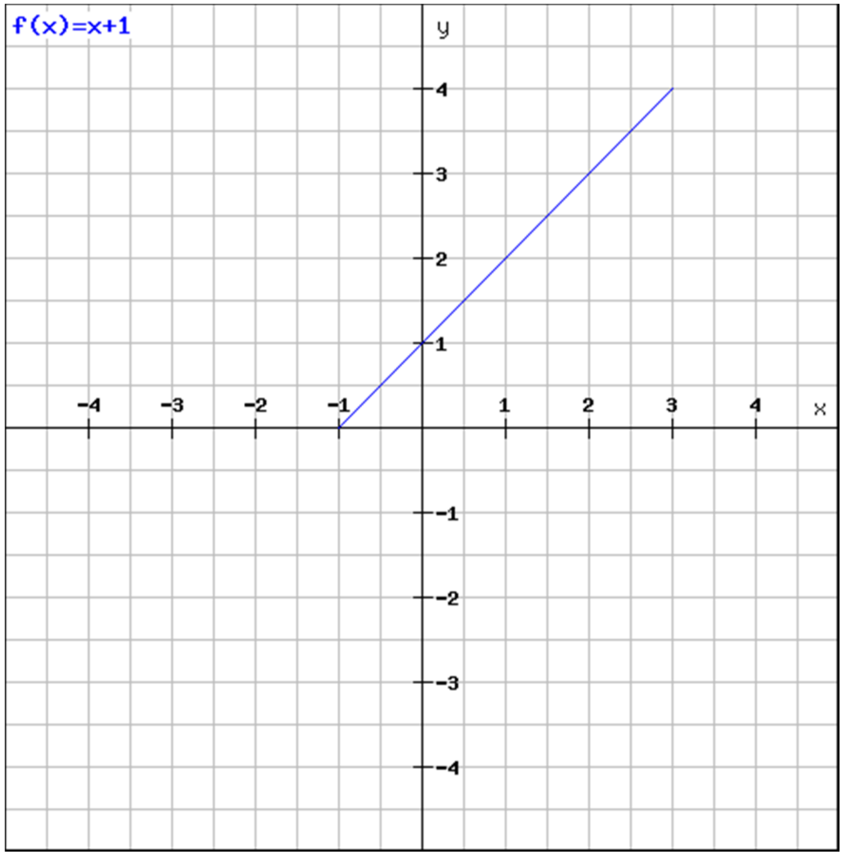
Tanım kümesi: $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

Örnek:

$-2 \leq x \leq 2$ ve $-1 \leq x \leq 3$ için $y = x + 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



$-2 \leq x \leq 2$ için grafik

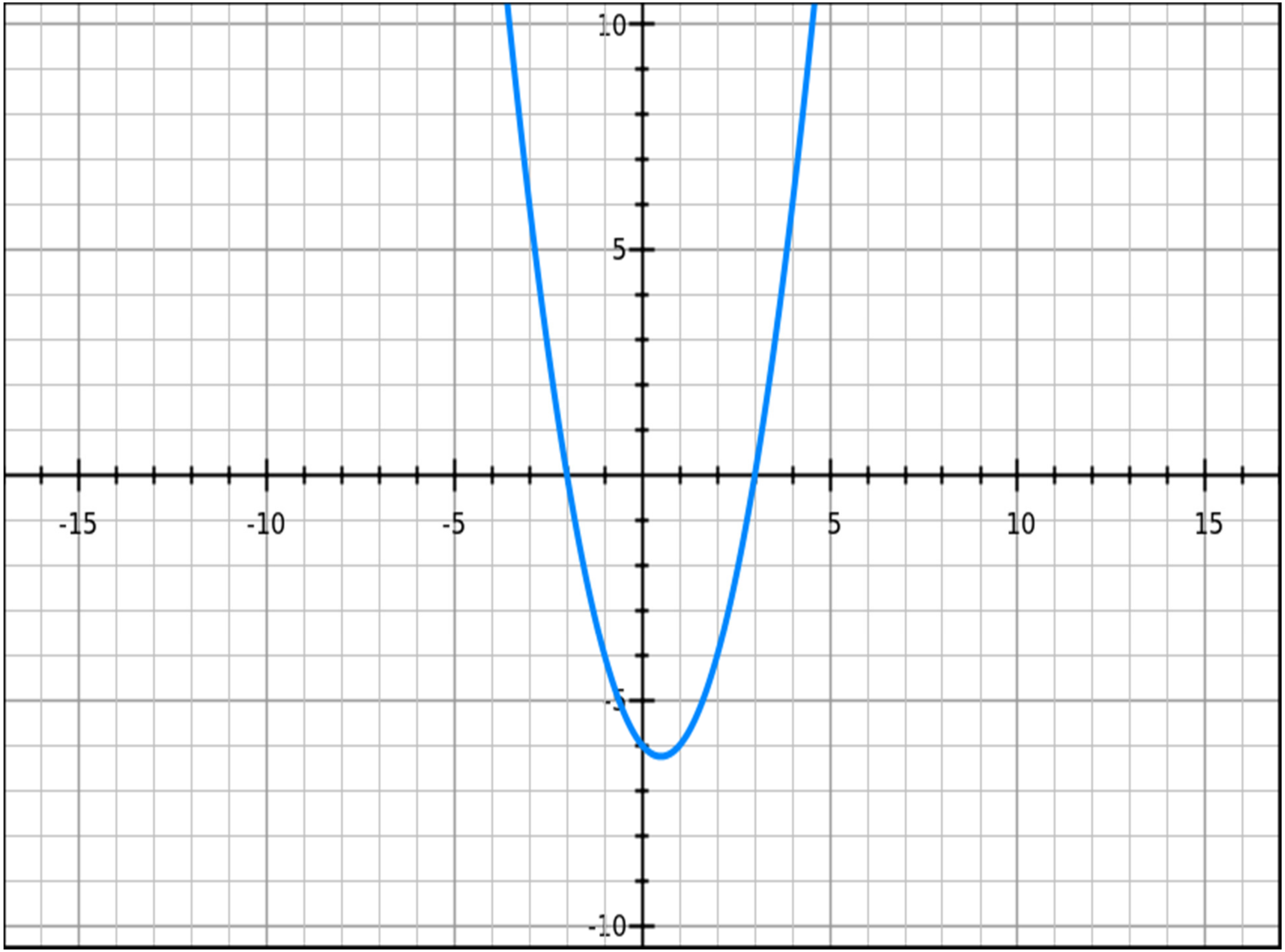


$-1 \leq x \leq 3$ için grafik

Örnek:

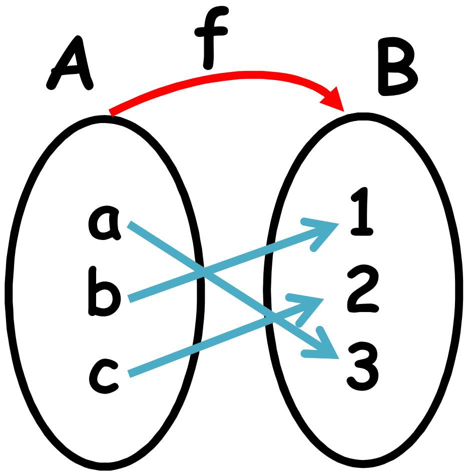
$-4 \leq x \leq 4$ için $y=f(x)=x^2-x-6$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

x	x^2	$-x$	-6	$y=x^2-x-6$
-4	16	4	-6	10
-3	9	3	-6	3
-2	4	2	-6	-2
-1	1	1	-6	-5
0	0	0	-6	-6
1	1	-1	-6	-5
2	2	-2	-6	-4
3	3	-3	-6	-3
4	4	-4	-6	-2

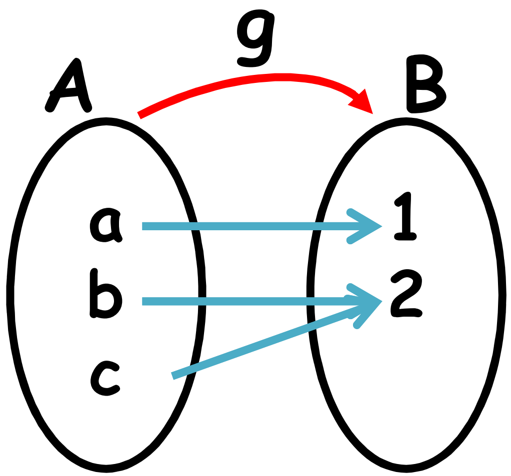


10
5
-5
-10
-15
-10
-5
5
10
15

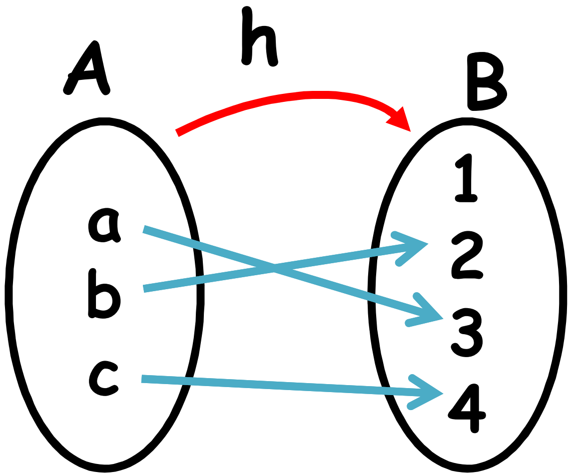
Fonksiyon Türleri



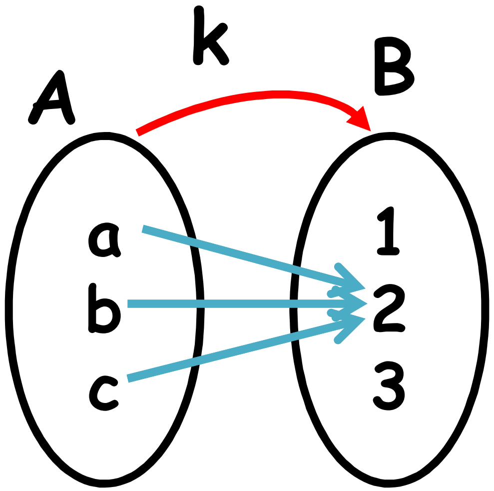
1-1(bire-bir), Örten



Örten, 1-1 değil



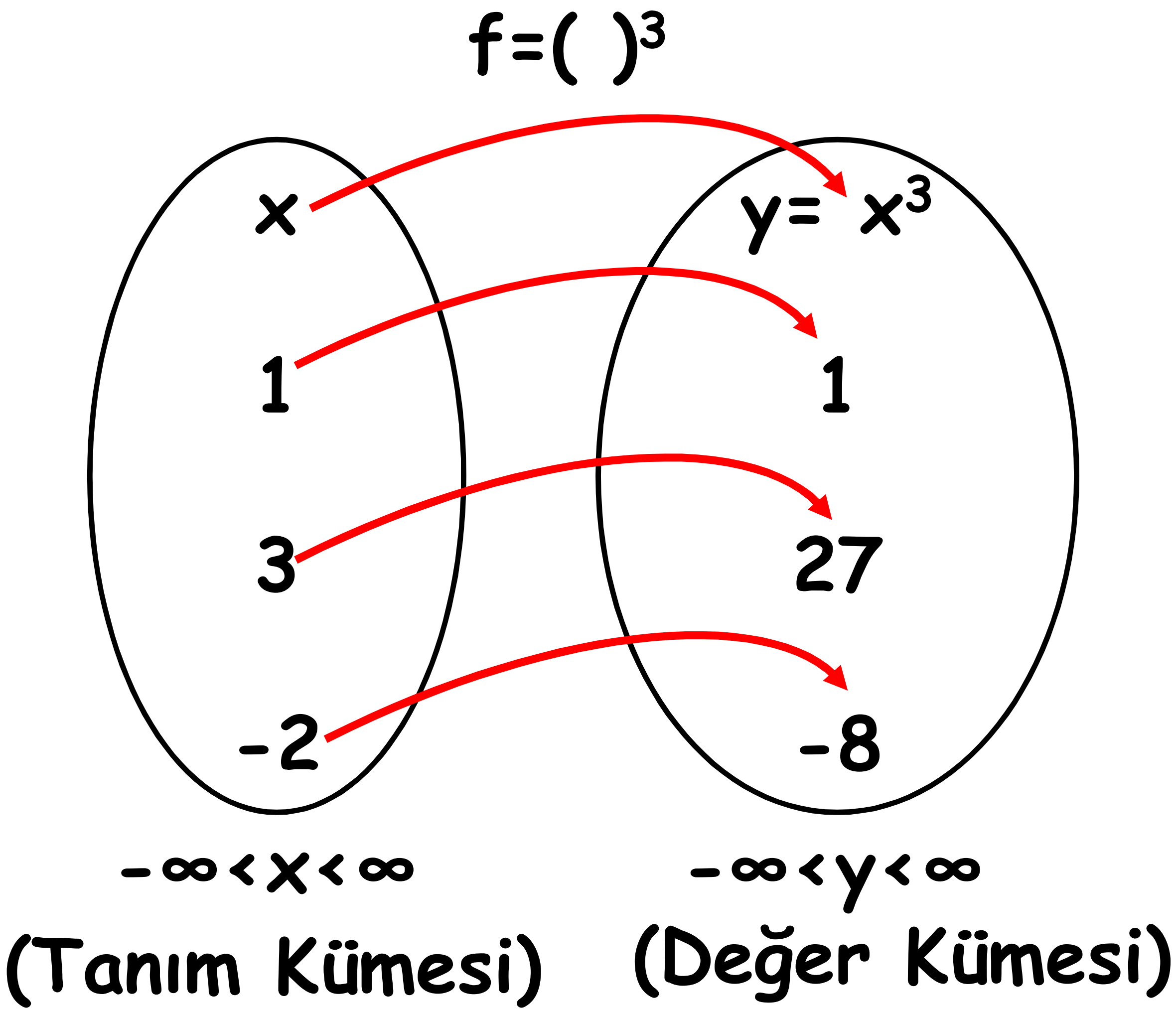
İçine, 1-1



Sabit fonksiyon

Örnek:

$y=f(x)=x^3$ kuralı ile verilen fonksiyonu alalım.



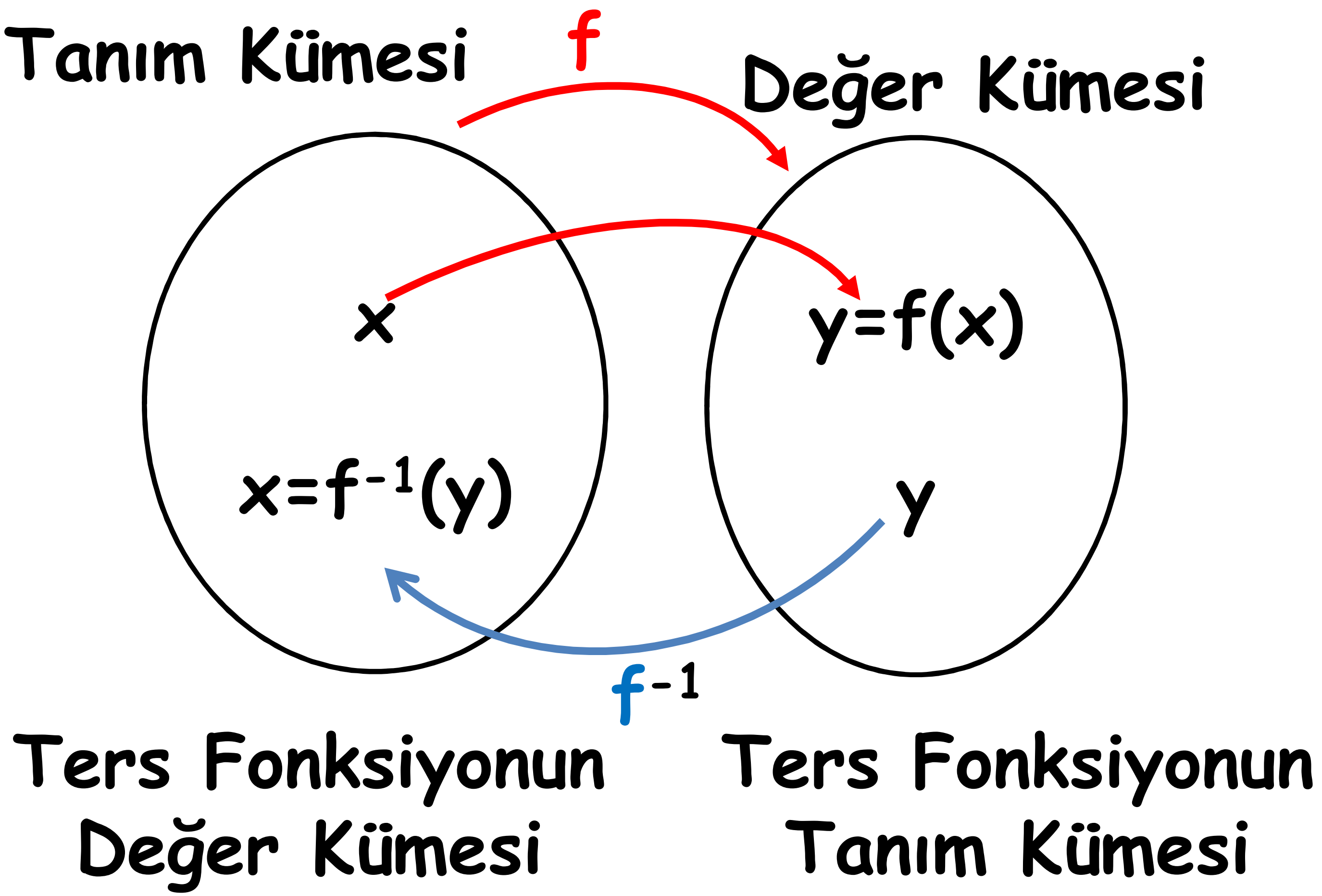
Şema incelendiğinde tanım kümesinin farklı elemanlarının görüntülerinin de farklı olduğu görülür.Bu tür fonksiyonlara **bire bir (1-1) fonksiyonlar** denir.

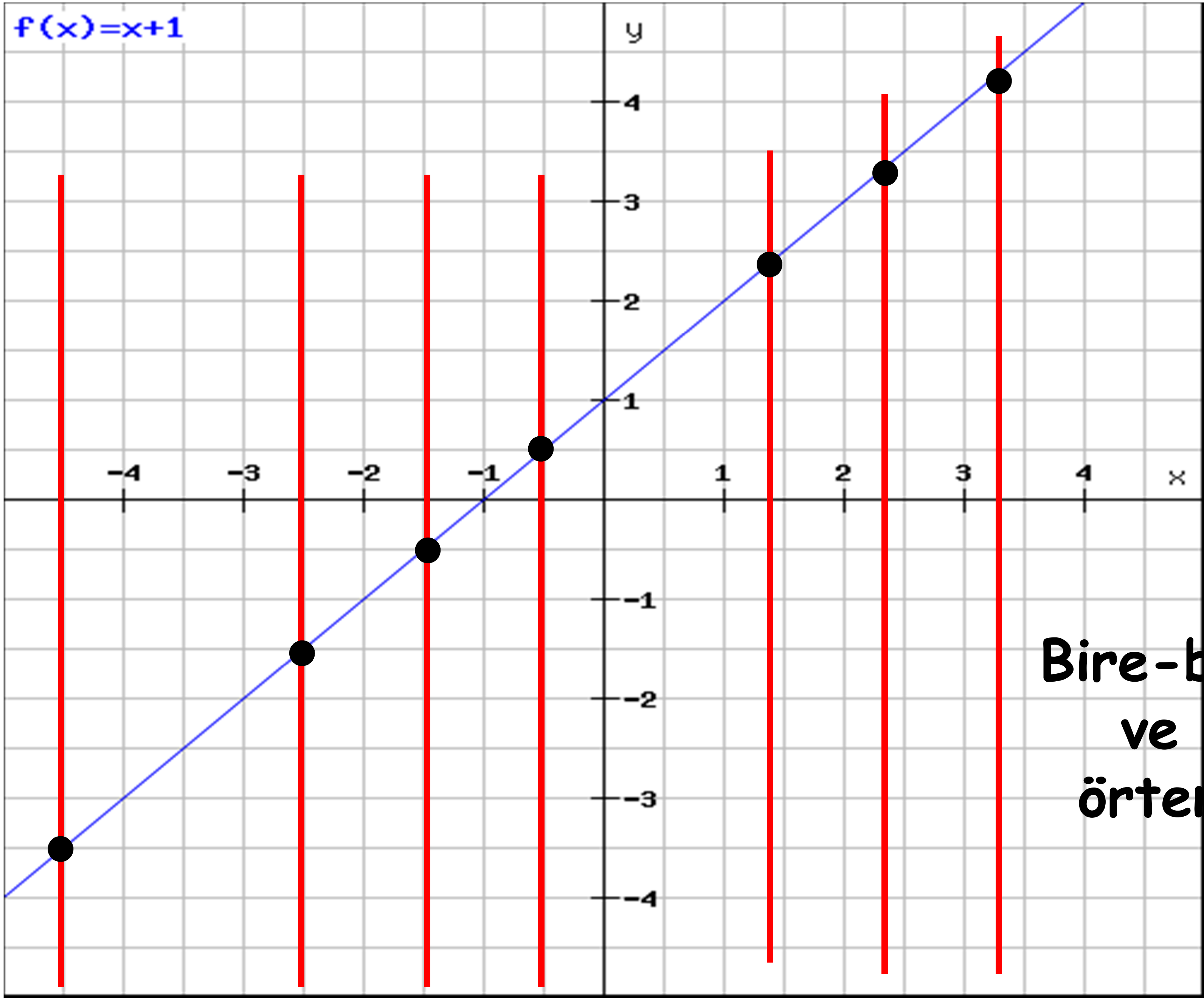
$x_1 \neq x_2$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise, f bire bir fonksiyondur.

Değer kümesinin her bir elemanının tanım kümesinde mutlaka bir karşılığı vardır. Yani değer kümesinde açıkta eleman yoktur.Bu tür fonksiyonlara da **örten fonksiyonlar** denir.

Bir Fonksiyonun Tersi

Bir f fonksiyonu bire-bir ve örten ise bu fonksiyonun terside bir fonksiyon olur ve f^{-1} ile gösterilir.





Bire-bir
ve
örten

Örnek: $y=f(x)=x+1$ fonksiyonunun tersinin olup olmadığını araştırıp, varsa tersini bulunuz.

Bire-bir midir?

$x_1 \neq x_2$ için $x_1+1 \neq x_2+1$

$f(x_1) \neq f(x_2)$

olup 1-1 dir.

Örten midir?

Her y değerine karşılık en az bir x değeri var mıdır?

$y=x+1 \Longrightarrow x=y-1$ dir.

O halde f örtendir.

$y=f(x)=x+1$ fonksiyonunun 1-1 ve örten olduğundan terside bir fonksiyondur.

$f^{-1}(x)=x-1$ dir. Bazen bu fonksiyon $g(y)=y-1$ şeklinde de ifade edilebilir.

$y=f(x)=ax+b$ şeklindeki fonksiyonlar daima 1-1 ve örten olduklarından tersleri de bir fonksiyondur.

$y=f(x)=ax+b$ şeklindeki fonksiyonların tersinin kuralı bulunurken x ile y değişkenlerinin yerleri değiştirilir ve elde edilen yeni eşitlikten y çekilir.

$$y = ax + b \Longrightarrow x = ay + b$$

$$\Longrightarrow x - b = ay$$

$$\Longrightarrow \frac{x-b}{a} = y$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}}$$

$$y=f(x)=2x+3 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=\frac{x-3}{2}$$

$$y=f(x)=4x-5 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=\frac{x+5}{4}$$

$$y=f(x)=-3x-1 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=\frac{x+1}{-3}=\frac{-x-1}{3}$$

$$y=f(x)=x-1 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=x+1$$

$$y=f(x)=3x \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=\frac{x}{3}$$

$$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad , \quad f : R - \{\frac{-d}{c}\} \rightarrow R$$

$$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}}$$

Not:

1. $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$

2. $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

3. $(a,b) \in f \Leftrightarrow (b,a) \in f^{-1}$

$$y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$$

$$y = f(x) = \frac{3x + 4}{x - 2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x + 4}{x - 3}$$

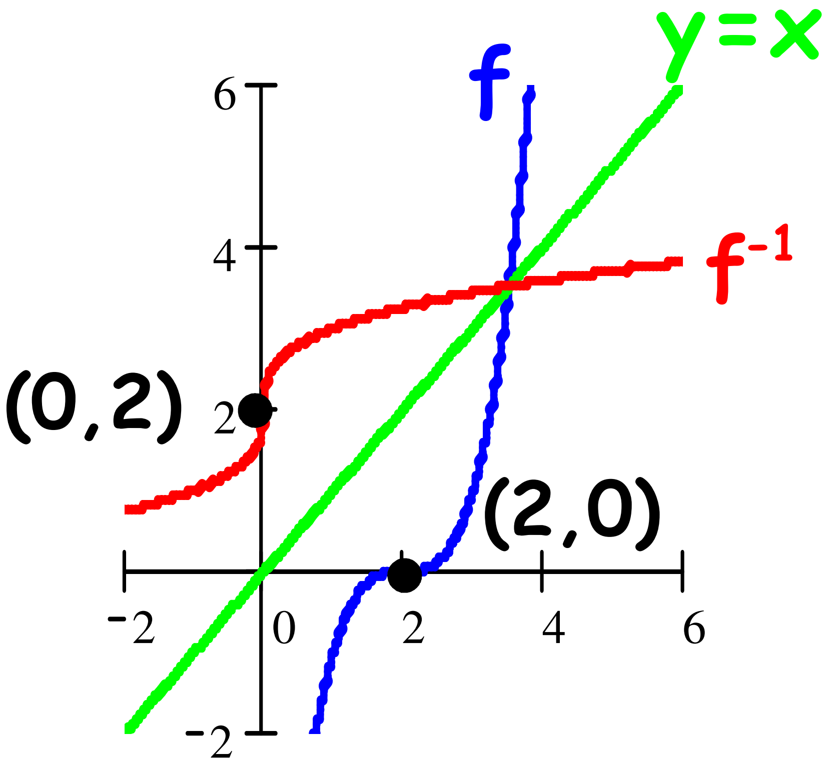
$$y = f(x) = \frac{x}{x - 1} \Rightarrow y = f(x) = \frac{1, x}{x - 1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{x - 1}$$

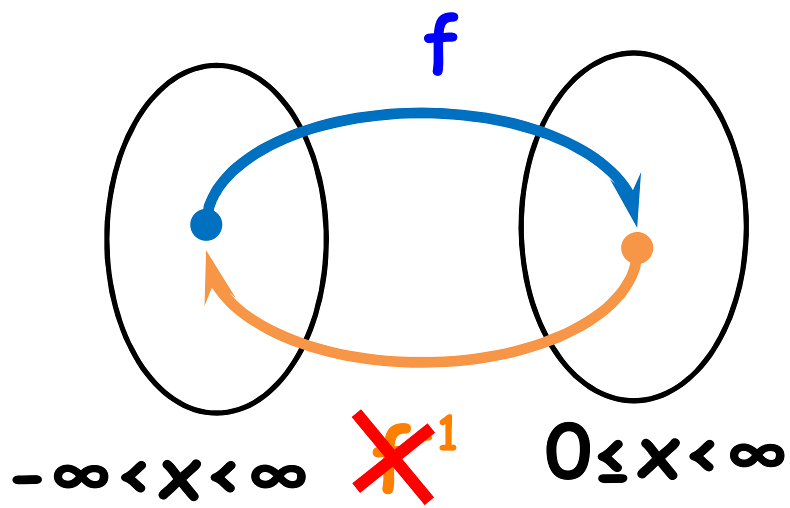
$$y = f(x) = \frac{-x}{x - 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1 . x}{x + 1} = \frac{x}{x + 1}$$

$$(a,b) \in f \Leftrightarrow (b,a) \in f^{-1}$$

olduğundan f(x) fonksiyonunun grafiği ile $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun grafiği y=x doğrusuna göre simetriktirler.



$f(x) = x^2$ fonksiyonu alalım;



x	y
-1	$(-1)^2=1$
1	$1^2=1$

Tablodan da görüldüğü gibi $y=f(x)=x^2$ fonksiyonu bu aralıkta 1-1 değildir. Bu durumda fonksiyonun 1-1 ve örten olduğu tanım kümesinin alt aralıklarında tersinden söz edebiliriz.

$0 \leq x < \infty$ için $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x = y^2$

$\Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = y$

$\Rightarrow y = \sqrt{x}$

$f(x) = x^2$ fonksiyonunu alalım. Aşağıdaki tabloyu inceleyelim;

$f(x)=x^2$

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$

y	x
0	0
1	1
4	2
9	3

$$f = \{(0,0),(1,1),(2,4),(3,9)\}$$

$$f^{-1} = \{(0,0),(1,1),(4,2),(9,3)\}$$

Örnek: $f(x)=2x-4$ olduğuna göre $f(1)+f^{-1}(2)=?$

$$f(x)=2x-4 \Longrightarrow f(1)=2.1-4=2-4=-2$$

$$f(x)=2x-4 \Longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+4}{2} \Longrightarrow f^{-1}(2)=\frac{2+4}{2}$$

$$=\frac{6}{2}=3$$

$$f(1)+f^{-1}(2)=-2+3=1$$

Örnek: $y=f(x)=5-x^3 \Rightarrow f^{-1}(-3)=?$

$$y=5-x^3 \Rightarrow x=5-y^3$$
$$\Rightarrow y^3=5-x$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{y^3}=\sqrt[3]{5-x}$$
$$\Rightarrow y=\sqrt[3]{5-x}$$
$$\Rightarrow y=f^{-1}(x)=\sqrt[3]{5-x}$$

$$f^{-1}(-3)=\sqrt[3]{5-(-3)}$$
$$=\sqrt[3]{8}$$
$$=2$$

y=f(x)=ax+b Şeklindeki Doğrusal Fonksiyonların Grafikleri

Bu tür fonksiyonların grafikleri çizilirken eksenleri kesim noktaları bulunur. Bulunan bu noktalar bir doğru ile birleştirilir.

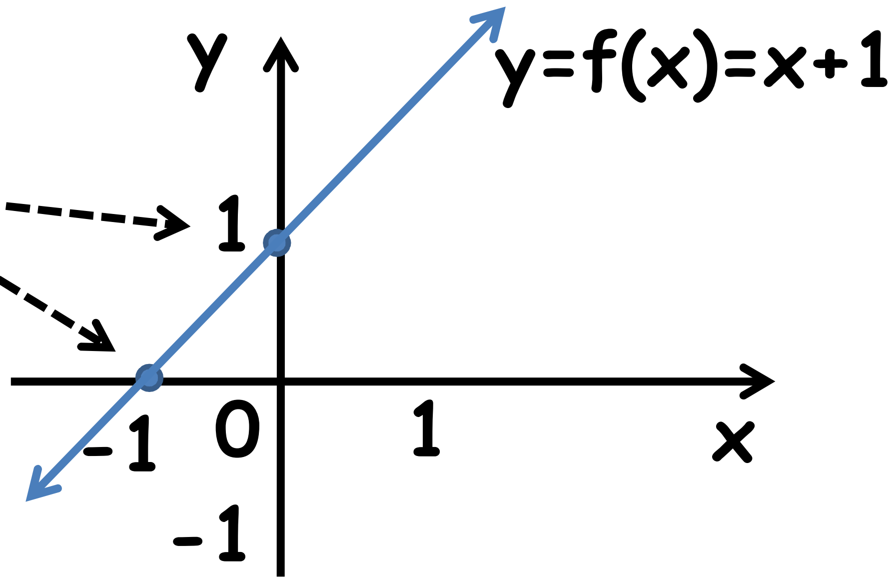
Eksenleri kesim noktaları bulunurken de x=0 alınır y eksenini kesim noktası; y=0 alınır x eksenini kesim noktası bulunur. Bulunan bu noktalar bir tablo yardımıyla gösterilebilir.

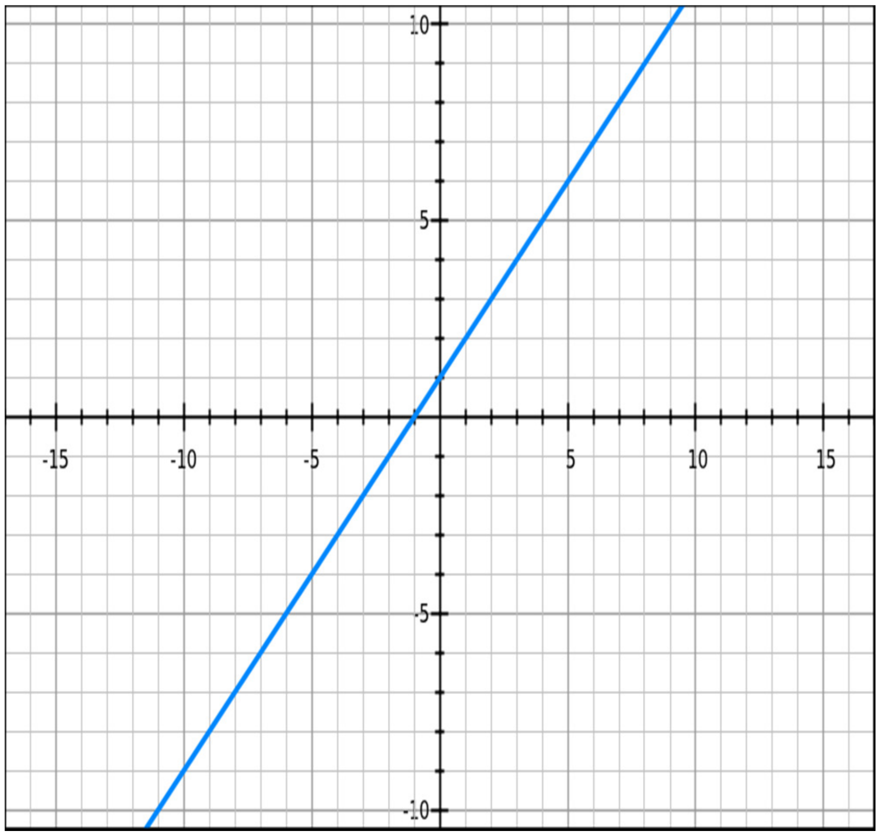
x	0	?
y	?	0

Eksenleri kesim noktası

Örnek: $y=f(x)=x+1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

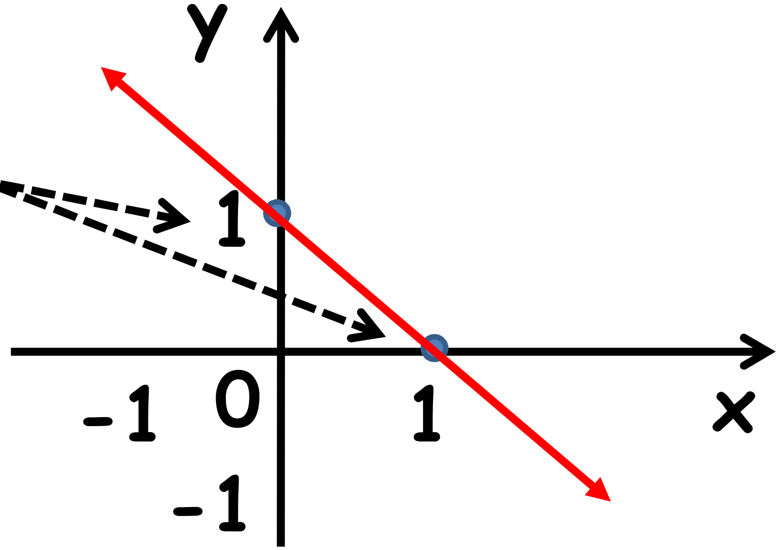
x	0	-1
y	1	0



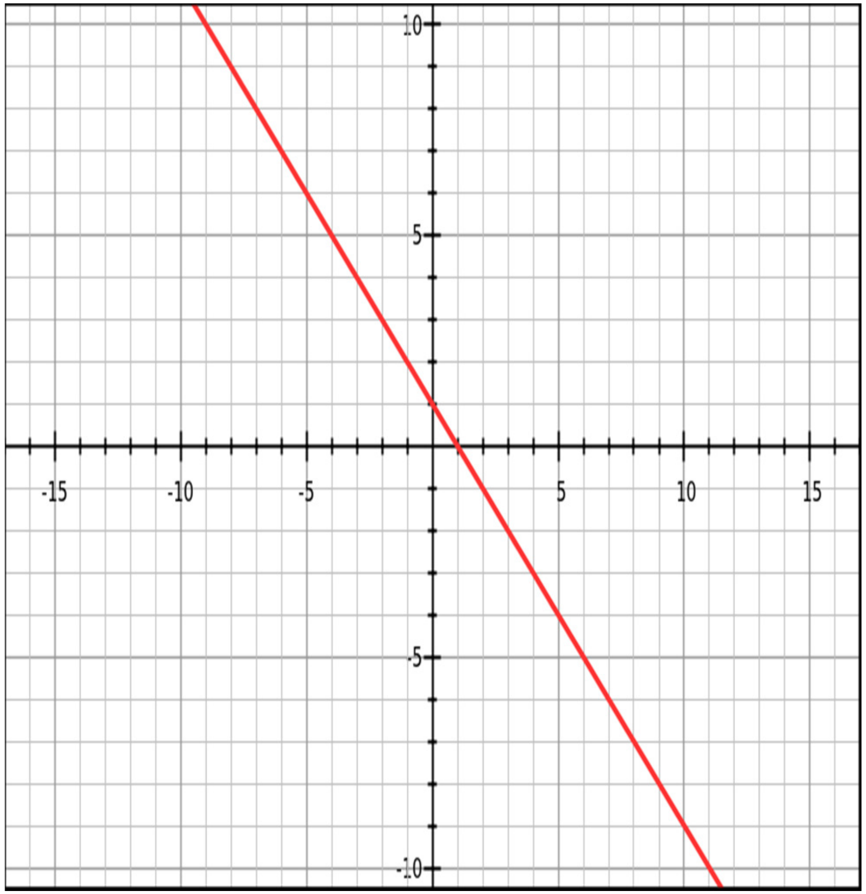


Örnek: $y=f(x)=-x+1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

x	0	1
y	1	0

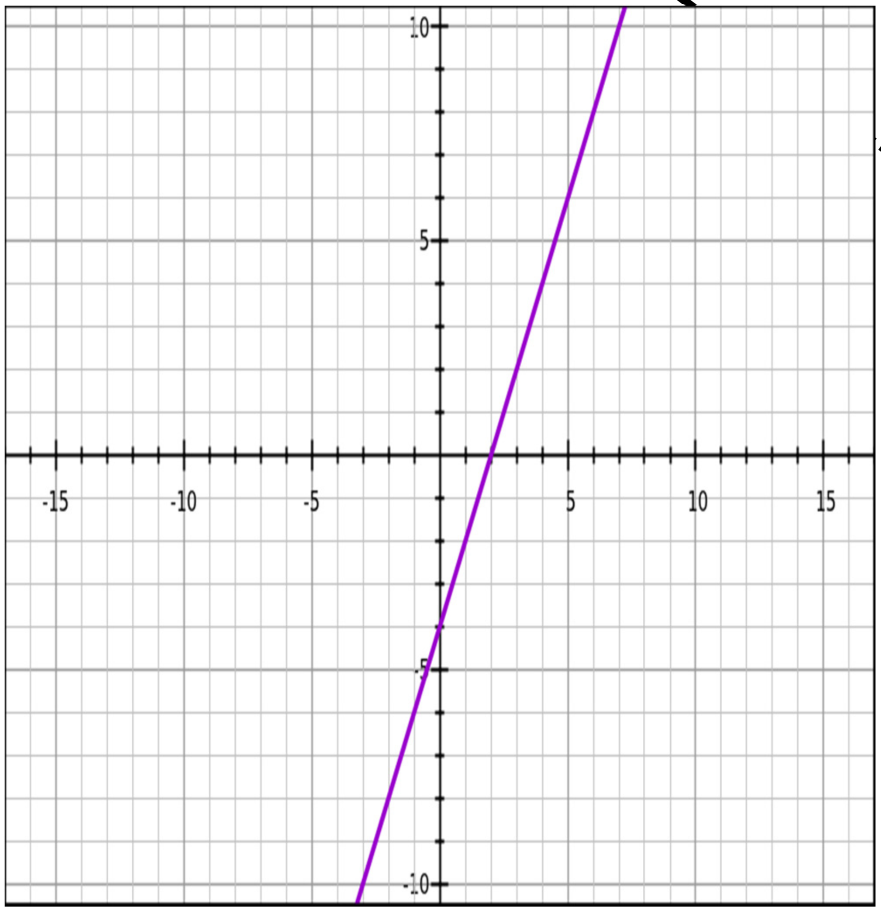


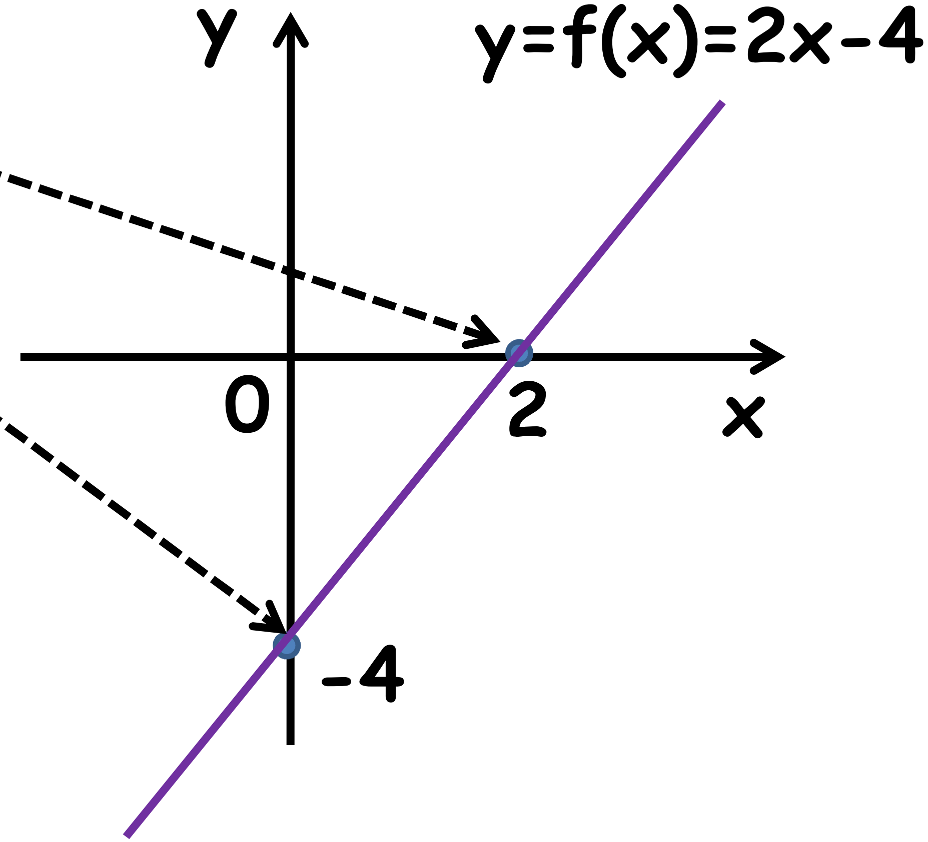
$y=f(x)=-x+1$



Örnek: $y=f(x)=2x-4$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

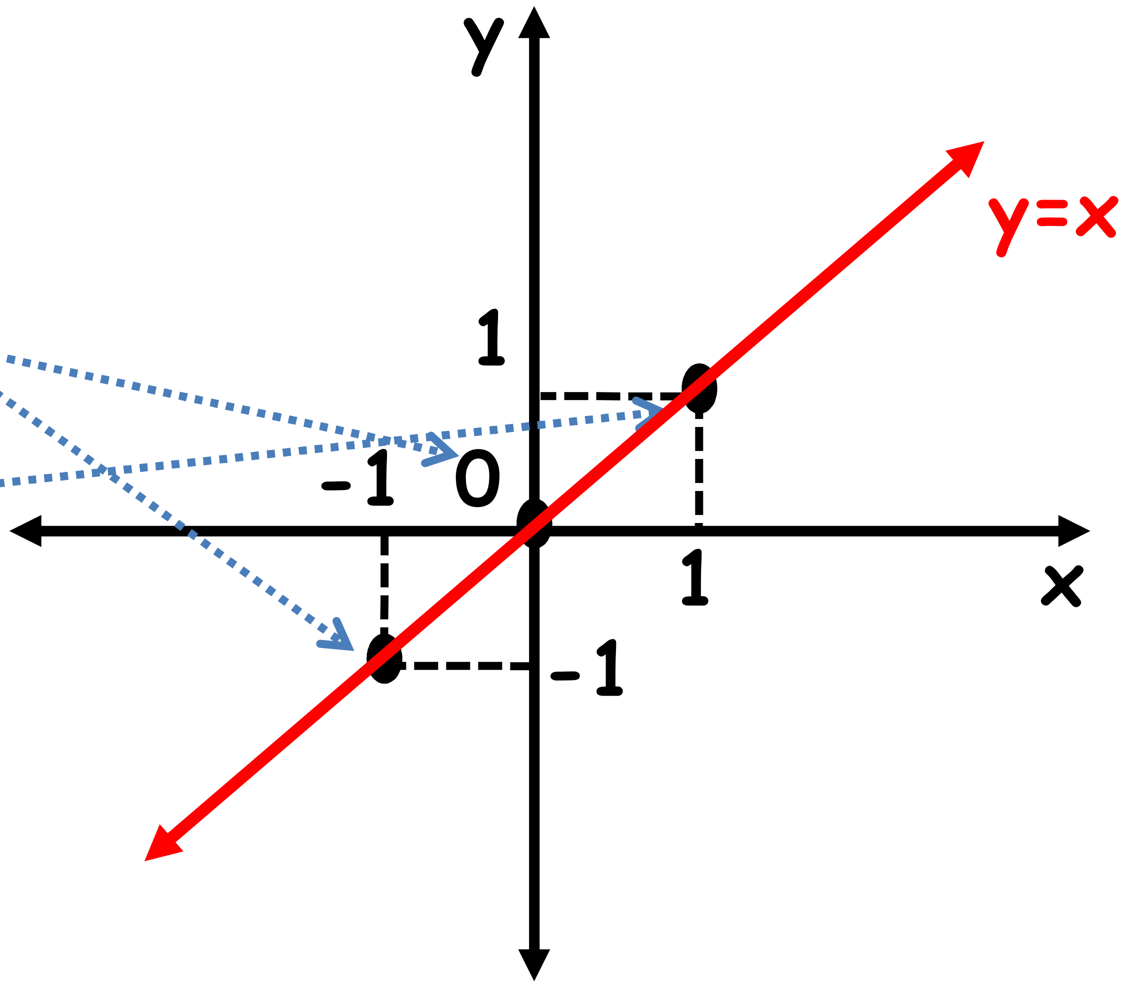
x	0	2
y	-4	0



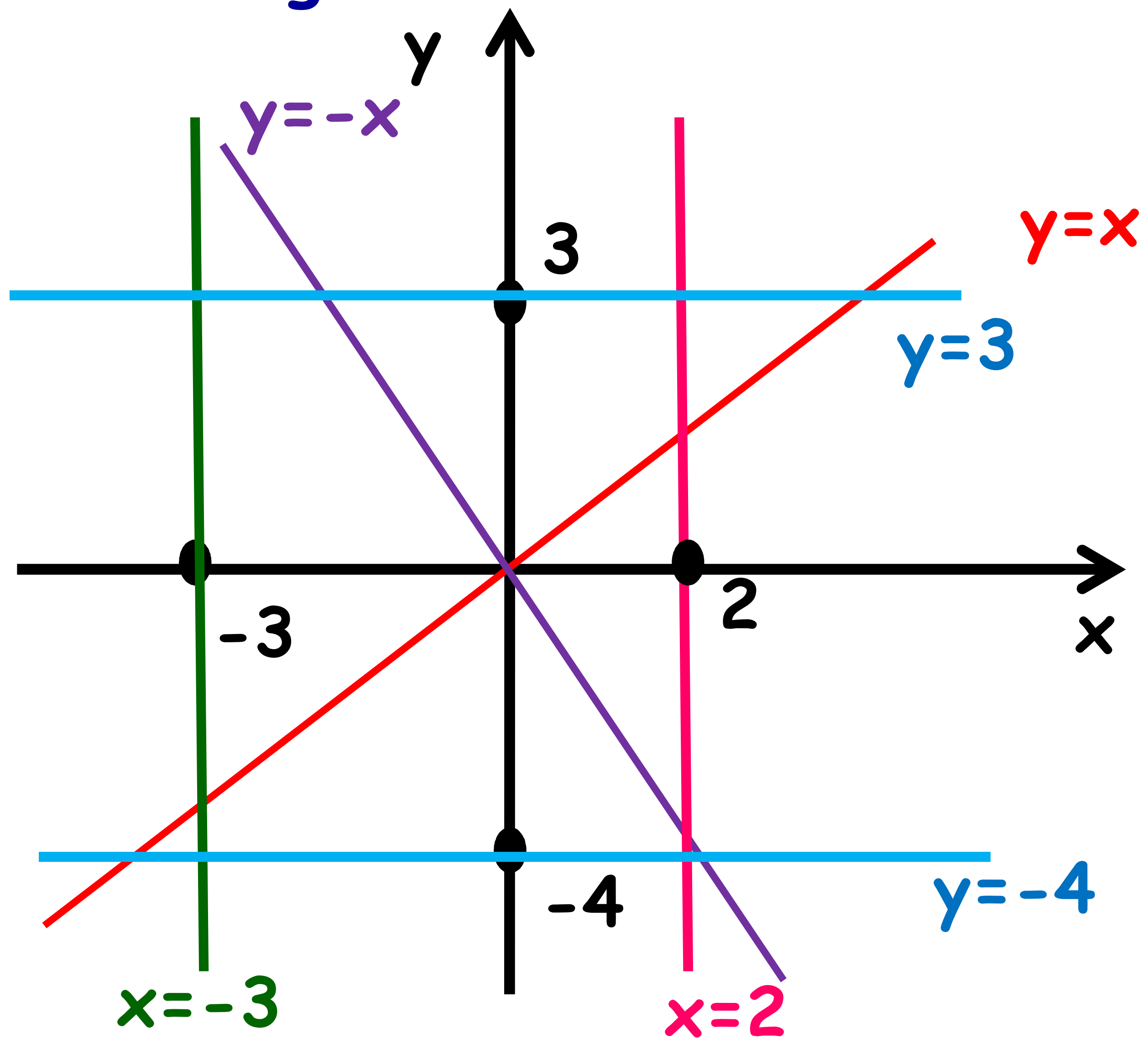


Örnek: $y=f(x)=x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

x	y
-1	-1
0	0
1	1



y=x, y=-x, y=a ve x=b Şeklindeki Doğruların Grafikleri



$y=f(x)=ax^2+bx+c$ Şeklindeki Fonksiyonların Grafikleri

Bu tür fonksiyonların grafikleri çizilirken aşağıdaki adımlar uygulanır;

1. Eksenleri kesim noktaları bulunur.

2. Tepe noktasının koordinatları bulunur.

$$T(x,y)=\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=T\left(\frac{-b}{2a},f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

3. Grafik çizilir.

Örnek: $y=f(x)=x^2-2x-3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

1.

$x=0$ için $y=f(0)=0^2-2.0-3=-3$ $\quad (0,-3)$

$y=0$ için $x^2-2x-3=0$

$$1 \quad -3$$

$$x=-1 \quad x=3$$

$(-1,0)$

$(3,0)$

2.

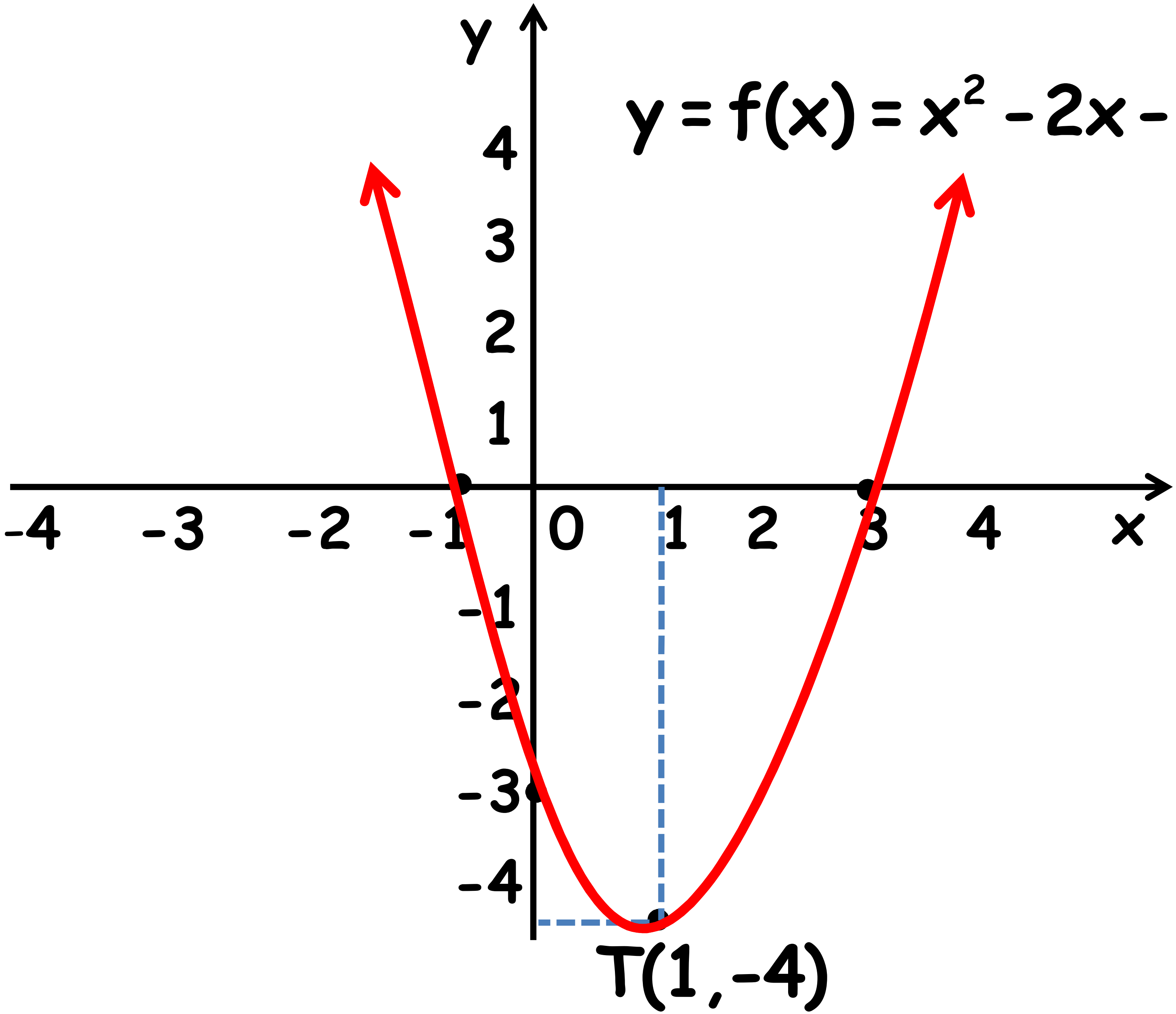
$$\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2(1)}=1$$

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4.1.(-3)-(-2)^2}{4.1}$$

$$=\frac{-12-4}{4}=-4$$

$T(1,-4)$

3.



Örnek: $y=f(x)=-x^2-2x+3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

1.

$x=0$ için $y=f(0)=-0^2-2.0+3=3$ $\quad (0,3)$

$y=0$ için $-x^2-2x+3=0$

$x^2+2x-3=0$ $\quad (1,0)$

$-1 \quad +3$ $\quad (-3,0)$

$x=1 \quad x=-3$

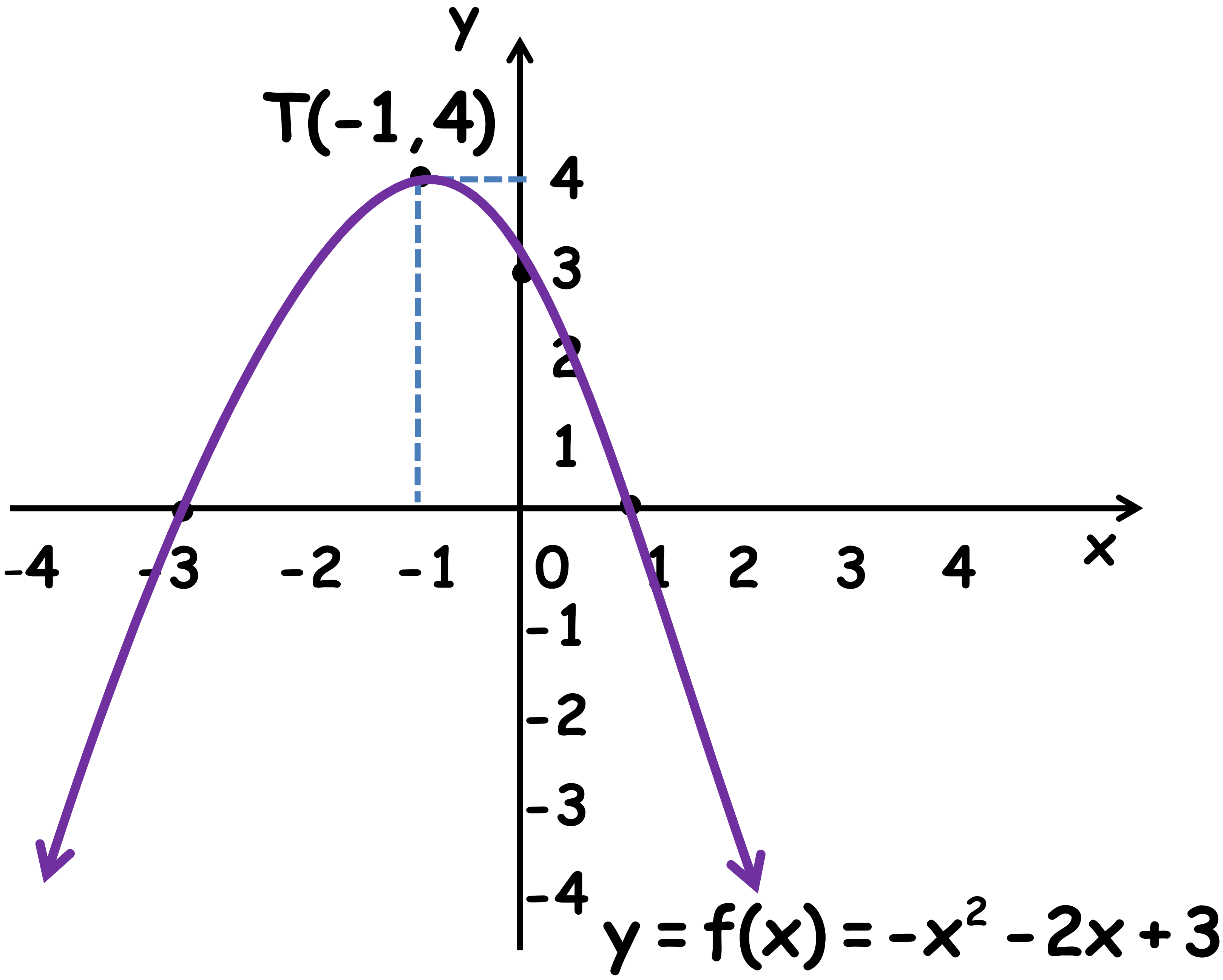
2.

$$\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2.(-1)}=-1\ ,\ \frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4.(-1).(3)-(-2)^2}{4.(-1)}$$

$T(-1,4)$

$$=\frac{-12-4}{-4}=4$$

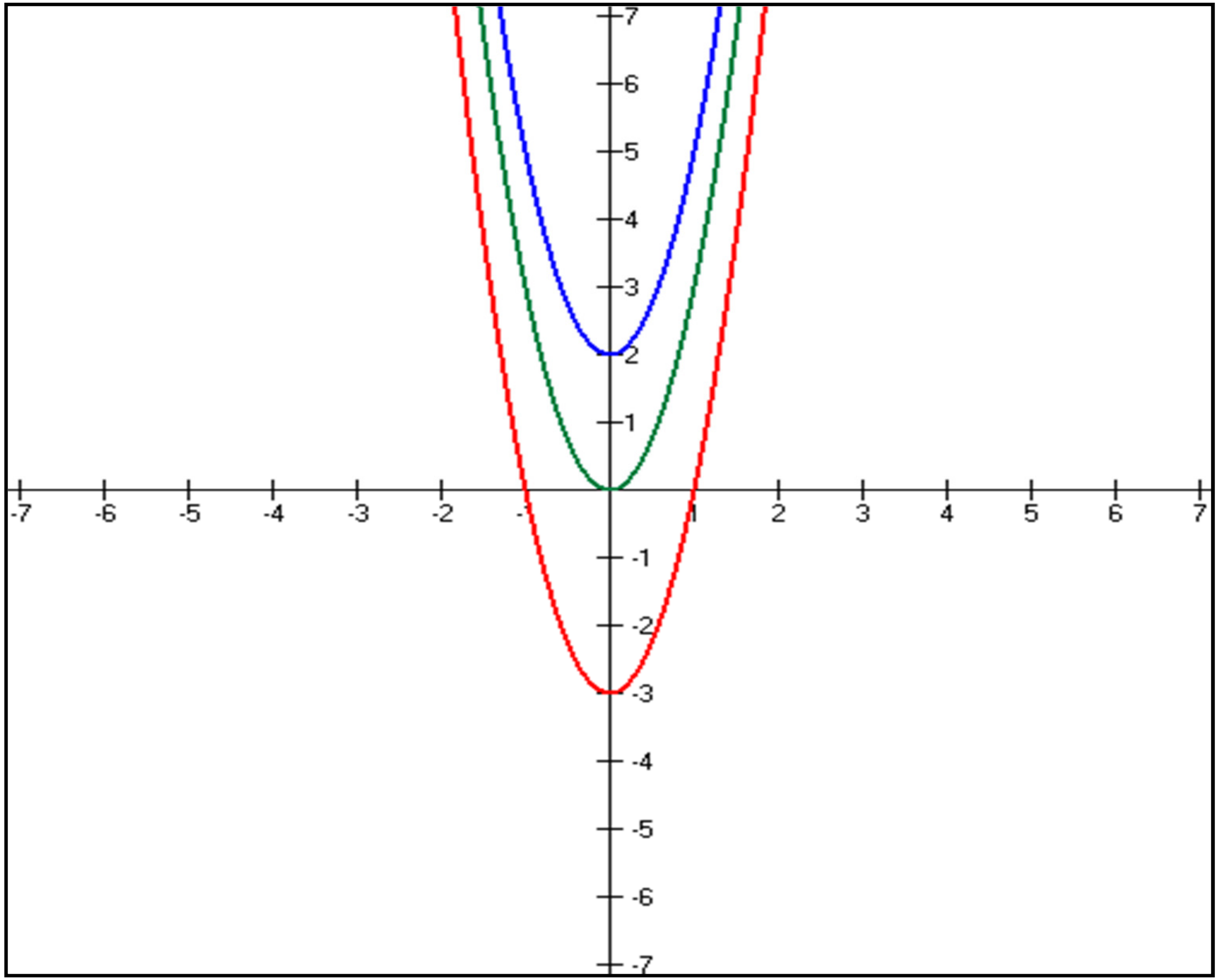
3.



$y = 3x^2$

$y = 3x^2 - 3$

$y = 3x^2 + 2$



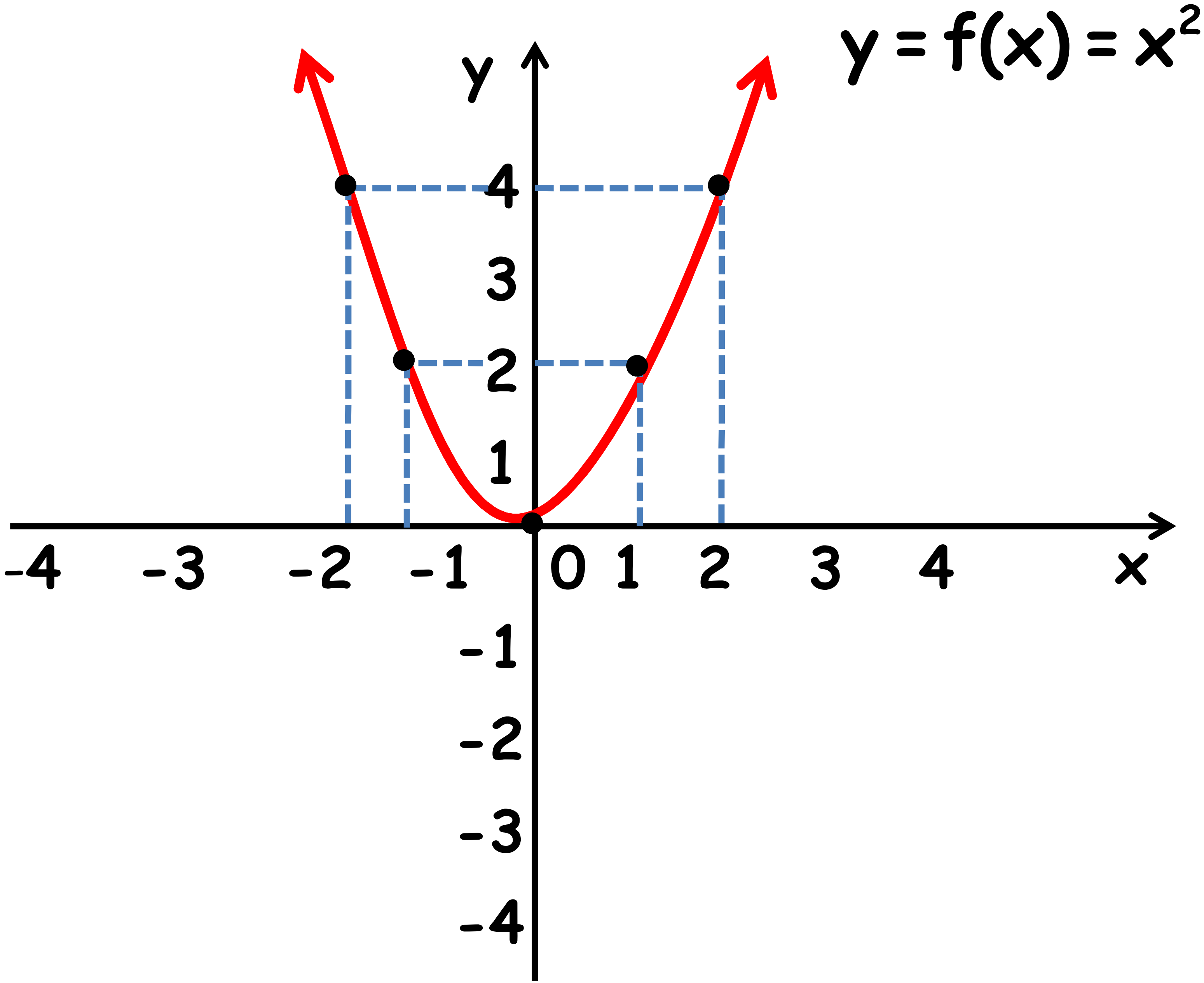
$$b=c=0 \Rightarrow y=f(x)=ax^2+0.x+0$$

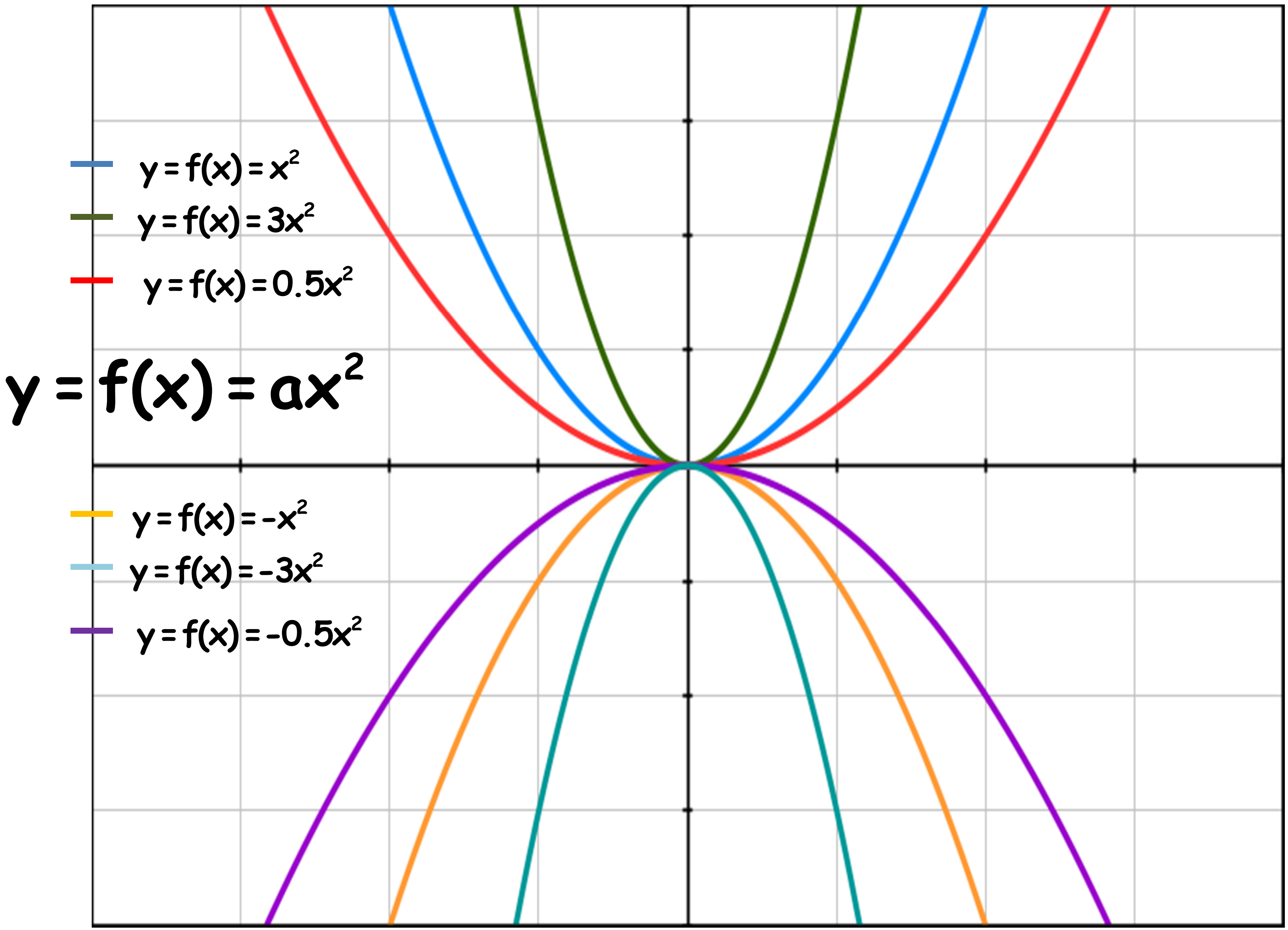
$$\Rightarrow \quad y=f(x)=ax^2$$

elde edilir. Bu şekildeki fonksiyonları grafiği için $x=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$ değerleri verilir.

Örnek: $y=f(x)=x^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

x	$y=x^2$	(x,y)
-2	$(-2)^2=4$	$(-2,4)$
-1	$(-1)^2=1$	$(-1,1)$
0	$0^2=4$	$(0,0)$
1	$1^2=4$	$(1,1)$
2	$2^2=4$	$(2,4)$


y = f(x) = x²
y
x
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4


$y = f(x) = x^2$
$y = f(x) = 3x^2$
$y = f(x) = 0.5x^2$
$y = f(x) = ax^2$
$y = f(x) = -x^2$
$y = f(x) = -3x^2$
$y = f(x) = -0.5x^2$

$$b=0 \Rightarrow y=f(x)=ax^2+0.x+c$$

$$\Rightarrow y=f(x)=ax^2+c$$

Elde edilir. Bu şekildeki fonksiyonları grafiği için eksenleri kesim noktalarını bulmak yeterli olacaktır

Örnek: $y=f(x)=x^2-1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$x=0$ için $y=f(0)=0^2-1=-1$

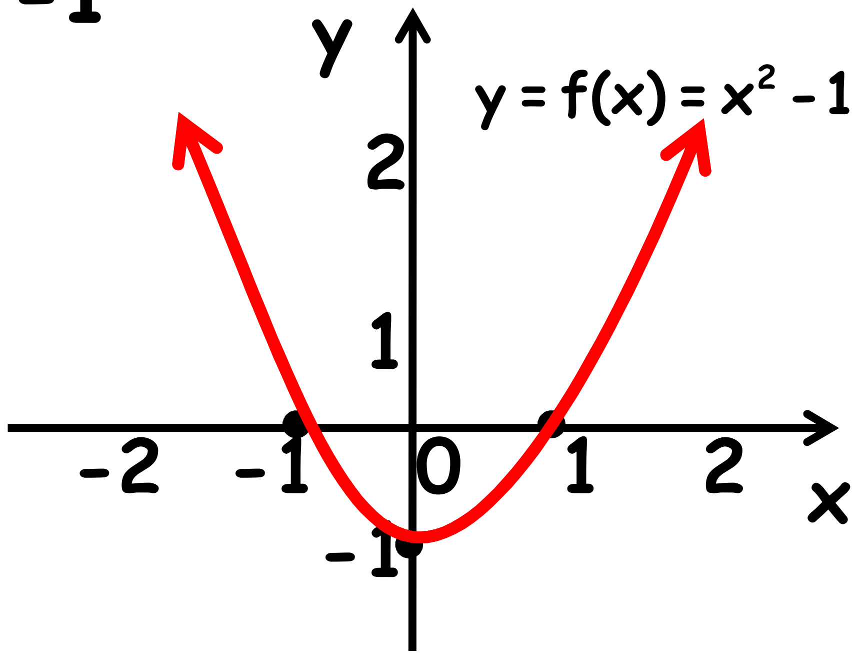
$(0,-1)$

$y=0$ için $x^2-1=0$

$x^2=1$

$x=\pm 1$

$(-1,0)$, $(1,0)$



Örnek: $y=f(x)=-x^2+4$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$x=0$ için $y=f(0)=0-4=4$

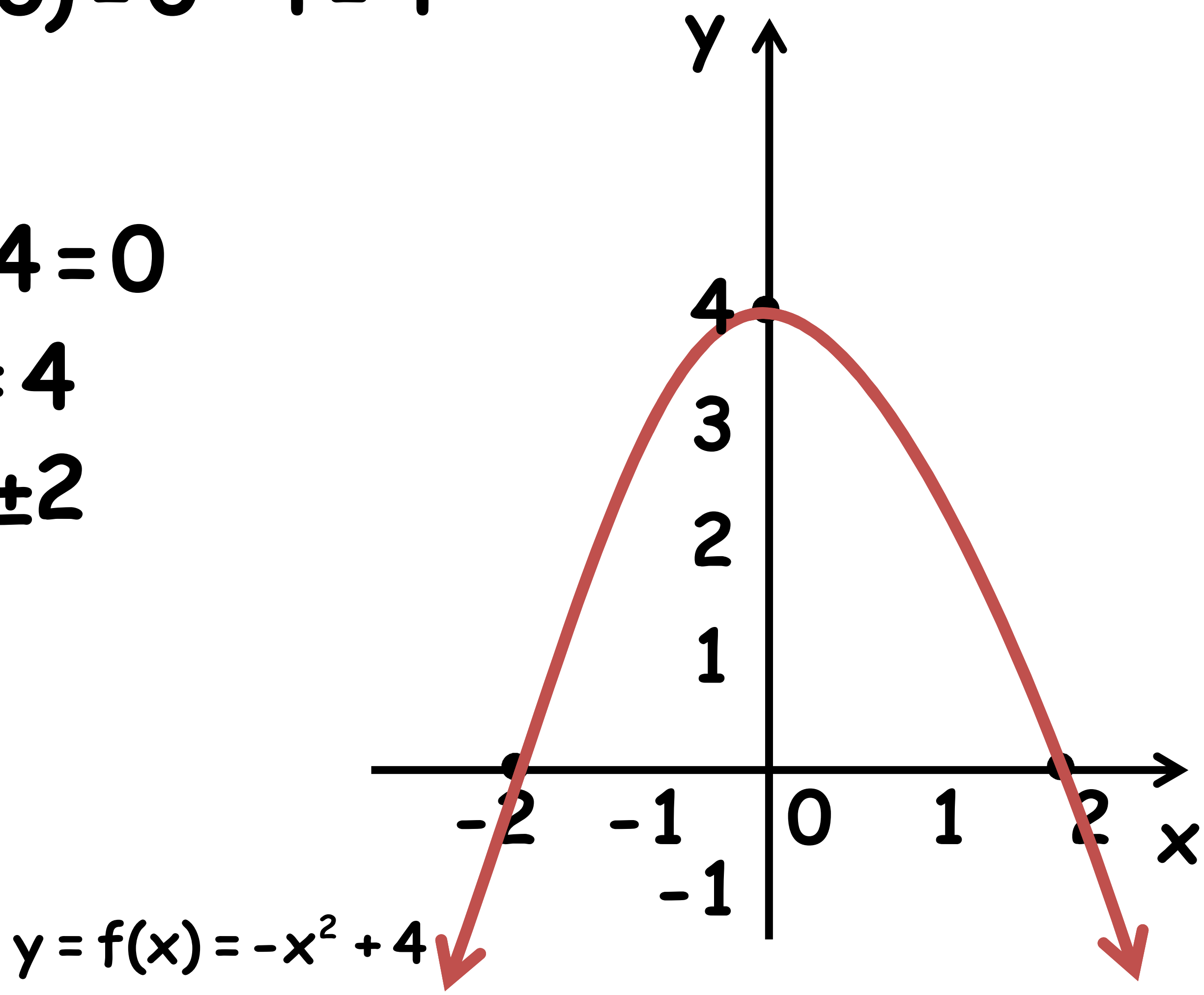
$(0,4)$

$y=0$ için $-x^2+4=0$

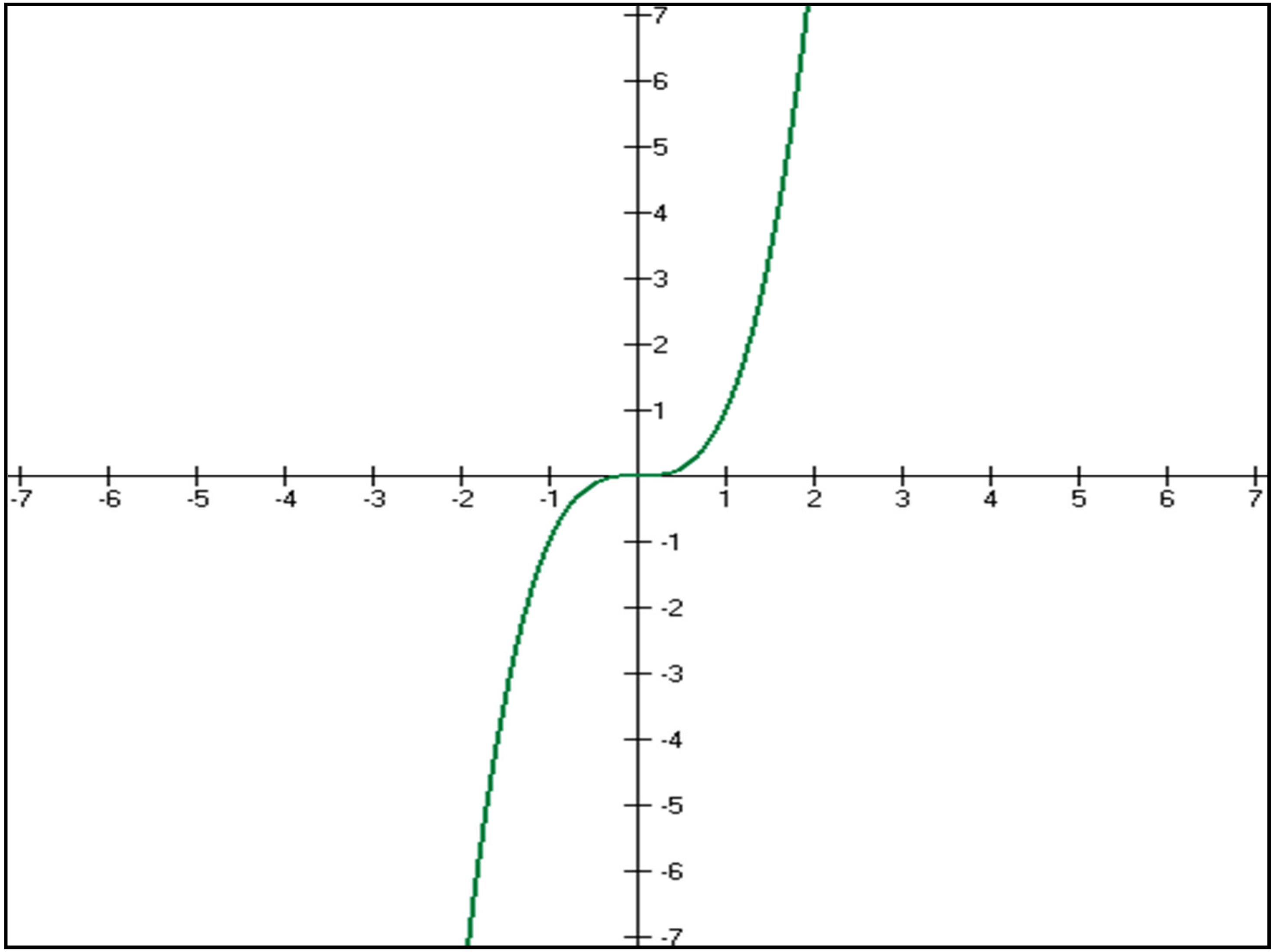
$x^2=4$

$x=\pm 2$

$(-2,0)$, $(2,0)$



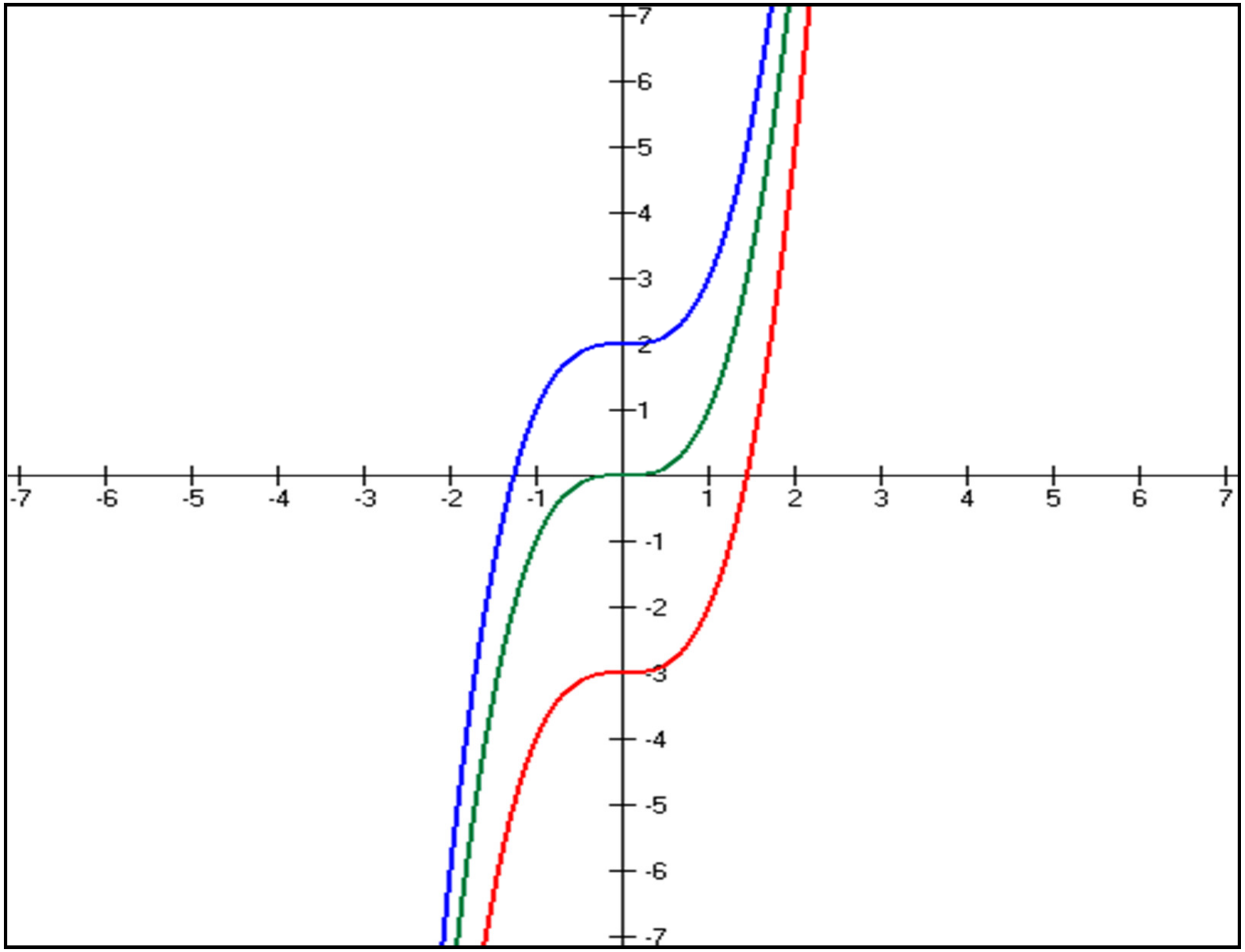
$y = x^3$



$y = x^3$

$y = x^3 - 3$

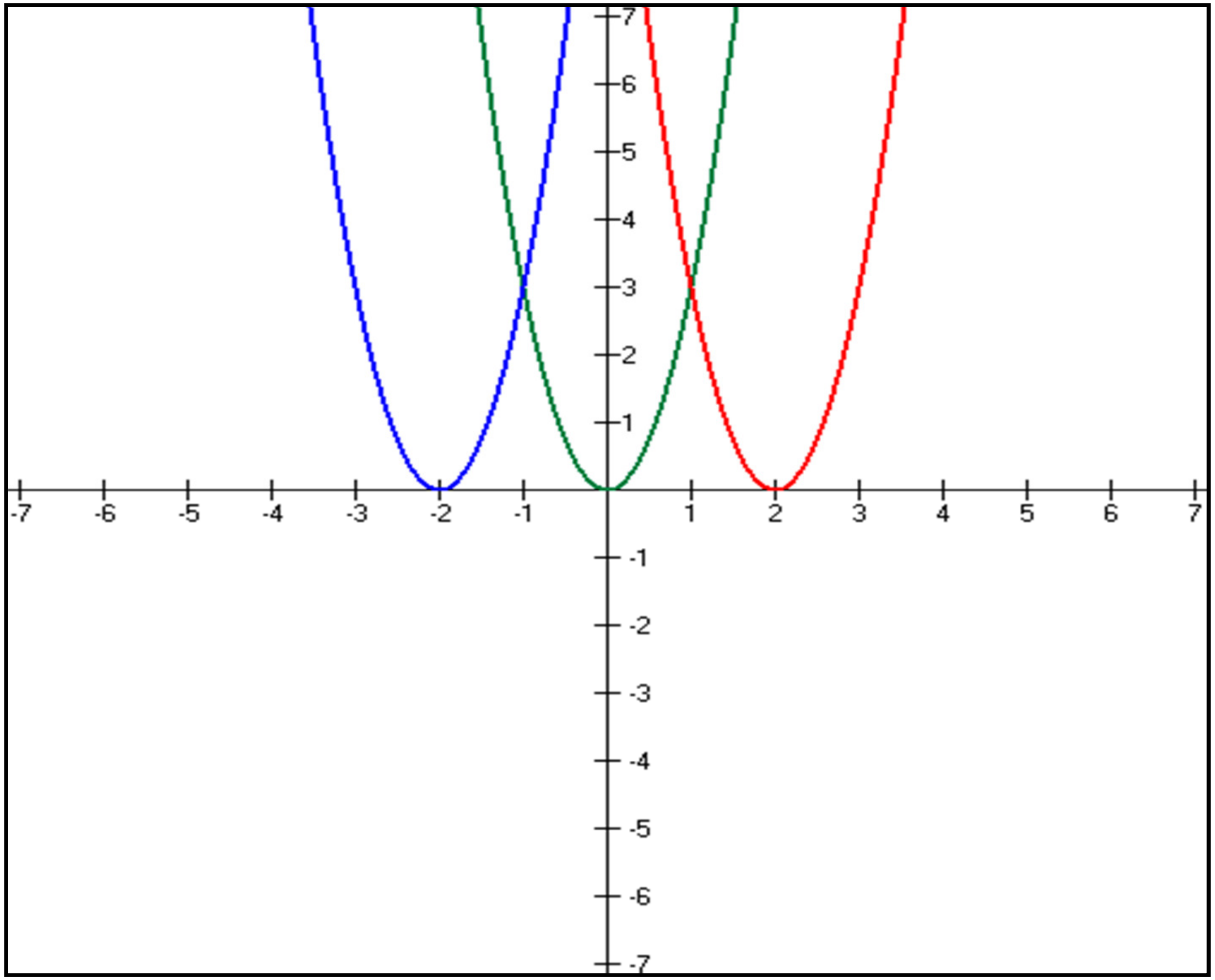
$y = x^3 + 2$



$y = 3x^2$

$y = 3(x+2)^2$

$y = 3(x-2)^2$



Summary of Shift Transformations

To Graph:	Shift the Graph of $y = f(x)$ by c units
$y = f(x)+c$	UP
$y = f(x)-c$	DOWN
$y = f(x+c)$	LEFT
$y = f(x-c)$	RIGHT

Talep Fonksiyonları

Bir tüketicinin belirli bir mal talebi ile bu talebi belirleyen değişkenler arasındaki ilişkiyi ifade den fonksiyonlara talep fonksiyonları denir.

$$y=ax+b$$

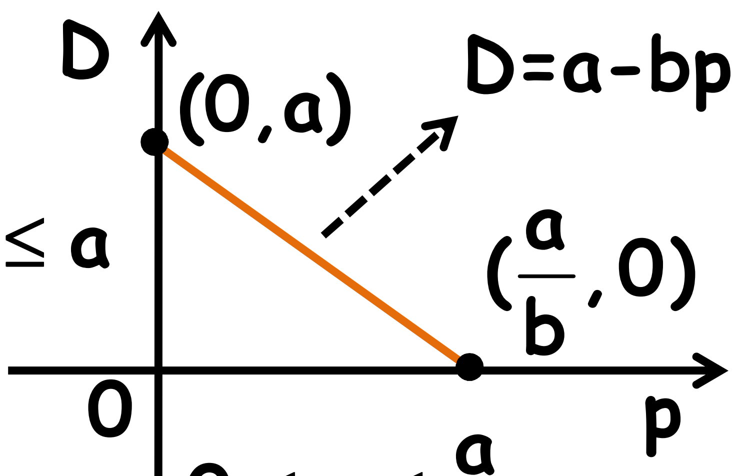
genel doğru denklemine benzetilerek;

$$\boxed{D=a-bp}$$

biçiminde yazılır.

p	0	$\frac{a}{b}$
D	a	0

$$0 \leq D \leq a$$

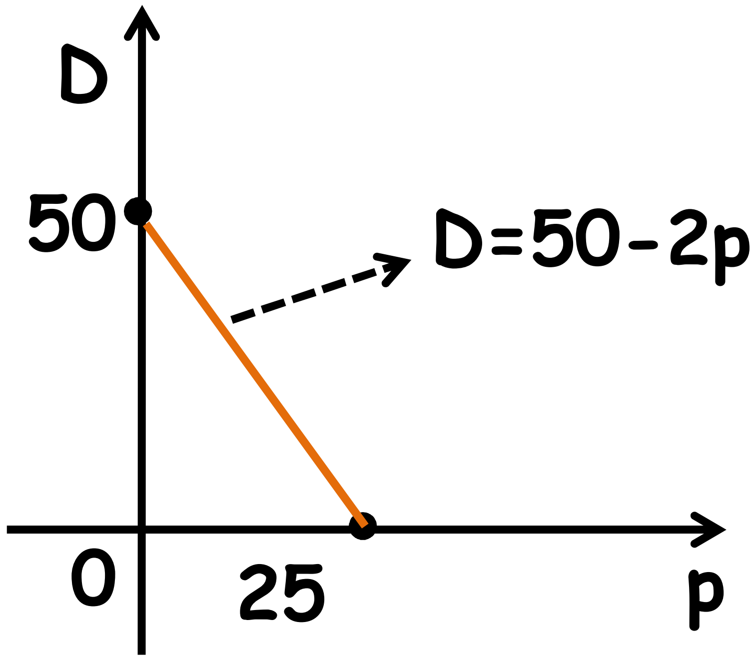


$$0 \leq p \leq \frac{a}{b}$$

Her p için tek bir talep söz konusudur.

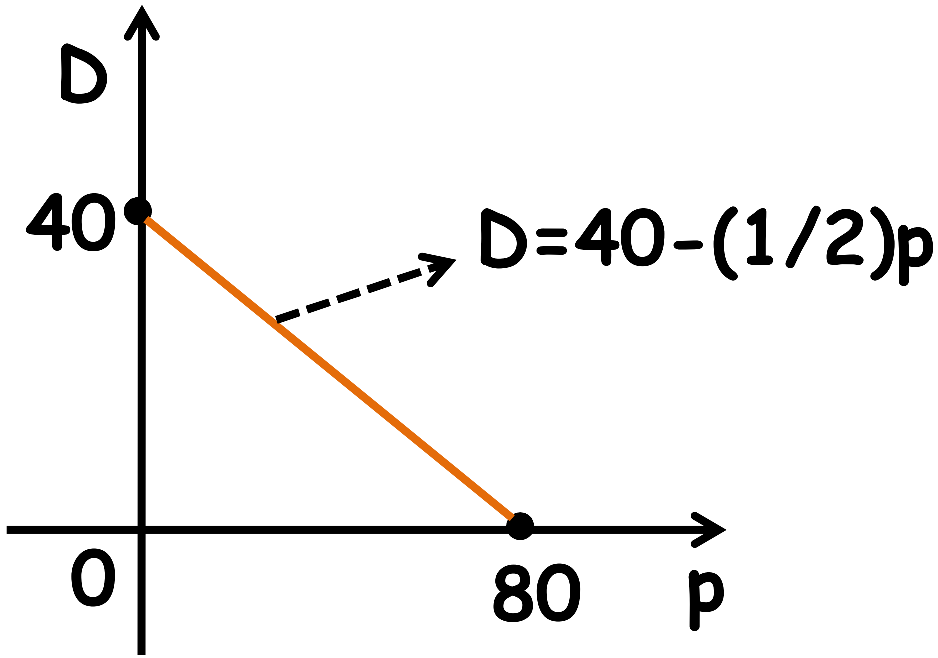
Örnek: Bir malın piyasa talep fonksiyonu $D=50-2p$ ise grafiğini çiziniz.

p	0	25
D	50	0



Örnek: Bir malın piyasa talep fonksiyonu $D=40-(1/2)p$ ise grafiğini çiziniz.

p	0	80
D	40	0



Arz Fonksiyonları

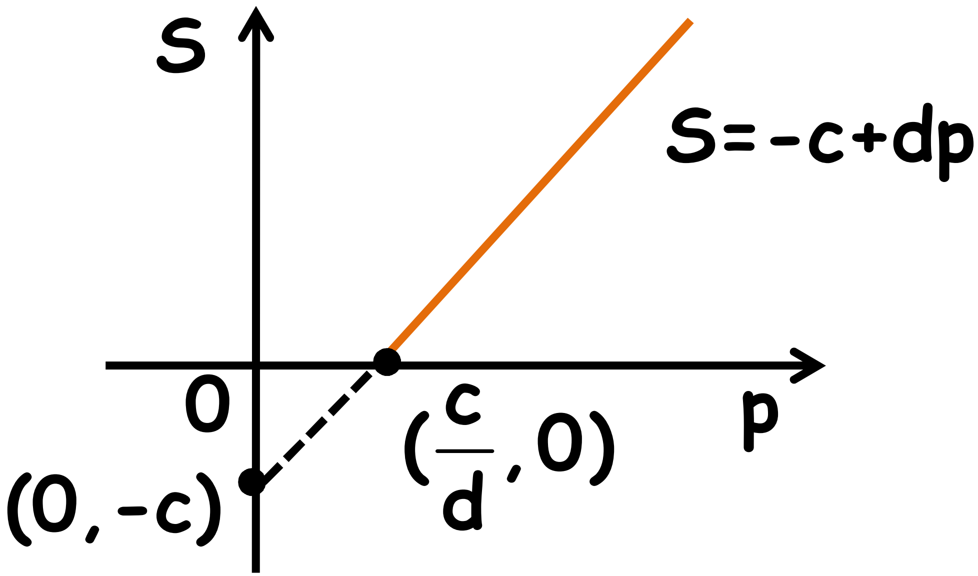
Bireysel firmaların piyasay sunduğu mal miktarı ile bu malın piyasa fiyatı arasındaki ilişkiyi ifade den fonksiyonlara arz fonksiyonları denir.

Genel doğru denklemine benzetilerek;

$$\boxed{S=-c+dp} \qquad (0,a)$$

biçiminde yazılır.

p	0	$\frac{c}{d}$
S	$-c$	0



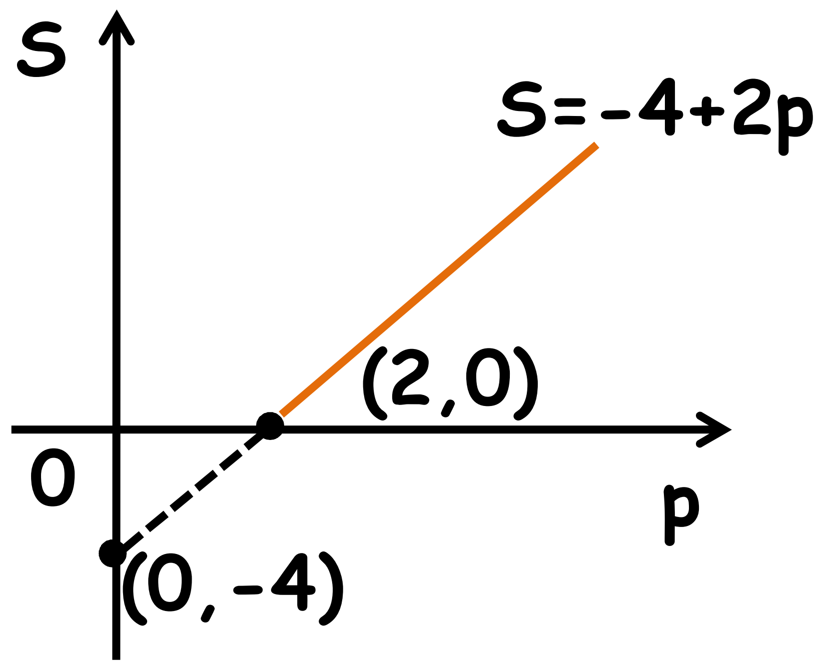
Şekilden de görüldüğü gibi c negatiftir.

Çünkü fiyat sıfır olduğu zaman, üretici piyasaya hiç mal arz etmeyecektir.

Üreticinin piyasaya mal arz etmesi için fiyatın belirli bir seviyenin üzerine çıkması gerekir.

Örnek: Bir malın piyasa arz fonksiyonu $S=-4+2p$ ise grafiğini çiziniz. Bu malın piyasaya arz edilebilmesi için fiyatı en az kaç TL olmalıdır?

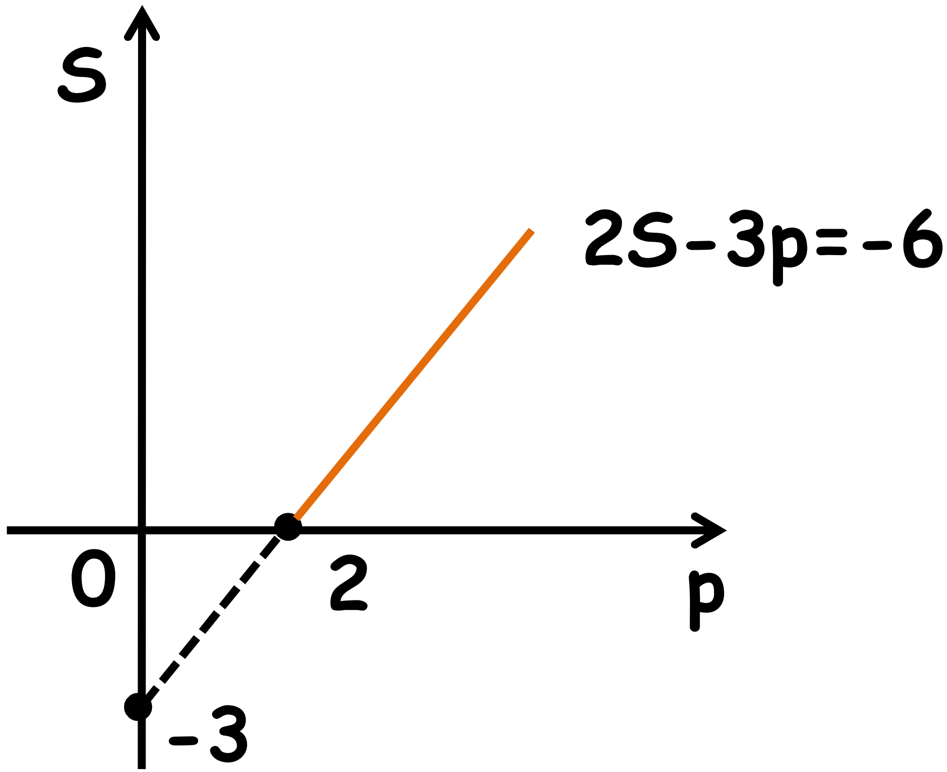
p	0	2
S	-4	0



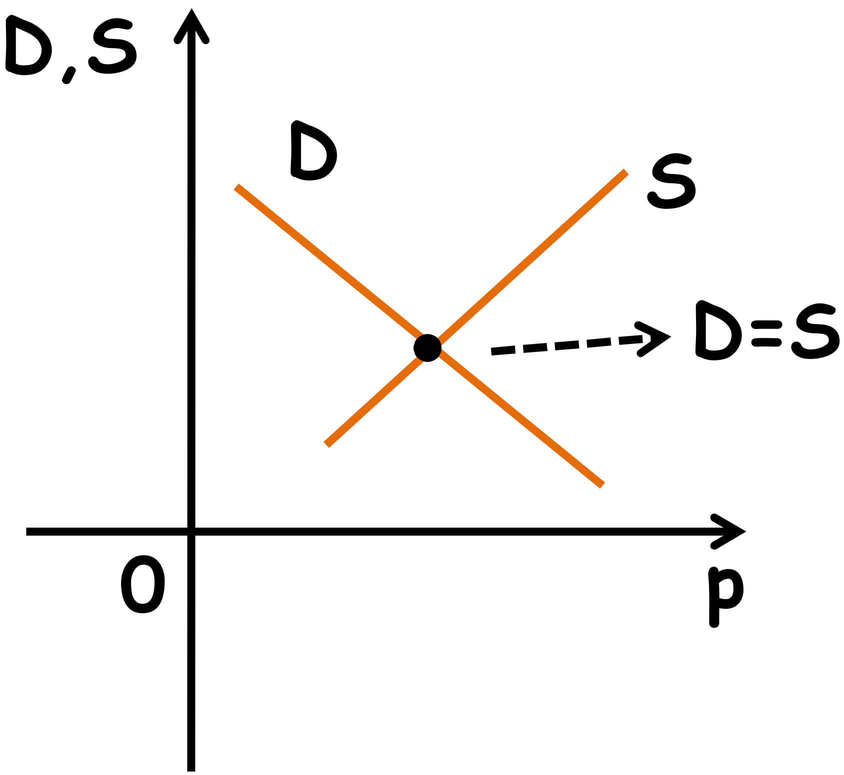
Bu malın piyasaya arz edilebilmesi için fiyatı en az 2 TL olmalıdır.

Örnek: Bir malın piyasa arz fonksiyonu $2S-3p=-6$ ise grafiğini çiziniz.

p	0	2
s	-3	0



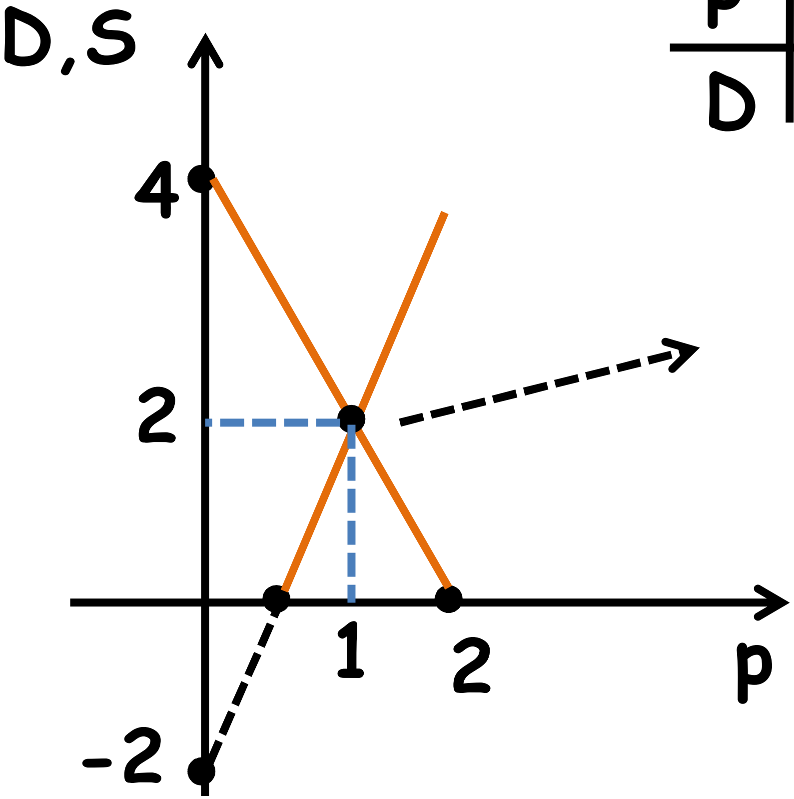
Bir malın arz ve talep doğrularının kesiştiği noktaya o mal için başa baş noktası denir.



Örnek: Bir malın piyasa talep ve arz fonksiyonları $D=4-2p$ ve $S=-2+4p$ ise piyasa denge noktasını bulup, grafik üzerinde gösteriniz. Bu noktayı yorumlayınız.

p	0	2
D	4	0

p	0	1/2
S	-2	0



$D=S$

$4-2p=-2+4p$

$6p=6$

$p=1 \longrightarrow D,S=4-2.1=2$