Bir S kümesi ele alalım. $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bu küme 2 şartı sağlıyor ise baz olarak nitelendirilir. V = vektör uzayı

1. şart: S kümesi V vektör uzayını germelidir.

2. şart: S kümesindeki vektörler lineer bağımsız olmalıdır. S kümesi V vektör uzayı için bir baz olur.

Baz: V vektör uzayındaki tüm vektörleri oluşturabilecek en az elemana sahip küme olarak tanımlanabilir.

R^2'de $\Rightarrow$ standart Baz $= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ bu vektörler ile R^2'deki bütün vektörleri ürete biliriz.

R^3'de standart Baz $= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\vec{u} = 3i - 4j + 5k = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ $V = R^2$ uzayında bir baz mı? yani bu küme ile R^2'de bütün vektörleri üretebilir miyiz.

1. şart R^2 uzayını germelidir.

R^2 nin herhangi bir $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ olsun,

$$c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

R^2 nin herhangi bir $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ denklem sistemi çözülürse R^2 uzayını geriyor diyoruz.

$$-2 / \quad c_1 + 3c_2 = a$$
$$2c_1 + 4c_2 = b$$

$$-2c_2 = b - 2a$$

$$c_2 = \frac{2a - b}{2} \quad , \quad c_1 = \frac{-4a + 3b}{2}$$

denklem çözüldüğü için R^2 uzayını bu iki vektör geriyor demektir. S kümesi R^2 uzayını gerdi.

II. şart:

$$c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2 / \quad c_1 + 3c_2 = 0$$
$$2c_1 + 4c_2 = 0$$

$$c_2 = 0$$
$$c_1 = 0$$

c_1 ve c_2

c_1 ve c_2 ikisi de sıfır çıktığına göre bu iki vektör lineer bağımsızdır.

S kümesi I ve II. şartı sağladığından R^2 uzayında bir baz oluşturur. ~~deriz~~.

$S = \{t^2+1,\ t-1,\ 2t+2\}$ kümesi P_2 de vektör uzayı için bir baz olupolmadığını belirleyiniz.

I. şart: $c_1(t^2+1) + c_2(t-1) + c_3(2t+2) = at^2 + bt + c$

$c_1(t^2+1) + c_2(t-1) + c_3(2t+2) = at^2+bt+c$

$c_1t^2 + c_1 + c_2t - c_2 + 2c_3t + 2c_3 = at^2+bt+c$

$c_1 = a$

$c_2 + 2c_3 = b$

$c_1 - c_2 + 2c_3 = c$

$-c_2 + 2c_3 = c - a$

$c_2 + 2c_3 = b$

$+$

$4c_3 = b + c - a$

$c_3 = \dfrac{b+c-a}{4}$

$c_2 = \dfrac{b-c+a}{2}$

$c_3 = \dfrac{b+c-a}{4}$

Denklem çözüldüğü için S kümesi P_2'de vektör uzayını gerdi

II. şart $c_1(t^2+1) + c_2(t-2) + c_3(2t+2) = 0t^2+0t+0$

$c_1t^2 + c_1 + c_2t - c_2 + c_3 2t + 2c_3 = 0t^2+0t+0$

$c_1t^2 = 0t^2 \quad c_1 = 0$

$c_2 + 2c_3 = 0 \quad c_1 - c_2 + 2c_3 = 0$

$c_1, c_2, = c_3 = 0$

$$c_2 + 2c_3 = 0$$
$$+ \quad -c_2 + 2c_3 = 0$$
$$4c_3 = 0$$
$$c_3 = 0$$
$$c_2 = 0$$

$c_1, c_2, c_3 =) \, 0$ olduğu için S kümesi lineer bağımsız oluyor.

S kümesi P_2'de

2 şart sağlandığı için bir baz oluşturuyor.

vektör uzayı için

$\boxed{\text{Vektör alt uzayları}}$

$W = \{(x, y, z);\ x + 2y = 0\}$ kümesi $V = \mathbb{R}^3$

vektör ~~uzayımıdır~~ alt uzayımıdır ~~ona tartışalım~~ tartışalım.

1 şart : Bu kümenin içinde 2 eleman toplamı bu kümenin içinde ise 1. şart sağlanır.

Vektör alt uzayları

$W = \{(x, y, z) ; x + 2y = 0\}$ kümesi $V = \mathbb{R}^3$ vektör uzayı alt uzayımıdır?

I. şart: Bu kümenin içinden alacağımız 2 elemanın toplamı bu kümenin içinde oluşuyorsa 1. şart sağlanır.

$w_1 = (x_1, y_1, z_1) \in W \Rightarrow x_1 + 2y_1 = 0$

$w_2 = (x_2, y_2, z_2) \in W \Rightarrow x_2 + 2y_2 = 0$

şu halde $w_1 + w_2 \in W$ olur.

$w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ olup

$x_1 + x_2 + 2(y_1 + y_2) = 0$

$x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2 = 0$ sağlar ve

$w_1 + w_2 \in W$ koşulu sağlanır etcümle

1. şart sağlanmış olur.

II. şart $\quad c \in \mathbb{R}$ olup $w \in W$ ve $cw \in W$ sağlarsa II. şart sağlanmış olur.

$$w = (x, y, t) \Rightarrow cw = (cx, cy, ct) \in W$$

olmalıdır. Yani

$$cx + 2cy = 0$$

$$c(\underbrace{x+2y}_{0}) = 0$$

$c.0 = 0$ olur $\quad c\,w \in W$ sağlar

Dolayısıyla W altuzaydır.

ÖRN $\quad W = \{(x, y, z) : xyt = 0\}$ kümesi $V = \mathbb{R}^3$ uzayının bir alt uzayımıdır tartışınız.

I. şart: $\quad w_1 = (x_1, y_1, z_1) \in W \Rightarrow x_1 y_1 z_1 = 0$

$w_2 = (x_2, y_2, z_2) \in W \Rightarrow x_2 y_2 z_2 = 0$

$w_1 + w_2$ elamanımı W? araştıralım,

$$w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2) \overset{?}{=} 0$$

$$(x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2)(z_1 + z_2) \overset{?}{=} 0$$

$$\underbrace{x_1 y_1 z_1}_{0} + \underbrace{x_1 y_1 z_2}_{?} + \underbrace{x_1 y_2 z_1}_{?} + \underbrace{x_1 y_2 z_2}_{?} + \underbrace{x_2 y_1 z_1}_{?} + \underbrace{x_2 y_1 z_2}_{?} + \underbrace{x_2 y_2 z_1}_{?} + \underbrace{x_2 y_2 z_2}_{0}$$

Bilgi yok $\quad$ Bilgi yok

Belirsizlik var yani $w_1 + w_2 \notin W$ olur.
ez cümle W, V'nin bir altuzayı değildir.

1 - $w \in w_1, w_2$ $\quad w_1 + w_2 \in W$ olmalı.

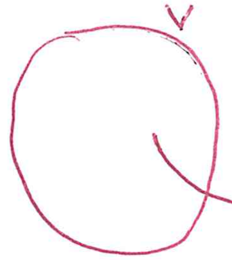
2 - $c \in R$, $w \in R$ ve $cw \in W$ olmalıdır.

Bu 2 şart sağlanırsa W, V'nin bir altuzayıdır

Vektör space — Vector space — Sayfa 8

vektör uzayı boş olmayan bir kümedir,

özel tanımlanmış bir kümedir.



→ içindeki elemanlar belli şartları yerine getirmelidir.

* Vektör uzayının elemanları, toplama ve çarpma işlemi ile ilgili 10 adet aksiyomu (şartı) sağlamalıdır.

R^3 → vektör uzaydır

1. şart: $u, v, x \in V$ vektör seçelim (üç noktası elemanı)

α ve $\beta \in R$ (sabit sayılar scalar)

1 şart $u+v \in V$ olmalı

R^3 'de

$$\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+d\\b+e\\c+f\end{pmatrix}$$ yine üç boyutlu vektör

R^3 içindedir,

değişme özelliği olmalı.

2 şart: $u+v=v+u$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\8\end{pmatrix}$$

birleşme özelliği

3 şart: $(u+v)+x = u+(v+x)$

$$\left[\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}\right]$$

4. şart: Toplamada etkisiz eleman sahip mi? Buna "0" sıfır vektörü denir.

$u + 0 = u$ $\quad R^3$ de $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

5. şart: Her elemanın toplamaya göre tersi olmalıdır.

$u, -u \Rightarrow u + (-u) = 0 \quad \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

6. şart: $\alpha \in R$ o.ü $\alpha . u \in V$ olmalıdır.

$-2\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-6\\-10\end{pmatrix}$

7. şart: $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$ eşitlik sağlanmalıdır.

$\alpha = 4$ olsun.

$\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

$4\left[\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\right] \stackrel{?}{=} 4\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} =$

8. şart $(\alpha + \beta) u = u\alpha + \beta u$

9. şart $(\alpha . \beta) u = \alpha[\beta u]$

10. şart $1(u) = u \quad 1\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$